PROF. DR. ÎNG. NICOLAE ȚOPA AS. ING. OCTAVIA PĂUCESCU

PROBLEME SPECIALE DE REZISTENȚA MATERIALELOR

PENTRU UZUL STUDENȚILOR

INSTITUTUL DE CONSTRUCȚII BUCUREȘTI

-1987-

In sedinta de catedră din 18 mai 1987 a fost discutată lucrarea „Probleme speciale de Rezistența Materialelor" și s-a dat aprobarea multiplicării pe plan local.

Nu conține date secrete sau brevetabile.

Celui mai bun
coleg, cu simpatie
Octavia Păunescu
28.05.19[illegible]

INTRODUCERE

In lucrarea de față sînt prezentate probleme cu caracter recapitulativ, din unele capitole ale cursului de Rezistența Materialelor care se predă studenților din Institutul de Construcții.

Lucrarea se adresează, în special, studenților care se pregătesc pentru concursul profesional de Rezistența Materialelor, dar poate servi și pregătirii seminariilor recapitulative și examenelor.

Autorii își exprimă convingerea că lucrarea, prin tematica problemelor și prin soluțiile prezentate, va stimula interesul studenților și va contribui la o mai bună pregătire profesională la disciplina Rezistența Materialelor.

PROBLEMA NR: 1

Se dă tensorul T_ε, exprimat în sistemul de axe x,y,z:

$$T_{\varepsilon\,(x,y,z)}=\begin{pmatrix}\varepsilon_0 & \varepsilon_0 & \varepsilon_0\\ \varepsilon_0 & \varepsilon_0 & \varepsilon_0\\ \varepsilon_0 & \varepsilon_0 & \varepsilon_0\end{pmatrix}$$ și se cere:

1. Să se exprime tensorul tensiunilor T_σ în sistemul de axe x,y,z.
2. Să se exprime tensorul tensiunilor principale $T_{\sigma\,(1,2,3)}$
3. Să se afle direcțiile principale de efort și deformație și să se descrie tipul de solicitare.

Rezolvare:

1. Elementele tensorului $T_{\varepsilon\,(x,y,z)}$ sunt $\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\varepsilon_0$, $\gamma_{xy}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=2\varepsilon_0$

Invarianții stării de deformație vor fi:

$I_1=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=3\varepsilon_0$; $I_2=0$; $I_3=0$

Rezolvând ecuația de gradul 3 corespunzătoare stării de deformație se obține valorile deformațiilor specifice $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$:

$\varepsilon_1=3\varepsilon_0$; $\varepsilon_2=0$; $\varepsilon_3=0$

deci tensorul deformațiilor specifice $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ va fi:

$$T_{\varepsilon\,(1,2,3)}=\begin{pmatrix}3\varepsilon_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Știind că: $\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x(1+\mu)-\mu I_1(\sigma)\right]$ și $\gamma_{xy}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$

iar $I_1(\sigma)=\frac{E}{1-2\mu}I_1(\varepsilon)$

se obține:

$$E\varepsilon_x=\sigma_x(1+\mu)-\frac{\mu}{1-2\mu}EI_1(\varepsilon)$$

și deci:

$$\sigma_x=\frac{E\varepsilon_x}{1+\mu}+\frac{\mu E I_1(\varepsilon)}{(1-2\mu)(1+\mu)}=\frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_x+\frac{\mu}{1-2\mu}I_1(\varepsilon)\right]$$

dar $\varepsilon_x=\varepsilon_0$, iar $I_1(\varepsilon)=3\varepsilon_0$ și introducând în relația de mai sus se obține:

$$\sigma_x=\frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_0+\frac{\mu}{1-2\mu}3\varepsilon_0\right]=\frac{E}{1+\mu}\cdot\frac{\varepsilon_0-2\mu\varepsilon_0+3\mu\varepsilon_0}{1-2\mu}=$$

$$=\frac{E}{1-2\mu}\varepsilon_0$$

Analog, se determină tensiunile normale σ_y și σ_z

deci: $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\frac{E}{1-2\mu}\varepsilon_0$

Apoi: $\tau_{xy}=\frac{E\gamma_{xy}}{2(1+\mu)}$; dar $\gamma_{xy}=2\varepsilon_0$

deci $\tau_{xy}=\frac{E\cancel{2}\varepsilon_0}{\cancel{2}(1+\mu)}=\frac{E\varepsilon_0}{1+\mu}$

Analog, se determină tensiunile tangențiale τ_{yz}, τ_{zx}

deci: $\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=\frac{E\varepsilon_0}{1+\mu}$

Tensorul tensiunilor T_σ în sistemul de axe x,y,z va fi:

$$T_{\sigma\,(x,y,z)}=\begin{pmatrix}\frac{E\varepsilon_0}{1-2\mu} & \frac{E\varepsilon_0}{1+\mu} & \frac{E\varepsilon_0}{1+\mu}\\ \frac{E\varepsilon_0}{1+\mu} & \frac{E\varepsilon_0}{1-2\mu} & \frac{E\varepsilon_0}{1+\mu}\\ \frac{E\varepsilon_0}{1+\mu} & \frac{E\varepsilon_0}{1+\mu} & \frac{E\varepsilon_0}{1-2\mu}\end{pmatrix}$$

2. Tensiunile principale $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ se determină dificil din ecuația de gradul 3 și de aceea se procedează astfel:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_1 + \frac{\mu}{1-2\mu} I_1(\varepsilon)\right] = \frac{E}{1+\mu}\left[3\varepsilon_0 + \frac{\mu}{1-2\mu} 3\varepsilon_0\right] =$$

$$= \frac{3E}{1+\mu} \frac{1-\mu}{1-2\mu} \varepsilon_0$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{E}{1+\mu}\left[0 + \frac{\mu 3 \varepsilon_0}{1-2\mu}\right] = \frac{3\varepsilon_0 E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

Tensorul tensiunilor principale $T_{\sigma(1,2,3)}$ va fi:

$$T_{\sigma(1,2,3)} = \begin{bmatrix} \frac{3E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3E\mu\varepsilon_0}{(1+\mu)(1-2\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3E\mu\varepsilon_0}{(1+\mu)(1-2\mu)} \end{bmatrix}$$

3. Solicitarea este de întindere pe o direcție, cu deformațiile împiedicate pe celelalte două direcții.

Direcțiile principale de tensiune vor fi:

Pentru $\sigma_1 = \frac{3E(1-\mu)\varepsilon_0}{(1+\mu)(1-2\mu)}$

$$\begin{cases} -2l_1' + m_1' + n_1' = 0 \\ l_1' - 2m_1' + n_1' = 0 \\ l_1' + m_1' - 2n_1' = 0 \end{cases}$$

se alege $l_1' = 1$, se obțin $m_1' = 0$, $n_1' = 0{,}45$

$$\lambda = \sqrt{1^2 + 0{,}5^2} = 1{,}11$$

se obține deci: $l_1 = 0{,}90$; $m_1 = 0$; $n_1 = 0{,}45$

Analog, se obțin direcțiile principale pentru:

$$\sigma_2 = \frac{3E\mu\varepsilon_0}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \sigma_3$$

$l_2' + m_2' + n_2' = 0$, sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute se reduce la una singură. Din această nedeterminare rezultă că oricare două direcții perpendiculare între ele și perpendiculare pe direcția principală 1 sunt direcțiile principale 2 și 3.

Direcțiile principale de deformații vor fi:

Pentru $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$

$$\begin{cases} -2l_1' + m_1' + n_1' = 0 \\ l_1' - 2m_1' + n_1' = 0 \\ l_1' + m_1' - 2n_1' = 0 \end{cases}$$

Rezultă deci $l_1 = 0{,}90$; $m_1 = 0$; $n_1 = 0{,}45$

Pentru $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute se reduce la o singură ecuație, deci oricare două direcții principale perpendiculare una pe cealaltă și perpendiculare pe direcția 1, vor fi cele două direcții 2 și 3 de deformație.

PROBLEMA NR: 2

Se dă tensorul :

$$T_{\sigma\,(x,y,z)} = \begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix}$$

1. Să se exprime tensorul tensiunilor principale
2. Să se exprime tensorul deformațiilor specifice $T_{\varepsilon\,(x,y,z)}$ și $T_{\varepsilon\,(1,2,3)}$
3. Să se descrie tipul de solicitare

Rezolvare:

1. Elementele tensorului $T_{\sigma\,(x,y,z)}$ sînt $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = p$

Pentru determinarea elementelor tensorului $T_{\sigma\,(1,2,3)}$ se calculează invarianții stării de tensiune I_1, I_2, I_3

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3p$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 0$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0$$

Rezolvînd apoi ecuația de gradul 3 în tensiuni se obțin valorile tensiunilor principale $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \longrightarrow \sigma^3 - 3p\sigma^2 = 0$$

$\sigma_1 = 3p$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = 0$

Deci tensorul tensiunilor principale este:

$$T_{\sigma\,(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 3p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Expresiile deformațiilor specifice în funcție de tensiuni sînt:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z\right) = p\frac{(1-2\mu)}{E} \\ \varepsilon_y = p\frac{(1-2\mu)}{E} \\ \varepsilon_z = p\frac{(1-2\mu)}{E} \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}p \end{cases}$$

Deci tensorul deformațiilor specifice este:

$$T_{\varepsilon\,(x,y,z)} = \begin{pmatrix} p\frac{(1-2\mu)}{E} & p\frac{(1+\mu)}{E} & p\frac{(1+\mu)}{E} \\ p\frac{(1+\mu)}{E} & p\frac{(1-2\mu)}{E} & p\frac{(1+\mu)}{E} \\ p\frac{(1+\mu)}{E} & p\frac{(1+\mu)}{E} & p\frac{(1-2\mu)}{E} \end{pmatrix}$$

Calculînd apoi: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ se obțin expresiile:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\sigma_1 = \frac{3p}{E} \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(-\mu\sigma_1) = -\frac{3p\mu}{E} \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(-\mu\sigma_1) = -\frac{3p}{E}\mu \end{cases}$$

Deci tensorul $T_{\varepsilon\,(1,2,3)}$ este:

$$T_{\varepsilon\,(1,2,3)} = \begin{pmatrix} \frac{3p}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3p\mu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3p}{E}\mu \end{pmatrix}$$

3. Solicitarea este de întindere pe o direcție, fără ca deformațiile să fie împiedicate.

PROBLEMA NR 3

Tabloul $T_\sigma = \begin{pmatrix} p & -p & 2p \\ -p & p & -2p \\ 2p & -2p & 4p \end{pmatrix}$ poate constitui un tensor de tensiune? În caz afirmativ să se arate ce tip de solicitare reprezintă. Pentru $p = 250\ daN/cm^2$, să se arate care este tensiunea maximă și ce direcție are.

Rezolvare:

1. Tensorul T_σ este un tensor de tensiune deoarece este simetric în raport cu diagonala principală, datorită dualității tensiunilor tangențiale.

2. Pentru a arăta ce solicitare reprezintă tensorul T_σ, se calculează invarianții de tensiune I_1, I_2, I_3.

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = +p + p + 4p = 6p$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = p^2 + 4p^2 + 4p^2 - p^2 - 4p^2 - 4p^2 = 0$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & -p & 2p \\ -p & p & -2p \\ 2p & -2p & 4p \end{vmatrix} = 0$$

Pentru determinarea tensiunilor principale se rezolvă ecuația de gradul trei: $\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0$, adică:

$\sigma^3 - 6p\sigma^2 = 0$ sau $\sigma^2(\sigma - 6p) = 0$, din care rezultă: $\sigma_1 = 6p$ și $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, deci tensorul reprezintă o solicitare de întindere monoaxială.

3. Pentru $p = 250\ daN/cm^2$, $\sigma_1 = 6 \cdot 250 = 1500\ daN/cm^2$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

Direcțiile principale de tensiune se vor determina rezolvând sistemul format din ecuațiile: $(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0$; $\tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0$; $\tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0$

în care σ ia pe rînd valorile $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ determinate anterior și obținem cosinusii directori l, m, n pentru fiecare direcție principală de tensiune, știind că există relația: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

pentru $\sigma_1 = 6p$ $\begin{cases} -5l_1' - m_1' + 2n_1' = 0 \\ -l_1' - 5m_1' - 2n_1' = 0 \\ 2l_1' - 2m_1' - 2n_1' = 0 \end{cases}$, se alege $l_1' = 1$; $m_1' = -1$; $n_1' = 2$

deci $\lambda = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$; iar $l_1 = \frac{l_1'}{\lambda}$; $m_1 = \frac{m_1'}{\lambda}$; $n_1 = \frac{n_1'}{\lambda}$

și se obține: $l_1 = 0{,}4082$; $m_1 = -0{,}4082$, $n_2 = 0{,}8164$

pentru $\sigma_2 = 0$ (sau $\sigma_3 = 0$), sistemul devine:

$$\begin{cases} l_2' - m_2' + 2n_2' = 0 \\ -l_2' + m_2' - 2n_2' = 0 \\ 2l_2' - 2m_2' + 4n_2' = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 0 \end{cases}$$

Primele 3 ecuații se reduc la una singură, deci sistemul devine: $\begin{cases} l_2' - m_2' + 2n_2' = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 0 \end{cases}$, deci sistemul este nedeterminat și deci nu se pot determina direcțiile 2 și 3. Cu alte cuvinte orice două direcții perpendiculare între ele și perpendiculare pe direcția 1 pot fi direcțiile principale 2 și 3.

PROBLEMA NR: 4

Se dă tensorul $T_{\sigma(x,y,z)} = \begin{pmatrix} p & 2p & 3p \\ 2p & 2p & p(1+a) \\ 3p & p(1+a) & p \end{pmatrix}$ şi se cere:

1. Să se determine parametrul a, astfel încît tensorul să reprezinte o stare de tensiune plană. Care sînt tensiunile principale în acest caz.

2. Pentru una din soluţiile obţinute la punctul 1, să se determine direcţiile principale de efort.

Rezolvare:

1. Pentru ca tensorul să reprezinte o stare plană de tensiune trebuie ca invariantul de gradul 3, (I_3) să fie nul.

$$I_3 = p(2p^2-p^2-p^2a^2-2p^2a) - 2p(2p^2-3p^2-3p^2a) + 3p(2p^2+2p^2a-6p^2) = p^3(-9+10a-a^2)$$

$$I_3 = p^3(-9+10a-a^2) = 0$$

Rezultă valorile: $a_1 = 1$ şi $a_2 = 9$

Pentru $a_1 = 1$, tensorul devine: $T_\sigma = \begin{pmatrix} p & 2p & 3p \\ 2p & 2p & 2p \\ 3p & 2p & p \end{pmatrix}$, iar cei doi invarianţi sînt: $I_1 = p+2p+p = 4p$, iar $I_2 = -2p^2-8p^2-2p^2 = -12p^2$

Ecuaţia de gradul 3 pentru determinarea tensiunilor principale devine: $\sigma^3 - 4p\sigma^2 - 12p^2\sigma = 0$; cu soluţiile:

$$\sigma_1 = 6p \; ; \; \sigma_2 = 0 \; ; \; \sigma_3 = -2p$$

Pentru $a_2 = 9$, tensorul este: $T_\sigma = \begin{pmatrix} p & 2p & 3p \\ 2p & 2p & 10p \\ 3p & 10p & p \end{pmatrix}$, cu cei doi invarianţi: $I_1 = 4p$; $I_2 = -98p^2-8p^2-2p^2 = -108p^2$

$\sigma^3 - 4p\sigma^2 - 108p^2$, iar soluţiile ecuaţiei sînt:

$\sigma_1 = 12,583p$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -8,583p$

2. Pentru $a_1 = 1$ şi $\sigma_1 = 6p$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -2p$ se vor determina direcţiile principale de tensiune

Pentru determinarea direcţiei principale 1: $\sigma = \sigma_1 = 6p$

$$\begin{cases} -5p\,l_1 + 2p\,m_1 + 3p\,n_1 = 0 \\ 2p\,l_1 - 4p\,m_1 + 2p\,n_1 = 0 \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \end{cases}$$

Rezultă: $l_1 = m_1 = n_1 = \frac{1}{\pm\sqrt{3}}$

Pentru determinarea direcţiei principale 2: $\sigma = \sigma_2 = 0$

$$\begin{cases} p\,l_2 + 2p\,m_2 + 3p\,n_2 = 0 \\ 2p\,l_2 + 2p\,m_2 + 2p\,n_2 = 0 \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \end{cases}$$

Rezultă: $l_2 = \frac{1}{\pm\sqrt{6}}$; $m_2 = \frac{-2}{\pm\sqrt{6}}$; $n_2 = \frac{1}{\pm\sqrt{6}}$

Pentru determinarea direcţiei principale 3; $\sigma = \sigma_3 = -2p$

$$\begin{cases} 3p\,l_3 + 2p\,m_3 + 3p\,n_3 = 0 \\ 2p\,l_3 + 4p\,m_3 + 2p\,n_3 = 0 \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$

Rezultă: $l_3 = \frac{1}{\mp\sqrt{2}}$; $m_3 = 0$; $n_3 = \frac{1}{\pm\sqrt{2}}$

PROBLEMA NR 5

Se dă tensorul T_σ definit prin componentele sale:
$\sigma_x = p$; $\sigma_y = p$; $\sigma_z = p$; $\tau_{xy} = 0$; $\tau_{xz} = 0$; $\tau_{yz} = \alpha \cdot p$. Se cere:

1. Să se determine α astfel încât T_σ să reprezinte o stare de tensiune plană
2. Pentru α astfel determinat să se determine direcțiile și tensiunile principale.

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & \alpha p \\ 0 & \alpha p & p \end{vmatrix}$$

Rezolvare:

1. Se calculează invarianții stării de tensiune:

$I_1 = 3p$; $I_2 = p^2 + p^2 - \alpha^2 p^2 + p^2 = p^2(3-\alpha^2)$; $I_3 = p^3(1-\alpha^2)$

Pentru ca tensorul T_σ să reprezinte o stare de tensiune plană trebuie ca $I_3(\sigma) = 0$. Din această condiție rezultă:

$1-\alpha^2 = 0$; $\alpha = \pm 1$

Cu aceste valori se rescriu invarianții:

$I_1 = 3p$; $I_2 = 2p^2$; $I_3 = 0$

2. Ecuația de gradul trei, a tensiunilor principale devine:

$$\sigma^3 - 3p\sigma^2 + 2p^2\sigma = 0$$

cu rădăcinile: $\sigma_1 = 2p$; $\sigma_2 = p$; $\sigma_3 = 0$

Se determină direcțiile principale de tensiune

$\underline{\alpha = 1}$

Pentru $\sigma = \sigma_1 = 2p$ se obține sistemul:
$$\begin{cases} -pl_1 = 0 \\ -pm_1 + pn_1 = 0 \\ pm_1 - pn_2 = 0 \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \end{cases}$$
cu rădăcinile: $l_1 = 0$; $m_1 = n_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (bisectoare I-a yOz)

Pentru $\sigma = \sigma_2 = p$ se obține sistemul:
$$\begin{cases} pn_2 = 0 \\ pm_2 = 0 \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 0 \end{cases}$$
cu rădăcinile $m_2 = 0$; $n_2 = 0$; $l_2 = \pm 1$ (axa x)

Pentru $\sigma = \sigma_3 = 0$ se obține sistemul:
$$\begin{cases} pl_3 = 0 \\ pm_3 + pn_3 = 0 \\ pm_3 + pn_3 = 0 \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$
cu rădăcinile: $l_3 = 0$; $m_3 = -n_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (bisectoarea a II a yOz)

Se obține analog pentru:

$\underline{\alpha = -1}$

Pentru $\sigma = \sigma_1 = 2p$ se obține sistemul:
$$\begin{cases} -pl_1 = 0 \\ -pm_1 - pn_1 = 0 \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 0 \end{cases}$$
cu rădăcinile $l_1 = 0$; $m_1 = -n_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (bisectoarea a II a yOz)

Pentru $\sigma = \sigma_2 = p$ se obține sistemul
$$\begin{cases} -pn_2 = 0 \\ -pm_2 = 0 \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \end{cases}$$
cu rădăcinile $m_2 = 0$; $n_2 = 0$; $l_2 = \pm 1$ (axa x)

Pentru $\sigma = \sigma_3 = 0$ se obține sistemul
$$\begin{cases} pl_3 = 0 \\ pm_3 - pn_3 = 0 \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$
cu rădăcinile $l_3 = 0$; $m_3 = n_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (bisectoarea I a yOz)

Deci soluția cu $\alpha = -1$, duce la schimbarea între ele a direcțiilor 1 și 3.

PROBLEMA NR 6

Se dă tensorul $T_\sigma(x,y,z)$ prin componentele: $\sigma_x = -\frac{2}{3}p$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = -\frac{4}{3}p$, $\tau_{xy} = \sqrt{\frac{2}{3}}p$; $\tau_{yz} = \frac{p}{\sqrt{3}}$; $\tau_{zx} = \frac{2\sqrt{2}}{3}p$.

Să se determine direcțiile principale și tensiunile principale, precum și tensiunile tangențiale extreme.

Rezolvare:

$$T_{\sigma(x,y,z)} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3}p & \sqrt{\frac{2}{3}}p & \frac{2\sqrt{2}}{3}p \\ \sqrt{\frac{2}{3}}p & 0 & \frac{p}{\sqrt{3}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}p & \frac{p}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{3}p \end{vmatrix}$$

Invarianții stării de tensiune sînt:

$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -2p$

$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 = -p^2$.

$I_3 = 2p^3$.

Ecuația de gradul trei a tensiunilor principale este: $\sigma^3 + 2p\sigma^2 - p^2\sigma - 2p^3 = 0$ sau $(\sigma+2p)(\sigma^2 - p^2) = 0$ cu rădăcinile:

$\sigma_1 = p$; $\sigma_2 = -p$; $\sigma_3 = -2p$.

Pentru determinarea direcțiilor principale de tensiune se folosesc pe rînd valorile tensiunilor principale σ_1, σ_2, σ_3:

Pentru $\sigma = \sigma_1 = p$.

Sistemul de ecuații în l_1, m_1, n_1 este:

$$(\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{yx}m_1 + \tau_{zx}n_1 = 0$$
$$\tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{zy}n_1 = 0.$$
$$\tau_{xz}l_1 + \tau_{yz}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 = 0.$$
$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1.$$

Sistemul de patru ecuații cu trei necunoscute este compatibil deoarece determinantul primelor 3 ecuații este nul, ceea ce înseamnă

că o ecuație poate fi scrisă ca o combinație liniară a celorlalte două. Rezultă după înlocuirea tensiunilor:

$$-\frac{5}{3}p \cdot l_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}p\, m_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}p\, n_1 = 0.$$
$$\sqrt{\frac{2}{3}}l_1 - m_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}n_1 = 0.$$
$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1.$$

Rezultă: $l_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $m_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $n_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Procedînd analog pentru $\sigma = \sigma_2 = -p$ se obțin soluțiile:

$l_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $m_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $n_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$

și apoi pentru $\sigma = \sigma_3 = -2p$ se obțin soluțiile:

$l_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $m_3 = 0$; $n_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}$.

PROBLEMA NR 7

Se dă tensorul deformațiilor specifice T_ε, de forma:

$$T_{\varepsilon\,(x,y,z)} = \begin{vmatrix} e(1+\alpha) & e & e \\ e & e(1+\alpha) & e \\ e & e & e(1+\alpha) \end{vmatrix}$$

unde s-a notat cu e:

$$e = \varepsilon_0(1+\mu) = \frac{\sigma_0}{E}(1+\mu)$$

Să se arate că tensorul T_ε poate reprezenta o stare de tensiuni uniaxială și să se determine parametrul α în acest caz. Să se determine direcțiile și tensiunile principale pentru α astfel obținut.

Rezolvare:

Din legea generalizată a lui Hooke se deduce:

$$\sigma_x = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_z\right]$$ și alte 2 relații asemănătoare. De asemenea se știe că $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, $\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$, $\tau_{zy} = G\gamma_{zy}$.

În cazul tensorului din text se obține:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}e(1+\alpha)\left(1+\frac{2\mu}{1-\mu}\right) = \frac{Ee}{1-2\mu}(1+\alpha)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{E}{2(1+\mu)}2e = \frac{E\cdot e}{1+\mu}$$

Tensorul tensiunilor corespunzătoare lui T_ε este:

$$T_{\sigma\,(x,y,z)} = E\cdot e \begin{vmatrix} \frac{1+\alpha}{1-2\mu} & \frac{1}{1+\mu} & \frac{1}{1+\mu} \\ \frac{1}{1+\mu} & \frac{1+\alpha}{1-2\mu} & \frac{1}{1+\mu} \\ \frac{1}{1+\mu} & \frac{1}{1+\mu} & \frac{1+\alpha}{1-2\mu} \end{vmatrix}$$

Condițiile pentru ca T_σ să reprezinte o stare de tensiune uniaxială sunt: $I_2(\sigma) = 0$ și $I_3(\sigma) = 0$

Din prima condiție rezultă:

$$I_2(\sigma) = E^2 e^2\left\{\frac{(1+\alpha)^2}{(1-2\mu)^2} - \frac{1}{(1+\mu)^2}\right\}\cdot 3 = 0\ ;\ (1+\alpha)^2 = \frac{(1-2\mu)^2}{(1+\mu)^2}$$

adică: $1+\alpha = \pm\frac{1-2\mu}{1+\mu}$, cu soluții: $\alpha_1 = -\frac{3\mu}{1+\mu}$; $\alpha_2 = -\frac{2-\mu}{1+\mu}$

Pentru cele două valori ale lui α și înlocuind produsul $E\cdot e = \sigma_0(1+\mu)$ se obțin tensorii

$$T_\sigma^1 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & \sigma_0 \end{vmatrix}\ ;\quad T_\sigma^2 = \begin{vmatrix} -\sigma_0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & -\sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & -\sigma_0 \end{vmatrix}$$

Calculând pentru primul tensor T_σ^1 invariantul de gradul trei se obține $I_3(\sigma) = 0$. Pentru T_σ^2 se obține $I_3(\sigma) = 4\sigma_0^3$. În concluzie, numai prima valoare: $\alpha_1 = -\frac{3\mu}{1+\mu}$ conduce la soluția căutată.

Pentru tensorul T_σ^1, invarianții stării de tensiune sunt: $I_1(\sigma) = 3\sigma_0$; $I_2(\sigma) = 0$ și $I_3(\sigma) = 0$

Ecuația de gradul trei a tensiunilor principale devine $\sigma^3 - 3\sigma_0\sigma^2 = 0$, cu soluțiile: $\sigma_1 = 3\sigma_0$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

Pentru determinarea direcțiilor principale de tensiune se alcătuiește sistemul de patru ecuații cu trei necunoscute mai întâi pentru $\sigma = \sigma_1 = 3\sigma_0$ și se obține:

$$-2\sigma_0 l_1 + \sigma_0 m_1 + \sigma_0 n_1 = 0$$
$$\sigma_0 l_1 - 2\sigma_0 m_1 + \sigma_0 n_1 = 0$$
$$\sigma_0 l_1 + \sigma_0 m_1 - 2\sigma_0 n_1 = 0$$
$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 0$$

Scăzând ecuațiile 1 și 2 se obține $l_1 = m_1$. Scăzând ecuațiile

2 și 3 se obține $m_1 = n_1$. Așa dar $l_1 = m_1 = n_1$, iar din ultima ecuație se obține: $l_1 = m_1 = n_1 = \pm\sqrt{3}$.

Direcția 1 este normală pe suprafața octaedrică din primul octant (sau normala opusă)

Pentru celelalte două direcții principale corespunzătoare lui $\sigma_2 = 0$ și $\sigma_3 = 0$ se obține sistemul:

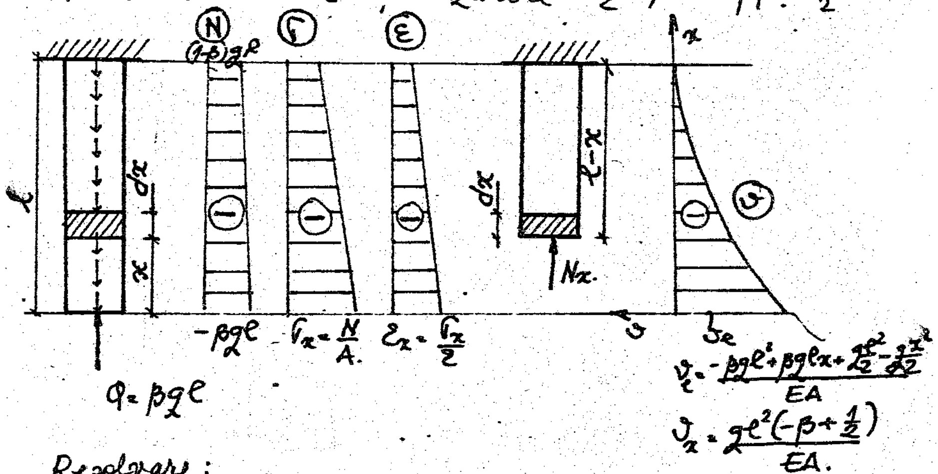
$$\sigma_0 l_2 + \sigma_0 m_2 + \sigma_0 n_2 = 0$$
$$\sigma_0 l_2 + \sigma_0 m_2 + \sigma_0 n_2 = 0$$
$$\sigma_0 l_2 + \sigma_0 m_2 + \sigma_0 n_2 = 0$$
$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$

Acest sistem este nedeterminat. Orice pereche ortogonală de drepte poate constitui un sistem de axe principale pentru σ_2 și σ_3.

PROBLEMA NR 8

O bară din oțel cu secțiunea constantă, suspendată ca în figură are greutatea g kgf/m. La capătul inferior bara este comprimată axial cu forța $Q = \beta g \ell$, $\beta > 1$. Să se determine:

1. Variația lui σ și ε pe lungimea barei.
2. Variația deplasărilor verticale ale tuturor punctelor barei.
3. Deplasarea verticală maximă și secțiunea unde are loc.
4. Să se studieze și cazurile: $\frac{1}{2} < \beta < 1$; $\beta = \frac{1}{2}$.



Rezolvare:

① Pentru a stabili variația efortului unitar σ_x și a deformațiilor specifice ε, se stabilește variația efortului N pe lungimea barei.

$$N_x = -\beta g \ell + g x$$

Deci efortul unitar σ_x va fi: $\sigma_x = \frac{N_x}{A}$, iar deformația specifică $\varepsilon_x = \frac{N_x}{EA}$. Variația acestor mărimi pe lungimea barei este dată în diagrame.

② Variația lungimii unui element dx din bară va fi: $\Delta dx = \varepsilon_x dx = \frac{-\beta q l + q x}{EA} dx$; reprezintă o scurtare deoarece $\beta > 1$ și $x < l$.

Deplasarea punctului curent pe verticală este:

$$\Delta x = \int_x^l \Delta dx = \int_x^l \frac{-\beta q l + q x}{EA} dx = \left.\frac{-\beta q l x + q\frac{x^2}{2}}{EA}\right|_x^l =$$

$$= \frac{-\beta q l^2 + \beta q l x + q\frac{l^2}{2} - q\frac{x^2}{2}}{EA}$$ (deplasare spre încastrare)

În încastrarea barei, deci la $x = l$, deplasarea $\Delta_x = 0$.
În capătul liber al barei, la $x = 0$, deplasarea barei va fi:

$$\Delta_x = \frac{-\beta q l^2 + q\frac{l^2}{2}}{EA} = \frac{q l^2(-\beta + \frac{1}{2})}{EA}$$ ($\beta > 1$), deci Δx reprezintă o scurtare a barei.

③ Pentru determinarea deplasării maxime:

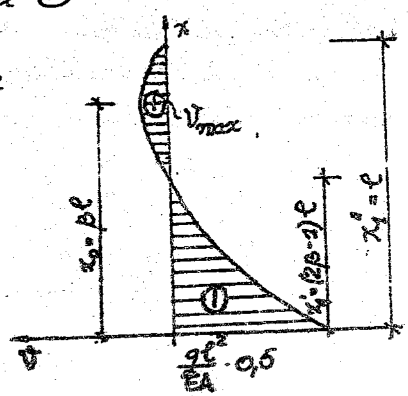
$(\Delta x)' = \frac{\beta q l - q x}{EA} = 0$, rezultă $x = \beta \cdot l > l$, secțiune care nu se află pe grindă. Acesta este însă maximul algebric, fiindcă deplasarea maximă a barei se obține pentru $x = 0$, deci în capătul liber al barei și are valoarea:

$$\Delta x_{max} = \frac{q l^2(-\beta + \frac{1}{2})}{EA}.$$

④ Dacă $\frac{1}{2} < \beta < 1$, diagrama (v) este:

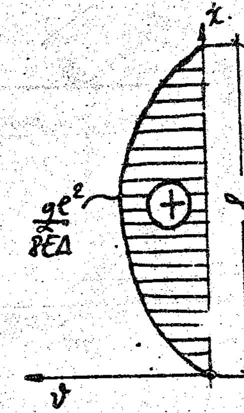
Distanțele x_1 rezultă din condiția $\Delta x = 0$.

$$x^2 - 2\beta l x + (2\beta - 1)l^2 = 0$$

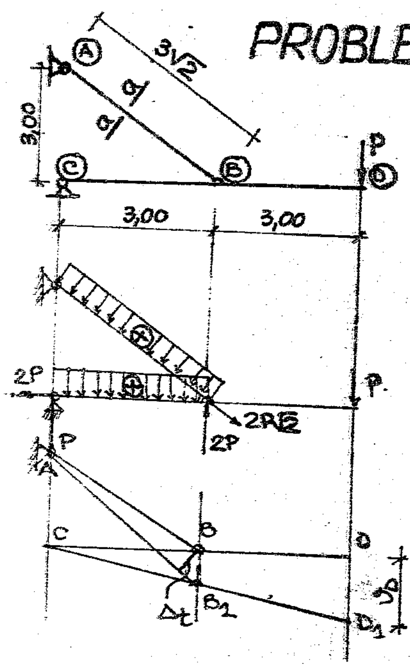


$$x_1 = \frac{\beta l \pm \sqrt{\beta^2 l^2 - 2\beta l^2 + l^2}}{1} = \beta l \pm l(\beta - 1) = \begin{cases}(2\beta - 1)l \\ l\end{cases}$$

Dacă $\beta = \frac{1}{2}$, diagrama (v) devine:

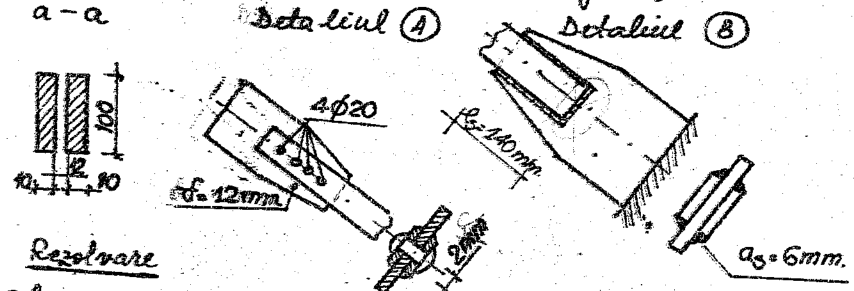


PROBLEMA NR 9



Pentru structura din figură să se determine valoarea maximă a forței P care poate fi aplicată în D astfel încît să fie respectate toate condițiile: 1, 2, 3, 4:

1. Efortul unitar σ în bara AB să nu depășească $\sigma_a = 1600\ daN/cm^2$.
2. Capacitatea de rezistență a îmbinării din A să nu fie depășită.
3. Capacitatea de rezistență a prinderii din B să nu fie depășită.
4. Deplasarea verticală a punctului D să respecte condiția $v_D \le 2mm$. (Se consideră bara CBD rigidă).



Rezolvare

① Efortul axial care solicită tirantul este $N_t = 2P\sqrt{2}\ tf$. Efortul unitar maxim care apare în secțiunea transversală a tirantului va fi determinat ținînd seama că îmbinarea din A este nituită.

$A_{net} = 2(10\cdot1 - 2\cdot1) = 16cm^2$; $N_t = A_{net}\cdot\sigma_a$;

$2P_1\sqrt{2} = 16\cdot1600$; $P_1 = 9050,9\ daN$.

② Pentru îmbinarea nituită se determină forța capabilă: $R_f = 2\cdot\frac{\pi d^2}{4}\tau_{af} = 2\cdot\frac{\pi\cdot2^2}{4}\cdot0,8\cdot1600 = 8042\ daN$.

$R_{str.} = d\cdot t_{min}\cdot\sigma_{ag} = 2\cdot1,2\cdot2\cdot1600 = 768\ daN$.

$R_{nit} = 7680\ daN$; $N_t = n\cdot R_{nit}$; $2P_2\sqrt{2} = 4\cdot7680$

$P_2 = 10861\ daN$.

③ Îmbinarea din nodul B se face cu cordoane de sudură:

$l_1^c = l_1 - 2a_s = 14 - 2\cdot0,6 = 12,8cm$;

$A_1 = l_1^c\cdot n\cdot a_1$.

$N_t = A_1\cdot\tau_{as}$; $2P_3\sqrt{2} = 12,8\cdot4\cdot0,6\cdot$; $P_3 = 11585,2\ daN$

④ Deplasarea secțiunii D este datorată numai deformării tirantului

$$\Delta_t = \frac{N_t\cdot l_t}{E A_t} = \frac{2\sqrt{2}P\cdot3\sqrt{2}\cdot10^2}{2,1\cdot10^6\cdot2\cdot10\cdot1} = \frac{2,85P}{10^5}$$

$$v_B = \Delta_t\cdot\sqrt{2} = \frac{2,85\cdot\sqrt{2}\cdot P}{10^5} = \frac{4,03P}{10^5}$$

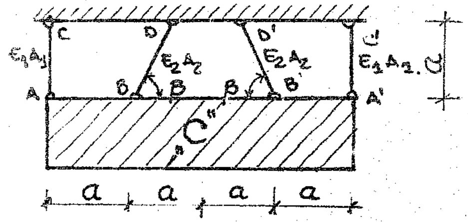
$$v_D = 2v_B = \frac{8,06P}{10^5} \le 0,2 \quad ; \quad P_4 = 2475\ daN.$$

Cea mai mare valoare a forței P care poate fi aplicată în D, pentru a respecta cele patru condiții este:

$P_{adm} = \min(P_1, P_2, P_3, P_4) = 2475\ daN.$

PROBLEMA NR 10

Se dă corpul „C", considerat infinit rigid axial și la încovoiere, la acțiunea forțelor. El este legat de o suprafață fixă cu 4 penduli: AC, BD, B'D', A'C', având caracteristicile din figură.

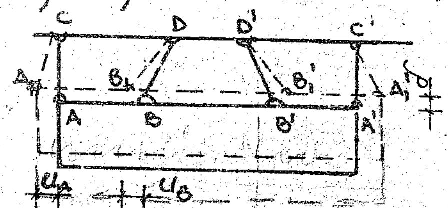


La montaj eforturile în cei 4 penduli erau nule.

Corpul „C" este supus la o variație de temperatură, față de situația de montaj, Δt. Să se determine eforturile din barele dublu articulate: AC, BD, B'D', A'C'. (Se consideră deformațiile foarte mici).

Aplicație: $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\beta = 0$; $\beta = \frac{\pi}{4}$.

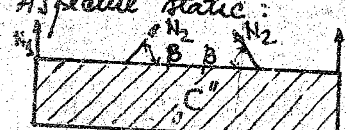
Rezolvare



După aplicarea diferenței de temperatură $\Delta t°$, corpul „C" s-a dilatat și a ajuns în poziția desenată cu linie întreruptă. Problema este static nedeterminată. Se notează cu α coeficientul de dilatație: $u_A = 2a\alpha\Delta t$; $u_B = a\alpha\Delta t$.

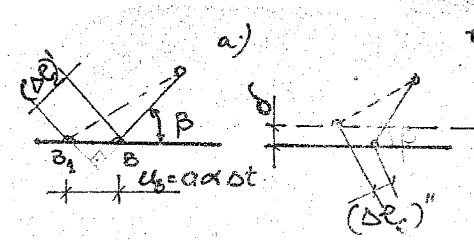
Se notează cu δ deplasarea verticală a corpului „C".

Aspectul static:



Deformațiile corpului „C" fiind foarte mici, echilibrul se poate scrie pe starea nedeformată a corpului.

$$2N_1 + 2N_2 \sin\beta = 0; \quad N_1 = -N_2 \sin\beta \quad (1)$$



b) Lungirea pendulului AC sau A'C' va fi:

$$\Delta l_1 = -\delta \quad (2) \quad \text{(scurtare)}.$$

Pentru a determina modificarea lungimii firului BD sau B'D' se iau în considerare două situații: a) modificarea lungimii numai din temperatură: $(\Delta l_2)' = a\alpha\Delta t \cos\beta$ și b) modificarea lungimii pendulului numai din δ: $(\Delta l_2)'' = -\delta \sin\beta$.

Deci modificarea lungimii pendulului BD se face cu Δl_2: $\Delta l_2 = a\alpha\Delta t\cos\beta - \delta\sin\beta$. (3)

Aspectul fizic:

Expresiile lungirilor celor doi penduli sînt:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \quad \text{și} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}.$$

și folosind relațiile (2) și (3) obținem:

$$\Delta l_1 = -\delta = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}; \quad N_1 = -\frac{E_1 A_1 \delta}{l_1}$$

$$\Delta l_2 = a\alpha\Delta t\cos\beta - \delta\sin\beta = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$

$$N_2 = \frac{E_2 A_2}{l_2}\left(a\alpha\Delta t\cos\beta - \delta\sin\beta\right).$$

Expresiile obținute pentru N_1 și N_2 se introduc în relațiile (1) și se obține:

$$-\frac{E_1 A_1 \delta}{l_1} = -\frac{E_2 A_2}{l_2}\left(a\alpha\Delta t\cos\beta - \delta\sin\beta\right)\sin\beta.$$

$$\delta\left[\frac{E_1 A_1}{l_1} + \frac{E_2 A_2}{l_2}\sin^2\beta\right] = \frac{E_2 A_2}{l_2}\, a\alpha\Delta t \sin\beta\cos\beta.$$

și rezultă:

$$\delta = \frac{\frac{E_2 A_2}{l_2}\, a\alpha\Delta t \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta}{\frac{E_1 A_1}{l_1} + \frac{E_2 A_2}{l_2}\sin^2\alpha}.$$

Expresiile eforturilor axiale care apar în pendul vor fi :

$$N_1 = -\frac{\frac{E_1A_1}{l_1}\cdot\frac{E_2A_2}{l_2}\, a\alpha\Delta t \cos\beta \sin\beta}{\frac{E_1A_1}{l_1}+\frac{E_2A_2}{l_2}\sin^2\beta}$$

$$N_2 = \frac{\frac{E_1A_1}{l_1}\cdot\frac{E_2A_2}{l_2}\, a\alpha\Delta t \cos\beta}{\frac{E_1A_1}{l_1}+\frac{E_2A_2}{l_2}\sin^2\beta}.$$

Aplicații :

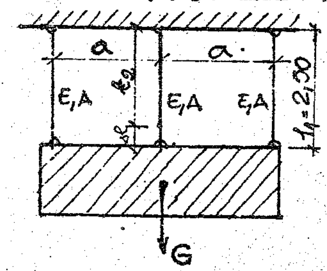
- pentru $\beta=\frac{\pi}{2}$; $\cos\beta=0$; $N_1=N_2=0$
  $\delta=0$.
- pentru $\beta=0$; $\sin\beta=0$; $N_1=0$
  $N_2=\frac{E_2A_2}{l_2}\, a\alpha\Delta t$.
  $\delta=0$
- pentru $\beta=\frac{\pi}{4}$ și $E_1=E_2$, $A_1=A_2$; $l_1=a$; $l_2=\sqrt{2}a$.

$$N_1 = -\frac{EA}{a}\,\frac{\frac{a}{\sqrt2}\cdot\alpha\Delta t\cdot\frac12}{1+\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac12} = -EA\alpha\Delta t\cdot\frac{1}{1+2\sqrt2}$$

$$N_2 = EA\alpha\Delta t\,\frac{\sqrt2}{1+2\sqrt2}.$$

$$\delta = \frac{\frac{EA}{a\sqrt2}\, a\alpha\Delta t\cdot\frac{1}{\ }}{\frac{EA}{a}+\frac{EA}{a\sqrt2}\cdot\frac12} = \frac{\alpha\Delta t}{2\sqrt2}\cdot\frac{a\cdot2\sqrt2}{2\sqrt2+1} = \frac{\alpha\Delta t\, a}{2\sqrt2+1}$$

PROBLEMA NR 11



Un corp rigid cu greutatea proprie $G=3000\,kgf$ este suspendat cu trei tiranți, din oțel, cu secțiuni egale $A=4cm^2$.

Tiranții extremi au lungimi egale l_1, iar tirantul din mijloc are lungimea l_2 mai mică cu $\Delta l=2{,}5mm$ decît l_1

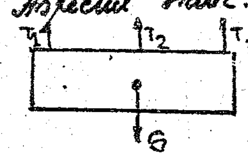
La montaj, se prinde forțat de corp și tirantul din mijloc

1. Să se calculeze eforturile unitare care apar în cei trei tiranți
2. Să se calculeze cu cît se deplasează fața superioară a corpului după prinderea celor trei tiranți

Rezolvare:

1. Problema este o dată static nedeterminată

Aspectul static:



Sistemul este rezemat și încărcat simetric deci $T_1=T_3$

$$2T_1+T_2=G \quad (1)$$

Aspectul geometric

Lungimile finale ale celor trei tiranți vor fi egale, deoarece sistemul este simetric, iar după deformare corpul își păstrează poziția orizontală

$$l_1+\Delta l_1 = l_2+\Delta l_2 \quad \text{sau} \quad l_1-l_2=\Delta l=\Delta l_2-\Delta l_1 \quad (2)$$

Aspectul fizic

$$\Delta l = \frac{T_2 l_2}{EA}-\frac{T_1 l_1}{EA} \quad (3)$$, deoarece diferența de lungime între l_1 și l_2 este foarte mică (0,25cm) se consideră aproximativ $l_1=l_2$

Folosind relațiile (1) și (3) se obțin expresiile eforturilor din tiranți.

$$T_1 = \frac{G\cdot l_1 - \Delta l\cdot EA}{3l_1} \quad ; \quad T_2 = \frac{G l_1 + 2\Delta l\cdot EA}{3 l_1}$$

$$T_1 = \frac{G}{3} - \frac{\Delta l\cdot EA}{3l_1} \quad ; \quad T_2 = \frac{G}{3} + \frac{2\,\Delta l\, EA}{3\,l_1}$$

Eforturile unitare care apar în tiranți la suspendarea corpului sînt:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{T_1}{A} = \frac{G}{3A} - \frac{\Delta l\cdot E}{3l_1} = \frac{3000}{3\cdot 4} - \frac{0{,}25\cdot 2{,}1\times 10^6}{3\cdot 250} = -450\ kgf/cm^2$$

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{A} = \frac{G}{3A} + \frac{2\Delta l\cdot E}{3l_1} = \frac{3000}{2\cdot 4} + \frac{2\cdot 0{,}25\cdot 2{,}1\cdot 10^6}{2\cdot 250} = 1650\ kgf/cm^2$$

Deci tiranții extremi sînt comprimați, iar tirantul din mijloc este întins

2) Eforturile în cei trei tiranți vor fi:

$$T_1 = T_3 = -1800\ kgf \quad ; \quad T_2 = 6600\ kgf$$

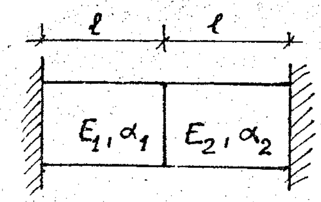
Deplasările celor trei tiranți sînt:

$$\Delta l_1 = \frac{T_1\cdot l_1}{EA} = \frac{-1800\cdot 250}{2{,}1\cdot 10^6\cdot 4} = -0{,}054\ cm$$

$$\Delta l_2 = \frac{T_2\cdot l_2}{EA} = \frac{6600\cdot 250}{2{,}1\cdot 10^6\cdot 4} = 0{,}196\ cm$$

Fața superioară a corpului se ridică cu 0,054cm față de poziția inițială, cînd corpul nu era prins cu cei trei tiranți.

PROBLEMA NR 12



O bară de lungime $2l$ este alcătuită din două materiale diferite. Secțiunea barei este constantă pe toată lungimea și egală cu A. Bara este încastrată la ambele capete.

Să se determine eforturile unitare care se produc în cele două materiale, dacă temperatura crește cu Δt.

Rezolvare: Datorită diferenței de temperatură la care este supusă, bara își modifică lungimea:

$$\Delta l = \alpha_1\cdot l\cdot\Delta t + \alpha_2\cdot l\cdot\Delta t = l\Delta t(\alpha_1+\alpha_2)$$

Datorită faptului că deformația barei este împiedicată de cele două încastrări de la capete, apare un efort axial N care produce deformații în cele două materiale ale barei.

$$\Delta l = \frac{Nl}{E_1A} + \frac{N\cdot l}{E_2A} = \frac{N\cdot l}{A}\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)$$

Cele două deformații sînt însă egale

$$l\Delta t(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{Nl}{A}\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)$$

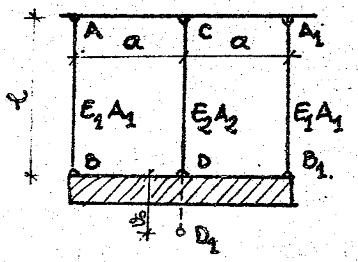
Deci efortul axial care apare în bară va avea valoarea:

$$N = \frac{A\cdot\Delta t(\alpha_1+\alpha_2)}{\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}}$$

Efortul axial fiind constant pe toată lungimea barei și secțiunea de asemenea, efortul unitar care apare în secțiunea transversală va fi același pentru ambele materiale:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{\Delta t(\alpha_1+\alpha_2)}{\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}}$$

PROBLEMA NR 13



O grindă infinit rigidă trebuie suspendată prin intermediul a trei tiranți AB, A_1B_1, CD. La montaj se constată că tirantul CD este mai lung cu cantitatea v_0 decât ceilalți doi. Montajul celor trei tiranți se face forțat. Se cere să se determine:

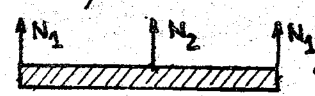
1. Eforturile care apar în cei trei tiranți și în grinda infinit rigidă.
2. Deplasările pe verticală ale punctelor B, D, B_1.
3. Să se generalizeze cazul studiat.

Se face precizarea că $v_0 << \ell$.

Rezolvare:

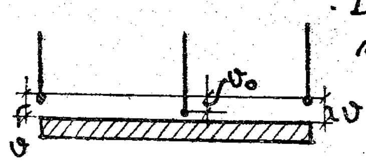
① Datorită simetriei și a ipotezei de rigiditate a grinzii BDB_1, ea își păstrează poziția orizontală. Fie v deplasarea comună a celor trei puncte B, D, B_1. Sistemul fiind nedeterminat problema nu se poate rezolva numai cu aspectul static. De aceea trebuie trecute în revistă cele 3 aspecte: static, geometric, fizic.

– aspectul static



Punând în evidență cele 3 eforturi din fibrele care susțin grinda, se scrie ecuația de proiecție pe axa verticală și se obține: $N_2 + 2N_1 = 0$ (1).

– aspectul geometric



Dacă se pune în evidență deplasarea grinzii se poate scrie:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v = \Delta\ell_1 \\ v_2 &= v - v_0 = \Delta\ell_2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

– aspectul fizic

Expresiile lungirilor firelor sunt:

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1 \cdot \ell}{E_1 \cdot A_1} \quad ; \quad \Delta\ell_2 = \frac{N_2 \cdot \ell}{E_2 \cdot A_2} \quad (3)$$

Folosind relațiile (2) și (3) se poate scrie:

$$N_1 = \frac{E_1A_1}{\ell} \cdot v \quad ; \quad N_2 = \frac{E_2A_2}{\ell}(v - v_0).$$

Introducând expresiile celor două eforturi N_1 și N_2 în ecuația (1) se obține:

$$v\left(2 \cdot \frac{E_1A_1}{\ell} + \frac{E_2A_2}{\ell}\right) = v_0 \frac{E_2A_2}{\ell}.$$

Deci deplasarea v va fi:

$$v = v_0 \cdot \frac{E_2A_2}{2E_1A_1 + E_2A_2},$$

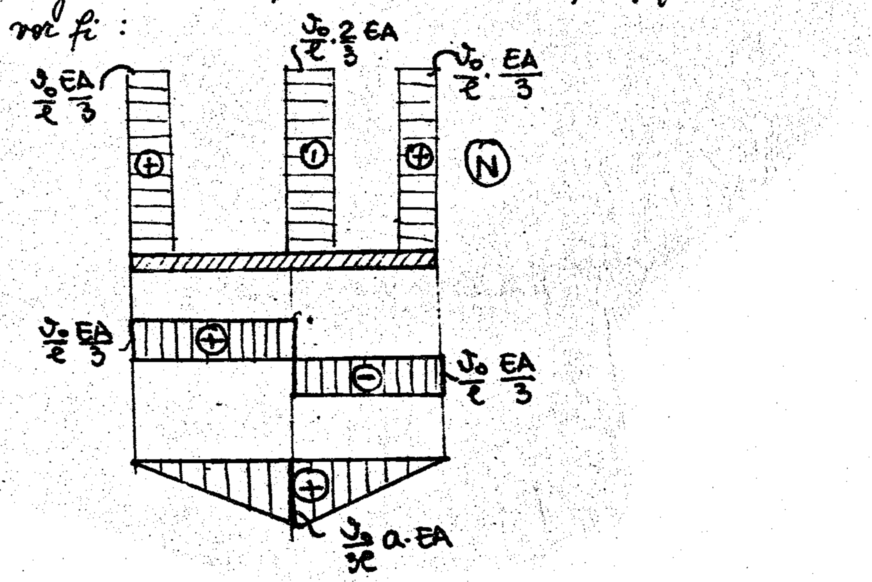
iar eforturile N_1 și N_2:

$$N_1 = \frac{v_0}{\ell} \cdot \frac{E_1A_1 \cdot E_2A_2}{2E_1A_1 + E_2A_2} \quad ; \quad N_2 = -2 \cdot \frac{v_0}{\ell} \cdot \frac{E_1A_1\,E_2A_2}{2E_1A_1 + E_2A_2}.$$

Caz particular: $E_1 = E_2 = E$ și $A_1 = A_2 = A$

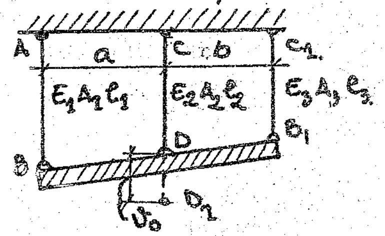
În aceste condiții $N_1 = \frac{v_0}{\ell} \cdot \frac{EA}{3}$ și $N_2 = -\frac{2}{3}\frac{v_0}{\ell}EA$

Diagramele de eforturi din tiranți și grindă vor fi:

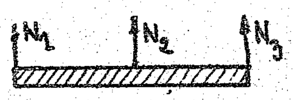


Generalizarea problemei:

Fie situația în care cei trei tiranți au poziție și caracteristici diferite.



- aspectul static

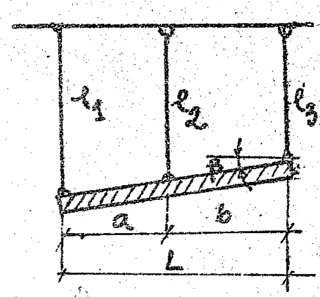


Punând în evidență eforturile în cele 3 fire care susțin grinda, se poate scrie ecuația de proiecție pe axa verticală și ecuația de moment față de punctul D.

$$N_1 + N_2 + N_3 = 0 \quad (4)$$

$$N_1 \cdot a - N_3 \cdot b = 0 \quad (5)$$

- aspectul geometric



Dacă admitem ipoteza că grinda este infinit rigidă, cele trei legături l_1, l_2, l_3 nefiind egale există relația:

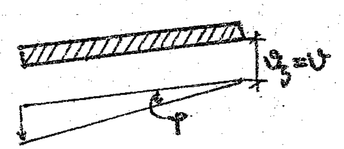
$$tg\beta = \frac{l_2 - l_3}{b} = \frac{l_1 - l_2}{a}. \quad (6)$$

Deformarea de ansamblu a grinzii va comporta două mărimi caracteristice: rotirea generală și o deplasare de referință. Se alege drept deplasare de referință $v_3 = \bar{v}$. Cele 3 deplasări ale tiranților vor fi:

$$v_3 = \bar{v}$$

$$v_2 = \bar{v} + \varphi \cdot b$$

$$v_1 = \bar{v} + \varphi(a+b) = \bar{v} + \varphi \cdot L$$



Lungirile celor trei tiranți vor fi:

$$\Delta l_3 = v_3 = \bar{v} \; ; \; \Delta l_2 = \bar{v} + \varphi \cdot b - v_0 \; ; \; \Delta l_1 = \bar{v} + \varphi \cdot L \quad (7)$$

- aspectul fizic.

Expresiile lungirilor tiranților vor fi:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} \; ; \; \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} \; ; \; \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E_3 \cdot A_3} \quad (8)$$

Folosind relațiile (7) și (8) se pot determina expresiile celor trei eforturi N_1, N_2, N_3 din tiranți:

$$N_1 = \frac{E_1 A_1}{l_1}(\bar{v} + \varphi L) \; ; \; N_2 = \frac{E_2 A_2}{l_2}(\bar{v} + \varphi b - v_0) \; ;$$

$$N_3 = \frac{E_3 A_3}{l_3} \cdot \bar{v} \quad (9).$$

Aceste expresii se introduc în relațiile (4) și (5), obținându-se un sistem de două ecuații cu două necunoscute: φ și $\bar{v}$.

$$\begin{cases} \bar{v}\left[\dfrac{E_1 A_1}{l_1} + \dfrac{E_2 A_2}{l_2} + \dfrac{E_3 A_3}{l_3}\right] + \varphi\left[\dfrac{E_1 A_1}{l_1} L + \dfrac{E_2 A_2}{l_2} \cdot b\right] = \dfrac{E_2 A_2}{l_2} \cdot v_0 \\ \bar{v}\left[\dfrac{E_1 A_1}{l_1} a - \dfrac{E_3 A_3}{l_3} b\right] + \varphi \dfrac{E_1 A_1}{l_1} a \cdot L = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Rezolvând sistemul (10) și notând cu $\alpha_i = \frac{E_i A_i}{l_i}$, se obțin expresiile celor două necunoscute:

$$\bar{v} = v_0 \frac{\alpha_2 \alpha_1 a \cdot L}{\alpha_1 \alpha_2 a^2 + \alpha_2 \alpha_3 b^2 + \alpha_1 \alpha_3 L^2}$$

$$\varphi = v_0 \frac{\alpha_2 (\alpha_3 b - \alpha_1 a)}{\alpha_1 \alpha_2 a^2 + \alpha_2 \alpha_3 b^2 + \alpha_1 \alpha_3 L^2}$$

Mărimile $\bar{v}$ și φ introduse în relațiile (9) duc la obținerea expresiilor celor trei eforturi N_1, N_2, N_3.

Pentru cazul particular precedent în care: $a = b$, $L = 2a$, $E_3 = E_1$; $A_3 = A_1$; $l_1 = l_2 = l_3 = l$

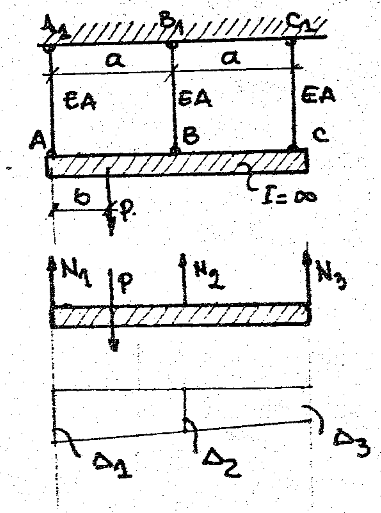
deci: $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{E_1 A_1}{l}$; $\alpha_2 = \frac{E_2 A_2}{l}$ rezultă:

$\varphi = 0$ iar $\bar{v} = v_0 \dfrac{E_2 A_2}{2E_1 A_1 + E_2 A_2}$ ceea ce coincide cu problema precedentă.

Pentru cazul particular: $l_1 = l_2 = l_3 = l$; $b = 2a$, $E_1 = E_2 = E_3 = E$, $A_1 = A_2 = A_3 = A$ şi deci $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dfrac{EA}{l}$ rezultă: $\varphi = v_0 \dfrac{1}{14a}$; $\bar{v} = v_0 \cdot \dfrac{3}{14}$.

Cu mărimile φ şi $\bar{v}$ astfel determinate se pot obţine în continuare expresiile eforturilor N_1, N_2, N_3.

PROBLEMA NR 14



1) Să se determine eforturile din cei trei tiranţi. Să se verifice direct pentru $b = a$.
2) Care este mărimea b astfel încît efortul din tirantul CC_1 să fie nul.

Rezolvare:

1) Cele două ecuaţii de echilibru vor fi:

$$\begin{cases} P \cdot b = N_2 \cdot a + N_3 \cdot 2a & (1) \\ N_1 + N_2 + N_3 = P & (2) \end{cases}$$

Ecuaţia geometrică conduce la:

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2} \quad (3)$$

Ecuaţiile fizice dau expresiile deformatelor celor trei tiranţi: $\Delta_1 = \dfrac{N_1 \cdot l}{EA}$; $\Delta_2 = \dfrac{N_2 \cdot l}{EA}$; $\Delta_3 = \dfrac{N_3 \cdot l}{EA}$ (4)

Eforturile în tiranţi vor fi: $N_1 = \dfrac{EA}{l}\Delta_1$; $N_2 = \dfrac{EA}{l}\Delta_2$; $N_3 = \dfrac{EA}{l}\Delta_3$.

Introducînd aceste expresii în ecuaţiile (1) şi (2) se obţine:

$$\begin{cases} \dfrac{EA}{l}\Delta_2 \cdot a + \dfrac{EA}{l}\Delta_3 \cdot 2a = P \cdot b & (5) \\ \dfrac{EA}{l}(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) = P & (6) \end{cases}$$

Introducînd apoi pe (3) în (6) rezultă:

$\dfrac{EA}{l}[3 \cdot \Delta_2] = P$, deci $\Delta_2 = \dfrac{P \cdot l}{3EA}$.

Din ecuaţia (5) rezultă apoi: $\dfrac{EA}{l}\Delta_3 \cdot 2a = Pb - \dfrac{EA}{l} a \cdot \dfrac{Pl}{3EA} = Pb - \dfrac{Pa}{3}$.

deci : $\Delta_3 = \dfrac{l}{2aEA}\left[P\cdot b - \dfrac{Pa}{3}\right] = \dfrac{Pl}{3EA}\left[\dfrac{3b-a}{2a}\right] =$

$= \dfrac{P\cdot l}{3EA}\left[\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{b}{a} - \dfrac{1}{2}\right]$

Folosind din nou ecuația (6) se obține :

$$\Delta_1 = \frac{Pl}{EA} - \Delta_2 - \Delta_3 = \frac{Pl}{EA} - \frac{Pl}{3EA} - \frac{Pl}{3EA}\left[\frac{3}{2}\frac{b}{a} - \frac{1}{2}\right]$$

deci : $\Delta_1 = \dfrac{P\cdot l}{3EA}\left[2 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{b}{a}\right]$; sau

$$\Delta_1 = \frac{Pl}{3EA}\cdot\frac{5a-3b}{2a}.$$

Eforturile în cei trei tiranți vor fi :

$$N_1 = \frac{EA}{l}\cdot\frac{P\cdot l}{3EA}\cdot\frac{5a-3b}{2a} = \frac{P}{3}\cdot\frac{5a-3b}{2a}$$

$$N_2 = \frac{EA}{l}\cdot\frac{P\cdot l}{3EA} = \frac{P}{3}.$$

$$N_3 = \frac{EA}{l}\cdot\frac{P\cdot l}{3EA}\left[\frac{3b-a}{2a}\right] = \frac{P}{3}\cdot\frac{3b-a}{2a}.$$

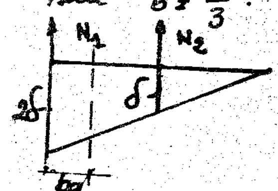
Cazuri particulare :

$b = a \quad \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \dfrac{P\cdot l}{3EA}$ și $N_1 = N_2 = N_3 = \dfrac{P}{3}$.

$b = 0 \quad \Delta_1 = \dfrac{P\cdot l}{3EA}\cdot\dfrac{5}{2}$; $\Delta_2 = \dfrac{P\cdot l}{3EA}$; $\Delta_3 = -\dfrac{P\cdot l}{6EA}$.

și $N_1 = \dfrac{P}{3}\cdot\dfrac{5}{2}$; $N_2 = \dfrac{P}{3}$; $N_3 = \dfrac{P}{6}$.

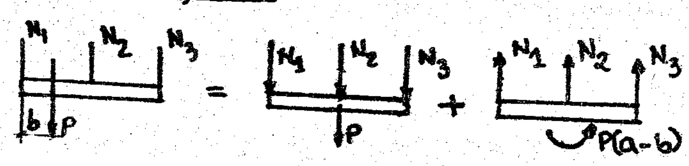
2) Pentru ca efortul din tirantul CC_1 să fie nul, deci $N_3 = \dfrac{P}{3}\cdot\dfrac{3b-a}{2a} = 0$, trebuie ca $3b - a = 0$, sau $b = \dfrac{a}{3}$. Dacă $N_3 = 0$, atunci $\Delta_3 = 0$, iar :



$$N_2 = \frac{EA}{l}\cdot\delta,\quad N_1 = \frac{EA}{l}\cdot 2\delta$$

$$\frac{N_2\cdot a}{N_1+N_2} = b_g;\quad b_g = \frac{\frac{EA}{l}\cdot\delta\cdot a}{\frac{EA}{l}\cdot 3\delta} = \frac{a}{3}$$

<u>Rezolvare rapidă :</u>



cazul (s) $N_1' = N_2' = N_3' = \dfrac{P}{3}$ datorită lui $I = \infty$

cazul (a) $N_2'' = 0$ datorită antisimetriei

$$N_1'' = N_3''$$

$$N_1''\cdot 2a = P(a-b)$$

Deci eforturile totale în cei trei tiranți sînt :

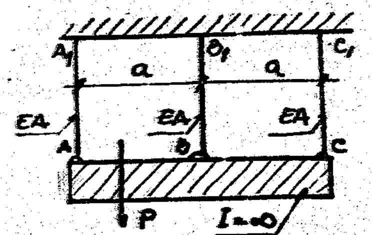
$$N_1 = N_1' + N_1'' = \frac{P}{3} + P\cdot\frac{a-b}{2a} = \frac{P}{3}\left[1 + 3\,\frac{a-b}{2a}\right] =$$

$$= \frac{P}{3}\cdot\frac{5a-3b}{2a}$$

$$N_2 = N_2' + N_2'' = \frac{P}{3}.$$

$$N_3 = N_3' + N_3'' = \frac{P}{3} - P\cdot\frac{a-b}{2a} = \frac{P}{3}\cdot\frac{3b-a}{2a}$$

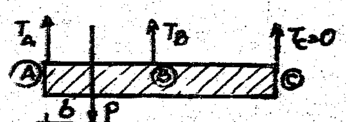
PROBLEMA NR 15

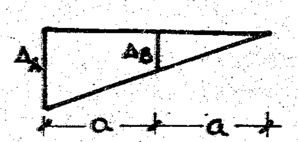


Se dă bara ABC din figură având rigiditate infinită, suspendată cu ajutorul a trei tiranți identici AA_1, BB_1, CC_1.

1. Să se determine distanța b pentru care efortul din tirantul CC_1 este nul.
2. Pentru $b=a$, $\ell = 6$ m, $A = 20\ cm^2$, $E = 2{,}1\cdot10^6\ daN/cm^2$ să se determine valoarea maximă a forței P pentru care sînt respectate condițiile: $\sigma_{max} \le 1600\ \frac{daN}{cm^2}$ (rezistența la tiranți), $\Delta_B \le 4$ mm (deplasarea verticală a punctului B)

Rezolvare:





1. Pentru aflarea celor 3 necunoscute T_A, T_B, b se folosesc cele trei aspecte: static, geometric și fizic.

- ecuația de moment față de punctul A

$$P\cdot b - T_B\cdot a = 0 \quad (a)$$

- ecuație de proiecție pe verticală:

$$T_A + T_B = P \quad (b)$$

- ecuația de echilibru a deformațiilor

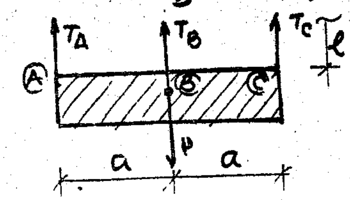
$$\Delta_A = 2\Delta_B \text{ sau } \frac{T_A\ell}{EA} = 2\frac{T_B\ell}{EA};\quad T_A = 2T_B \quad (c)$$

Introducînd relația (c) în ecuația (b) se obține:

$$3T_B = P;\quad T_B = \frac{P}{3} \ (d) \quad \text{și apoi } T_A = \frac{2P}{3}$$

Valoarea lui T_B introdusă în (a) conduce la aflarea valorii distanței b:

$$P b - \frac{Pa}{3} = 0, \quad \text{deci } b = \frac{a}{3}$$



2. Din motive de simetrie $T_A = T_C$ iar $\Delta_A = \Delta_B = \Delta_C$. Deoarece cele trei fire cu care este suspendată grinda sînt identice și din egalitatea celor 3 deplasări rezultă: $T_A = T_B = T_C$

Ecuația de proiecție pe verticală conduce la:

$$T_A + T_B + T_C = P \quad \text{și deci: } T_A = T_B = T_C = \frac{P}{3}$$

Folosind condiția $\Delta_B \le 4$ mm și introducînd valorile numerice se obține valoarea pentru forța P.

$$\Delta_B = \frac{T_B\cdot\ell}{E\cdot A} = \frac{P\cdot 6\cdot10^2}{2{,}1\cdot10^6\cdot 20} \le 0{,}4\ cm$$

Rezultă $P' \le \frac{3\cdot 2{,}1\cdot10^6\cdot 20\cdot 0{,}4}{6\cdot 10^2}$; $P' \le 84000$ daN $= 84$ tf

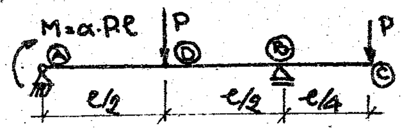
Folosind a doua condiție scrisă de exemplu pentru tirantul AA_1 se obține:

$$\frac{T_A}{A} \le 1600 \text{ sau } \frac{P''}{3\cdot 20} \le 1600;\quad P'' \le 96000 \text{ daN} = 96 \text{ tf}$$

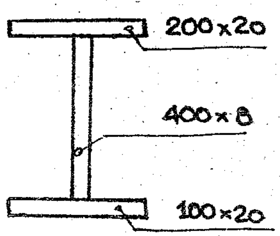
Valoarea maximă a forței P pentru care sînt respectate ambele condiții este: $P = \min(P'; P'') = 84$ tf.

PROBLEMA NR 16.

Se dă grinda din figură cu $EI =$ constant.

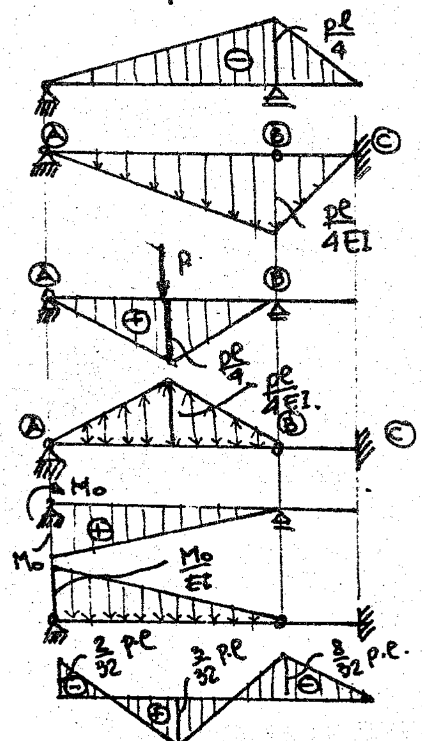


1. Să se determine coeficientul „α" astfel incât rotirea în A să fie nulă.
2. Luând $l=4m$ şi secţiunea din figură, să se determine P_{cap} pentru $\sigma_a = 2000 \frac{daN}{cm^2}$
3. Să se determine deplasarea verticală din secţiunea D. $(E = 2{,}1\cdot 10^6 \frac{daN}{cm^2})$



Rezolvare:

1. Folosind metoda grinzii conjugate şi suprapunând efectele se obţine succesiv:



- din încovoierea consolei

$$\varphi_A' = T_A^f = V_A^f = -\frac{1}{3}\frac{Pl}{4EI}\frac{l}{2} = -\frac{Pl^2}{24EI}$$

- din încovoierea deschiderii AB a grinzii

$$\varphi_A'' = V_A^f = \frac{Pl}{4EI}\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{16EI}$$

- din încovoiere cu M_0

$$\varphi_A''' = V_A^f = \frac{2}{3}\frac{M_0}{EI}\frac{l}{2} = \frac{1}{3}\alpha\frac{Pl^2}{EI}$$

Condiţia de la punctul 1) devine:

$$\varphi_A = -\frac{Pl^2}{24EI} + \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{\alpha Pl^2}{3EI} = 0$$

$$-\frac{1}{24} + \frac{1}{16} + \frac{\alpha}{3} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{16}$$

cu această valoare a coeficientului se determină diagrama finală de moment încovoietor

2. Se determină momentul de inerţie şi modulul de rezistenţă pentru secţiune:

$$y_G = -\frac{10\cdot 2\cdot 21}{40+32+20} = -4{,}57\,cm$$

$$I_z = \frac{20\cdot 2^3}{12} + 20\cdot 2\cdot 16{,}43^2 + \frac{0{,}8\cdot 40^3}{12} + 40\cdot 0{,}8\cdot 4{,}57^2 + \frac{10\cdot 2^3}{12} + 10\cdot 2\cdot 25{,}57^2 = 28829\,cm^4$$

$$W = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{28829}{26{,}57} = 1085\,cm^3$$

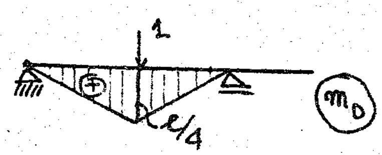
Momentul încovoietor capabil al secţiunii va fi:

$$M_{cap} = 2000\times 1085 = 2168500\,daN\,cm$$

Secţiunea cea mai solicitată este secţiunea B. Egalând momentul încovoietor capabil al secţiunii cu momentul încovoietor de pe grindă, din secţiunea B se obţine P_{cap}

$$\frac{8}{32}P\cdot l = 2168500\,,\qquad P_{capabil} = \frac{2168500\times 32}{8\cdot 400} = 216{,}85\,KN$$

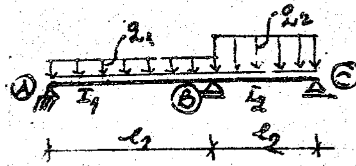
3. Pentru determinarea deplasării v_D se foloseşte metoda Maxwell-Mohr. Integrând pe părţi se obţine:



$$V_D = 2\cdot\frac{Pl}{4}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{l}{4EI} - l\frac{l}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{Pl}{4EI} - l\frac{l}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{Pl}{32EI} =$$

$$= \frac{1}{768}\frac{Pl^3}{EI} = \frac{1}{768}\cdot\frac{21685\,(400)^3}{2{,}1\cdot 10^6\cdot 28829} = 0{,}0298\,cm$$

PROBLEMA NR 17



Grinda ABC din figură este solicitată pe cele două deschideri de încărcări uniform distribuite q_1, respectiv q_2. Să se determine în ce raport trebuie să se afle valorile celor două sarcini astfel încît rotirea axei pe reazemul B să fie nulă.

Rezolvare:

Presupunînd că rotirea în B este nulă, se consideră porțiunea AB și se scrie ecuația axei deformate cu metoda parametrilor în origine:

$$(1)\quad \begin{cases} v(x) = \varphi_A \cdot x - \dfrac{T_A \cdot x^3}{6EI_1} + \dfrac{q_1 x^4}{24EI_1} \\ \varphi(x) = \varphi_A - \dfrac{T_A \cdot x^2}{2EI_1} + \dfrac{q_1 \cdot x^3}{6EI_1} \end{cases}$$

Pentru $x = l_1$ condițiile sînt: $v_B = 0$ (a)

$\varphi_B = 0$ (b)

Folosind expresiile pentru $v(x)$ și $\varphi(x)$, condițiile (a) și (b) se scriu:

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi_A \cdot l_1 - \dfrac{T_A \cdot l_1^3}{6EI_1} + \dfrac{q_1 \cdot l_1^4}{24 \cdot EI_1} = 0 \\ \varphi_A - \dfrac{T_A \cdot l_1^2}{2EI_1} + \dfrac{q_1 \cdot l_1^3}{6EI_1} = 0 \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul (2) se obțin soluțiile:

(3) $T_A = \frac{3}{8} q_1 l_1$; $\varphi_A = \dfrac{q_1 l_1^3}{48EI_1}$ și în acest caz:

$$M_B' = \frac{3}{8} q_1 l_1 \cdot l_1 - q_1 \cdot \frac{l_1^2}{2} = -\frac{q_1 l_1^2}{8}$$

Prin analogie se deduc:

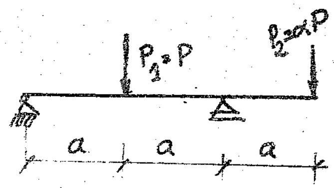
(3') $T_C = -\frac{3}{8} q_2 l_2$; $\varphi_C = \dfrac{q_2 l_2^3}{48EI_2}$ și în acest caz:

$$M_B'' = -\frac{q_2 \cdot l_2^2}{8}$$

Egalînd cele două momente de pe reazemul B se obține egalitatea: $q_1 l_1^2 = q_2 l_2^2$ și de aici se obține valoarea raportului celor două încărcări distribuite

$$\frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2.$$

PROBLEMA NR 18

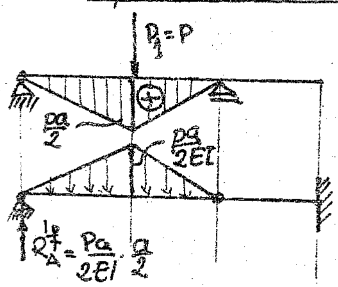


Pentru grinda din figură să se determine parametrul α astfel încît săgețile verticale din punctele B și D să fie egale ($EI =$ constant)'. Să se determine eforturile pentru această situație.

Rezolvare:

Se va folosi metoda grinzii conjugate și suprapunerea efectelor.

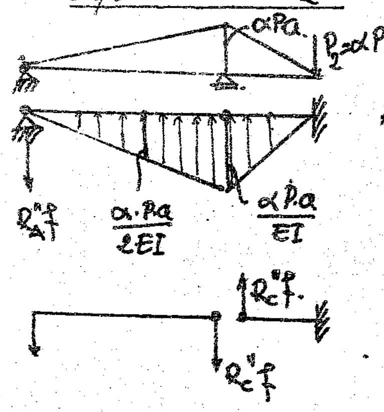
Efectul lui P_1



$$v_B' = M_B'^f = \frac{Pa^2}{4EI}a - \frac{Pa}{2EI}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3} = \frac{Pa^3}{6EI}.$$

$$v_D' = M_D^f = -\frac{Pa^2}{4EI}\cdot a = -\frac{Pa^3}{4EI}$$

Efectul lui P_2



$$R_A''^f = -\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha Pa}{EI}\cdot\frac{2a}{2} = -\frac{2\alpha}{3}\cdot\frac{Pa^2}{EI}.$$

$$R_C''^f = -\frac{2}{3}\frac{\alpha Pa}{EI}\cdot\frac{2a}{2} = -\frac{2\alpha}{3}\cdot\frac{Pa^2}{EI}$$

$$v_B'' = M_B''^f = -\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{Pa^2}{EI}\cdot a + \frac{\alpha Pa}{2EI}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3} = -\frac{\alpha}{4}\cdot\frac{Pa^3}{EI}$$

$$v_D'' = M_D''^f = \frac{2\alpha}{3}\cdot\frac{Pa^2}{EI}\cdot a + \frac{\alpha Pa}{EI}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot a = \frac{\alpha Pa^3}{EI}$$

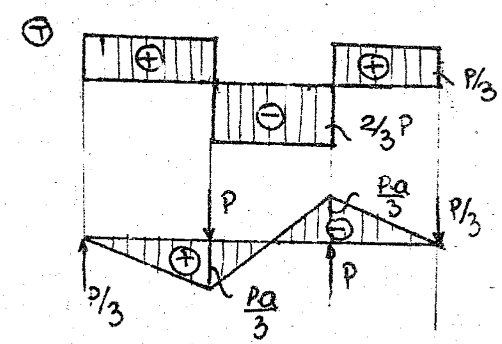
Suprapunînd efectele, adică adunînd deplasările din aceeași secțiune se obține:

$$v_B = v_B' + v_B'' = \frac{Pa^3}{6EI} - \frac{\alpha}{4}\frac{Pa^3}{EI}.$$

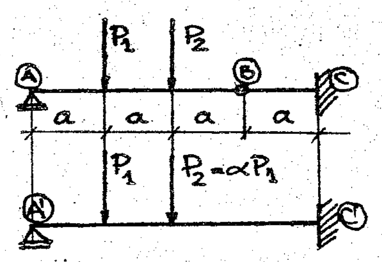
$$v_D = v_D' + v_D'' = -\frac{Pa^3}{4EI} + \frac{\alpha Pa^3}{EI}$$

Din condiția : $v_B = v_D$ rezultă :

$$\frac{5}{12}\cdot\frac{Pa^3}{EI} = \frac{5}{4}\alpha\cdot\frac{Pa^3}{EI} \quad ; \alpha = \frac{1}{3}$$



PROBLEMA NR 19



Pentru grinda ABC având dimensiunile și încărcările din figură se cere să se determine raportul $\frac{P_2}{P_1}=\alpha$ astfel încât diagramele de eforturi obținute să fie identice cu cele de pe grinda A'C'.
($EI = constant$)

Rezolvare:

Pornind de la grinda A'C' se scrie ecuația axei deformate cu ajutorul parametrilor în origine, intervalul $2a < x < 4a$ constituind intervalul de calcul.

$$(1)\begin{cases} v(x) = \varphi_0 x - \dfrac{T_0 x^3}{6EI} + \dfrac{P_1(x-a)^3}{6EI} + \dfrac{\alpha P_1 (x-2a)^3}{6EI} \\ \varphi(x) = \varphi_0 - \dfrac{T_0 x^2}{2EI} + \dfrac{P_1(x-a)^2}{2EI} + \dfrac{\alpha P_1 (x-2a)^2}{2EI} \end{cases}$$

Pentru determinarea celor doi parametri necunoscuți se folosesc condițiile:

pentru $x = 4a$ $\begin{cases} v_{C'} = 0 \\ \varphi_{C'} = 0 \end{cases}$

Introducând în relațiile (1) aceste condiții se obțin ecuațiile:

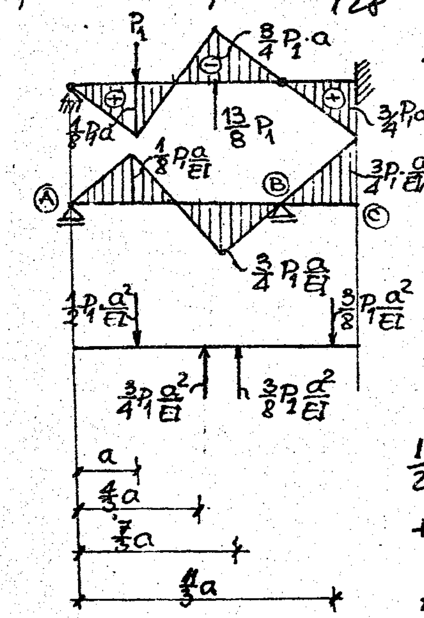
$$\begin{cases} \varphi_0\cdot 4a - \dfrac{64}{6} T_0 \dfrac{a^3}{6EI} + \dfrac{P_1\, 27a^3}{6EI} + \dfrac{\alpha P_1 \cdot 8a^3}{6EI} = 0 \\ \varphi_0 - \dfrac{16}{2} T_0 \dfrac{a^2}{EI} + \dfrac{P_1\, 9a^2}{2EI} + \dfrac{\alpha P_1\, 4a^2}{2EI} = 0 \end{cases}$$

Soluțiile sistemului sunt: $\varphi_0 = \frac{P_1 a^2}{16EI}(9+8\alpha)$;
$T_0 = \frac{P_1}{128}(81+40\alpha)$

Expresia momentului încovoietor pe intervalul $2a < x < 4a$ va fi: $M(x) = T_0\cdot x - P_1(x-a) - \alpha P_1(x-2a)$

Pentru $x = 3a$, momentul încovoietor trebuie să fie nul, pentru a avea aceeași diagramă pe grinzile ABC și A'C'

$M_B(x=3a) = T_0\cdot 3a - P_1\cdot 2a - \alpha P_1\cdot a = 0$, înlocuind apoi pe T_0 se obține $\frac{3P_1\cdot a}{128}(81+40\alpha) - 2aP_1 - \alpha a P_1 = 0$



sau $13+8\alpha=0$

de unde rezultă: $\alpha = -\frac{13}{8}$

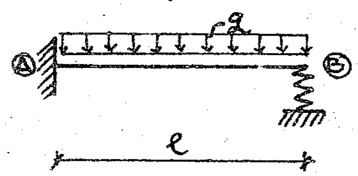
Pentru a verifica diagrama de moment încovoietor obținută se poate considera ca încărcarea fictivă pe o grindă conjugată.

Calculând momentul încovoietor față de punctul (A), se constată că aceasta este egal cu zero.

$$\frac{1}{2}P_1\frac{a^2}{EI}a - \frac{3}{4}P_1\frac{a^2}{EI}\cdot\frac{4}{3}a - \frac{3}{8}P_1\frac{a^2}{EI}\cdot\frac{7}{3}a + \frac{3}{8}P_1\frac{a^2}{EI}\frac{11}{3}a = 0$$

Acest lucru conduce la concluzia că $R_B^f = 0$, adică $\varphi_B^{rel} = 0$, deci grinda ABC se comportă ca grinda A'C'.

PROBLEMA NR 20



Se dă grinda AB având rezemarea elastică din B caracterizată de relația: $v_B = \frac{\alpha l^3}{EI} R_B$

Să se determine diagramele de eforturi și deplasarea v_B

Rezolvare:

Se scrie ecuația axei deformate cu ajutorul metodei parametrilor în origine:

$$v(x) = v_A + \varphi_A \cdot x - T_A \frac{x^3}{6EI} - M_A \frac{x^2}{2EI} + \frac{q x^4}{24EI}$$

, dar $v_A = 0$ și $\varphi_A = 0$,

deci:

$$v(x) = -\frac{T_A x^3}{6EI} - \frac{M_A x^2}{2EI} + q\frac{x^4}{24EI}$$

$$\varphi(x) = \frac{dv}{dx} = -\frac{T_A x^2}{2EI} - \frac{M_A x}{EI} + q\frac{x^3}{6EI}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{T_A x}{EI} - \frac{M_A}{EI} + q\frac{x^2}{2EI}$$

Cele două condiții pentru determinarea parametrilor necunoscuți T_A și M_A sînt:

pentru $x = l$

$$\begin{cases} v_B = \frac{\alpha l^3}{EI} \cdot R_B & (a) \\ M_B = -EI \frac{d^2v}{dx^2} = 0 & (b) \end{cases}$$

Dintr-o ecuație de proiecție pe verticală rezultă că:

$$R_A + R_B = q \cdot l, \quad \text{sau} \quad R_B = q \cdot l - R_A = q \cdot l - T_A$$

Condițiile (a) și (b) devin în acest caz:

$$\begin{cases} -\frac{T_A \cdot l^3}{6EI} - \frac{M_A \cdot l^2}{2EI} + q\frac{l^4}{24EI} = \frac{\alpha \cdot l^3}{EI}(q \cdot l - T_A) \\ T_A \cdot l + M_A - q\frac{l^2}{2} = 0 \end{cases}$$

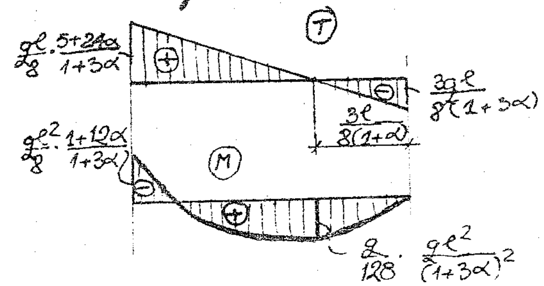
sau

$$\begin{cases} T_A \frac{l^3}{EI}\left(\alpha - \frac{1}{6}\right) - \frac{M_A l^2}{2EI} = \frac{q l^4}{EI}\left(\alpha - \frac{1}{24}\right) \\ T_A \cdot l + M_A = \frac{q l^2}{2} \end{cases}$$

Sistemul de mai sus are soluțiile:

$$T_A = \frac{q \cdot l}{8} \frac{5 + 24\alpha}{1 + 3\alpha} \quad ; \quad M_A = -\frac{q l^2}{8} \frac{1 + 12\alpha}{1 + 3\alpha}$$

Diagramele de eforturi sînt:



Deplasarea din punctul B este:

$$v_B = \frac{3}{8} \frac{\alpha q l^4}{(1 + 3\alpha) EI}$$

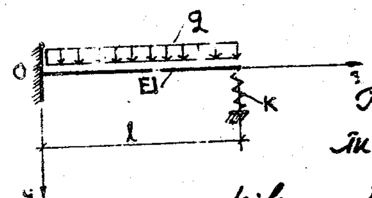
Cazuri particulare:

- rezemare rigidă în B : $\alpha = 0$
  rezultă : $M_A = -\frac{ql^2}{8}$; $T_A = \frac{5}{8} q \cdot l$; $R_B = -\frac{3ql}{8}$

- rezemare liberă în B : $\alpha = \infty$
  rezultă : $M_A = -\frac{ql^2}{2}$; $T_A = q \cdot l$; $v_B = \frac{q l^4}{8EI}$

PROBLEMA NR 21

Se dă consola din figură încărcată cu sarcina uniform distribuită q. Să se determine deplasarea din capătul consolei ţinînd seama şi de influenţa resortului pe care reazemă (constanta arcului este k)



Rezolvare:

Pentru determinarea deplasării în capătul consolei se va folosi metoda parametrilor în origine şi de aceea trebuie calculate valorile celor patru parametri în secţiunea 0. (v_0, φ_0, T_0, M_0)

Deci pentru $x=0 \rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ T_0 = q\cdot\ell - k v_\ell \\ M_0 = -\dfrac{q\ell^2}{2} + k v_\ell \cdot \ell \end{cases}$ Ţinînd seama de influenţa resortului

Expresia funcţiei deplasării $v(x)$ pe consola dată va fi:

$$v(x) = 0 + 0 - \frac{\left(-\frac{q\ell^2}{2} + k v_\ell \ell\right) x^2}{2EI} - \frac{(q\ell - k v_\ell)\, x^3}{6EI} + \frac{q x^4}{24EI}$$

Deplasarea din capătul consolei va fi:

pentru $x = \ell \rightarrow v(x=\ell) = v_\ell$

$$v_\ell = \frac{9q\ell^4 - 8k v_\ell \cdot \ell^3}{24EI} = \frac{3q\ell^4 - 8V_\ell \cdot \ell^3}{24EI} \quad (\alpha)$$

$$v_\ell EI + \frac{1}{3} k v_\ell \cdot \ell^3 = \frac{1}{3} q \ell^4$$

$$v_\ell \left(EI + \frac{1}{3} k\ell^3\right) = \frac{1}{8} q\ell^4$$

Rezultă valoarea deplasării v_ℓ în capătul consolei, ţinînd seama de influenţa resortului:

$$v_\ell = \frac{q\ell^4}{8\left(EI + \frac{1}{3}k\ell^3\right)} = \frac{q\ell^4}{8EI} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\frac{k\ell^3}{EI}}$$

Comentarii: Reacţiunea din resort este $V_\ell = k v_\ell$ (β)

Pentru $k=0$ (resort perfect flexibil) se obţine $V_\ell = 0$, iar deplasarea în capătul consolei va fi:

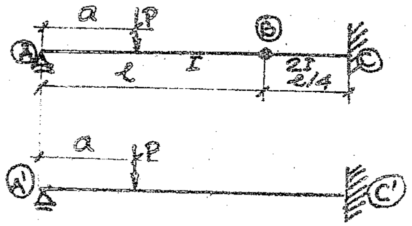
$$v_\ell = \frac{q\ell^4}{8EI}$$

Pentru $k = \infty$ (reazem perfect rigid), deplasarea v_ℓ în capătul consolei va fi zero ($v_\ell = 0$), iar reacţiunea V_ℓ nu se poate deduce din relaţia (β) datorită nedeterminării, ci se foloseşte relaţia (α) în care $k v_\ell = V_\ell$

$$v_\ell = \frac{3q\ell^4 - 8V_\ell \cdot \ell^3}{24EI} = 0$$

Rezultă valoarea: $V_\ell = \frac{3}{8} q \cdot \ell$

PROBLEMA NR 22

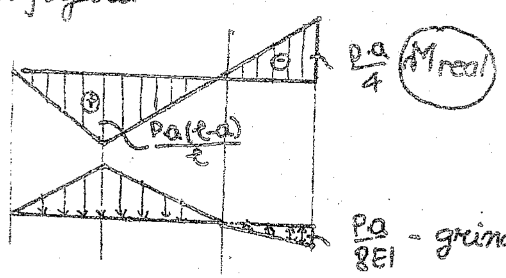


Pentru grinda ABC din figură să se determine distanța a astfel încît comportarea grinzii să fie identică cu a grinzii A'C'.

Rezolvare:

Pentru ca grinzile ABC și A'C' să se comporte identic, trebuie ca rotirea relativă în B, de pe grinda ABC, să fie nulă.

Folosind metoda grinzii conjugate, aceasta revine la a pune condiția ca saltul de forță tăietoare fictivă în zona punctului B să fie nul. Dar saltul de forță tăietoare reprezintă tocmai reacțiunea fictivă în reazemul grinzii conjugate.



Trebuie ca $V_B^f = 0$

$$V_B^f = \frac{1}{l}\left[\frac{P\cdot a(l-a)}{l\,EI}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}a + \frac{P\cdot a(l-a)}{l\,EI}\cdot\frac{(l-a)}{2}\left[l-\frac{2}{3}(l-a)\right] - \frac{Pa}{8EI}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(l+\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{4}\right)\right] = 0.$$

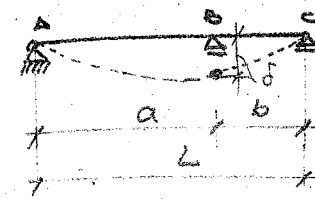
După operații elementare se ajunge la ecuația:

$$a\left[114\,l^2 - 128\,a^2\right] = 0$$, cu soluțiile:

$$a_1 = 0\;;\quad a_2 = \sqrt{\frac{114}{128}}\,l\;;\quad a_3 = -\sqrt{\frac{114}{128}}\,l$$

Rădăcina a_3 se exclude neavînd sens fizic. Rădăcina $a_1 = 0$ este o soluție banală, sistemul nefiind încărcat de fapt. Rădăcina $a_2 = \sqrt{\frac{114}{128}}\cdot l$ este soluția nebanală.

PROBLEMA NR 23



Reazemul B al unei grinzi cu două deschideri suferă o tasare δ. Grinda are moment de inerție constant pe toată lungimea L. Să se determine diagramele de eforturi pe grindă, apărute ca urmare a cădării reazemului B.

Rezolvare:

Folosind metoda parametrilor în origine se poate scrie pentru $0 < x < a$: $v(x) = \varphi_A \cdot x - \frac{T_A\cdot x^3}{6EI}$ (1), iar pentru intervalul

$$0 < x < L:\; v(x) = \varphi_A x - \frac{T_A\cdot x^3}{6EI} - \frac{R_B(x-a)^3}{6EI} \quad (2)$$

Pentru determinarea celor trei parametrii necunoscuți φ_A; T_A, R_B sînt:

$$v_B = \delta \quad (3)$$
$$v_C = 0$$

La cele două condiții geometrice (3) se adaugă o ecuație globală de echilibru, ecuația de moment față de C

$$R_A\cdot L + R_B\cdot b = 0 \quad (4)$$

Din ecuația (4) se obține: $R_B = -R_A\frac{L}{b} = -T_A\frac{L}{b}$

Ecuațiile (3) se scriu astfel:

$$\varphi_A\cdot a - \frac{T_A\cdot a^4}{6EI} = \delta \quad (5)$$

și

$$\varphi_A\cdot L - \frac{T_A L^3}{6EI} + \frac{b^3}{6EI}\cdot R_A\frac{L}{b} = 0$$

Ecuațiile (5) se mai pot scrie:

$$\varphi_A\cdot a - \frac{T_A\cdot a^3}{6EI} = \delta$$

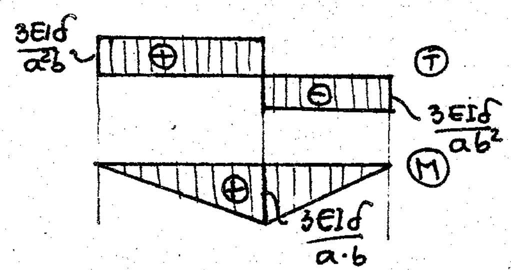
și

$$\varphi_A \cdot L - \frac{T_A \cdot L^3}{6EI}\left(1-\frac{b^2}{L^2}\right)=0 \qquad (5')$$

Rezolvind sistemul (5') se obţin soluţiile:

$$R_A = T_A = \frac{3EI\cdot\delta}{a^2 b};\ \varphi_A = \frac{3}{2}\frac{\delta}{a} \text{ şi apoi } R_B = -\frac{3EI\delta L}{a^2 b^2};\ R_C = \frac{3EI\delta}{a b^2} \qquad (6)$$

Diagramele de eforturi provenite din încărcarea grinzii cu cedarea reazemului B sint:



Pentru cazul particular: $a=b=\frac{L}{2}$ rezultă:

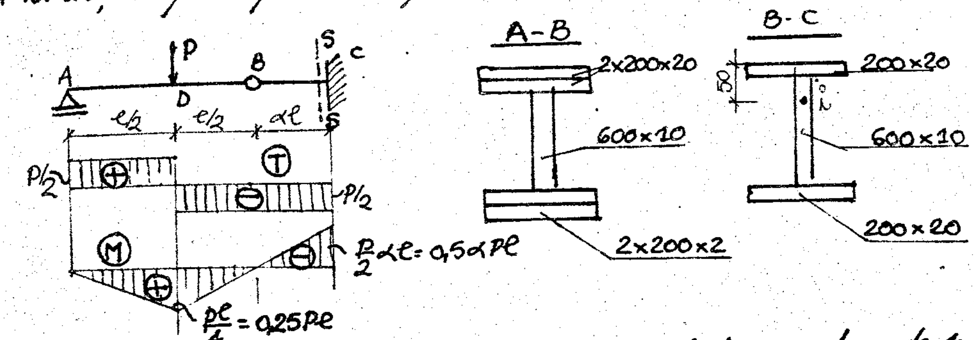
$$T_A = R_A = R_C = \frac{3EI\delta}{a^3}\ ;\ R_B = -\frac{3EI\delta\cdot L}{a^4}$$

$$\varphi_A = \frac{3}{2}\frac{\delta}{a}\ ;\ M_B = \frac{3EI\cdot\delta}{a^2}$$

PROBLEMA NR 24

Pentru grinda din figură să se determine:

1. parametrul α astfel încît σ_{max} în intervalul AB să fie egal cu σ_{max} în intervalul BC.
2. Pentru $\alpha = 0,25$ şi $l = 12,0\,m$ să se determine P astfel încît să fie satisfăcute condiţiile: $\sigma_{max} \le 1600\,daN/cm^2$ şi $f_D \le \frac{l}{400}$
3. Pentru datele de la punctul 2, să se determine σ_1, σ_2 şi direcţiile principale în punctul i din secţiunea S-S



Rezolvare:

1. Pentru scrierea egalităţii celor două eforturi unitare de pe cele două intervale ale grinzii trebuie determinate caracteristicile geometrice ale grinzii în cimp (A-B) şi pe consolă (B-C)

$$I_{cimp} = \frac{60^3}{12} + 2\cdot2\cdot20\cdot31^2 + 2\cdot2\cdot20\cdot33^2 = 182\,000\ cm^4$$

$$I_{consolă} = \frac{60^3}{12} + 2\cdot2\cdot20\cdot31^2 = 94\,880\ cm^4 = 0,521\cdot I_{cimp}$$

$$W_{cimp} = \frac{182000}{34} = 5353\ cm^3\ ;\ W_{consolă} = \frac{94880}{32} = 2965\ cm^3$$

$$\sigma^{cimp}_{max} = \frac{M_{cimp}}{W_{cimp}} = \frac{0,25\cdot P\cdot l}{5353} = \sigma^{consolă}_{max} = \frac{M_{cons.}}{W_{cons.}} = \frac{0,5\cdot\alpha\cdot P\cdot l}{2965}$$

deci rezultă parametrul $\alpha = \frac{W_{cons.}}{W_{cimp}}\cdot\frac{0,25}{0,5} = 0,277$

2. Deoarece valoarea dată pentru $\alpha = 0{,}25$ este mai mică decît cea determinată la punctul 1, condiția de rezistență se va pune în cîmp. Momentul încovoietor capabil pentru intervalul AB al grinzii (cîmp) va fi $M_{cap}^{cimp} = W_{cimp}\,\sigma_a = 5353\cdot 1600 = 85{,}64\,tf\cdot m$

Deci condiția de rezistență va fi:

$85{,}64 \geq 0{,}25\,P\,12$, rezultă $P \leq 28{,}547\,tf = 285{,}47\,KN$

Pentru a determina valoarea forței P din condiția de deformabilitate a grinzii, se scrie expresia deplasării grinzii în secțiunea D:

$$f_D = \frac{P\ell^3}{48EI_{cimp}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{P}{2}\left(\frac{\ell}{4}\right)^3}{3E\,0{,}521\cdot I_{cimp}} \leq \frac{\ell}{400}$$

$$\frac{P\ell^3}{EI_{cimp}}\left(\frac{1}{48}+\frac{1}{400}\right) \leq \frac{\ell}{400}, \quad P \leq \frac{EI_{cimp}}{\ell^2}\cdot\frac{1}{400\cdot 0{,}0233}$$

$$P \leq \frac{2{,}1\times10^6\cdot 182000}{(1200)^2\cdot 400\cdot 0{,}0233}; \quad P \leq 28478\,daN$$

deci rezultă $P \leq 28{,}478\,tf = 284{,}78\,KN$

Deci valoarea forței P care să respecte cele două condiții impuse va fi: $P \leq 284{,}78\,KN$

3. Componentele tensorului de tensiune în punctul i al secțiunii S-S vor fi:

$$\sigma_x^i = \frac{M_c}{I_{consola}}\cdot y_i = \frac{-0{,}5\cdot 0{,}25\cdot 28{,}478\cdot 12\cdot 10^5}{94880}(-27) = 1215\,\frac{daN}{cm^2}$$

$$\tau_{xy}^i = \frac{T_c\cdot S_i}{b_i\cdot I_{cons.}} = \frac{-14{,}239\,(20\cdot 2\cdot 31+3\cdot 1\cdot 285)\cdot 10^3}{1\cdot 94880} = -198\,\frac{daN}{cm^2}$$

$$T_\sigma^i = \begin{pmatrix} 1215 & -198 \\ -198 & 0 \end{pmatrix}$$

Tensiunile principale se determină analitic cu formula:

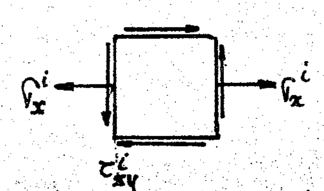
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x^i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy(i)}^2} = \frac{1215}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1215}{2}\right)^2 + 198^2}$$

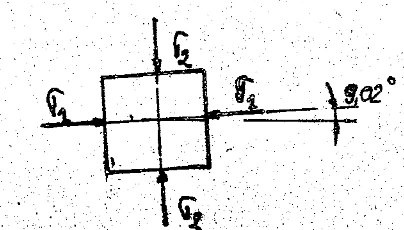
rezultă $\sigma_1 = 1246\,daN/cm^2$; $\sigma_2 = -31\,daN/cm^2$

Direcțiile principale de tensiune sînt:

$$tg\,2\alpha = \frac{2\tau_{xy}^i}{\sigma_x^i} = \frac{-2\cdot 198}{1215} = -0{,}325; \quad 2\alpha = -18{,}05^\circ$$

$$\alpha = \alpha_1 = -9{,}02^\circ; \quad \alpha + \frac{\pi}{2} = \alpha_2 = 80{,}975^\circ$$

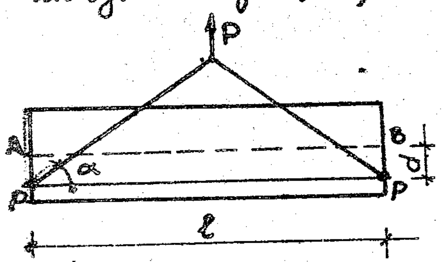


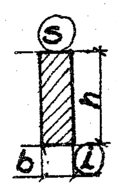


PROBLEMA NR 25

O grindă cu secțiunea dreptunghiulară $(b\times h)$, de lungime l, este ridicată de o macara ca în figură. Greutatea grinzii pe unitatea de lungime este q ($q = b\cdot h\cdot 1\cdot\gamma$, γ fiind greutatea specifică a materialului.) Se cere să se determine:

1. Care sînt mărimile „d" și „α" care trebuie adoptate astfel încît nici în punctele de rezemare nici la mijloc să nu existe întinderi în material, în secțiunile transversale normale.
2. Pentru mărimile determinate la punctul 1 să se traseze diagramele de moment încovoietor și forță axială pe grinda AB.
3. Să se determine diagramele σ în secțiunea de margine a grinzii și în cea de la mijloc.





1. Pentru ca în secțiunea transversală de capăt să nu apară întinderi, trebuie ca punctele de prindere P, deci distanța d să se găsească cel puțin la limita sîmburelui central al secțiunii, deci $d \le \frac{h}{6}$ și se adoptă valoarea: $d = \frac{h}{6}$.

În secțiunea din mijloc a grinzii, descompunînd efortul din tirant în cele două componente și făcînd apoi echilibrul pe direcția forței P obținem:

$2N_t\sin\alpha = P$; $N_t = \frac{P}{2\sin\alpha}$; $H = N_t\cos\alpha = \frac{P}{2tg\alpha} = \frac{q\cdot l}{2tg\alpha}$

Forța axială în grinda AB va fi: $N = -H = -\frac{q\cdot l}{2tg\alpha}$

momentul încovoietor: $M = \frac{q\cdot l^2}{8} - \frac{q\cdot l}{2tg\alpha}\cdot\frac{h}{6}$

Pentru a nu avea întinderi în secțiunea transversală de mijloc a grinzii, se pune condiția ca în fibra inferioară a secțiunii $\sigma_i = 0$

$$\sigma_i = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = -\frac{q\cdot l}{2tg\alpha}\cdot\frac{1}{b\cdot h} + \frac{q\cdot l^2}{8\cdot\frac{bh^2}{6}} - \frac{q\cdot l\cdot h}{12tg\alpha}\cdot\frac{6}{bh^2}$$

$$\sigma_i = -\frac{q\cdot l}{bh\,tg\alpha}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3q\cdot l^2}{4hb} = 0\ ;\quad \frac{3q\cdot l^2}{4bh^2} = \frac{q\cdot l}{bh\,tg\alpha}$$

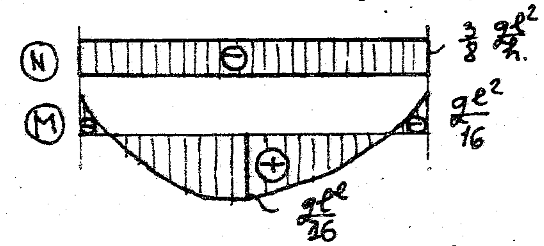
rezultă: $tg\alpha = \frac{4}{3}\frac{h}{l}$, deci mărimea unghiului α depinde numai de geometria grinzii.

2. Pentru trasarea diagramelor de eforturi N și M se determină valorile în secțiunile de margine și de mijloc ale grinzii

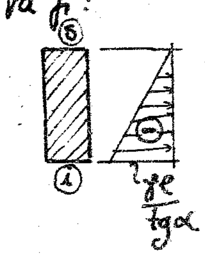
La margine: $M = -H\cdot\frac{h}{6} = -\frac{q\cdot l}{2tg\alpha}\cdot\frac{h}{6} = -\frac{q\cdot l^2}{16}$

$$N = -\frac{q\cdot l}{2\cdot\frac{4}{3}\frac{h}{l}} = -\frac{3}{8}\cdot\frac{q\cdot l^2}{h}$$

La mijloc: $M = \frac{q\cdot l^2}{8} - \frac{q\cdot l^2}{16} = \frac{q\cdot l^2}{16}$; $N = -\frac{3}{8}\frac{q\cdot l^2}{h}$



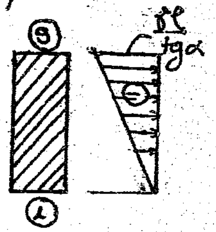
3. Efortul unitar σ în secțiunea de margine a grinzii va fi:



$$\sigma_S = -\frac{N}{A} + \frac{M}{W} = -\frac{3}{8}\frac{q l^2}{h}\cdot\frac{1}{b\cdot h} + \frac{q\cdot l^2}{16}\cdot\frac{6}{bh^2} = 0$$

$$\sigma_i = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = -\frac{3}{8}\frac{q\cdot l^2}{h}\cdot\frac{1}{bh} - \frac{q l^2}{16}\cdot\frac{6}{bh^2} = -\frac{3}{4}\frac{q\cdot l^2}{bh^2}$$

Efortul unitar σ în secțiunea de mijloc a grinzii va fi:

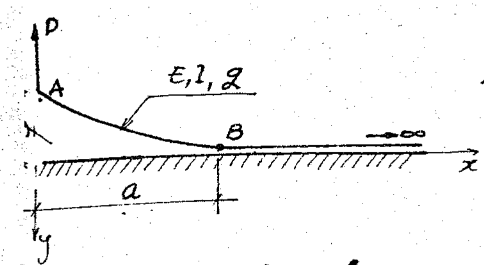


$$\sigma_s = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = -\frac{3}{8}\frac{q\cdot l^2}{h}\cdot\frac{1}{6\cdot h} - \frac{q\cdot l^2}{16}\frac{6}{6h^2} = -\frac{3}{4}\frac{q\cdot l^2}{6\cdot h^2}$$

$$\sigma_i = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = -\frac{3}{8}\frac{q\cdot l^2}{h}\cdot\frac{1}{6\cdot h} + \frac{q\cdot l^2}{16}\cdot\frac{6}{6h^2} = 0$$

Se observă că $|\sigma_{max}| = \frac{3}{4}\frac{l^2}{6h^2}\gamma\cdot 6h = \frac{\gamma l}{tg\alpha}$

PROBLEMA NR 26



O bară ABC, foarte lungă, de secțiune constantă, având greutatea q/ml, este așezată pe o suprafață perfect orizontală. La un capăt al barei se aplică o forță verticală P. Se cere:

1. Ce forță trebuie să se aplice în capătul barei pentru a se obține o ridicare a capătului f (impusă) $= f_0$
2. Care este în acest caz distanța de desprindere a?
3. Care sînt diagramele de eforturi în bară, în acest caz?

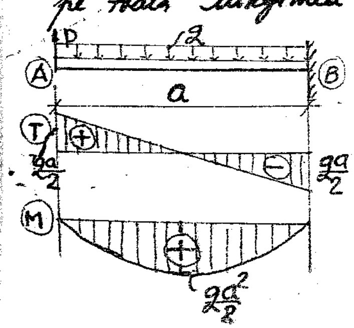
Rezolvare:

1. Pe zona BC, bara fiind așezată orizontal pe teren, axa ei este rectilinie, deci $\rho=\infty$ sau $\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} = 0$, deci $M=0$

De asemenea, pe această zonă BC, $v=0$ și $\frac{dv}{dx}=0$ inclusiv în punctul B, deci acest punct contează ca o încastrare.
Momentul încovoietor în B, dat de forța P și de greutatea proprie a grinzii de pe zona ridicată va fi:

$$M_B = P\cdot a - q\frac{a^2}{2} = 0 \quad \text{și deci} \quad P = q\cdot\frac{a}{2}$$

2. Porțiunea AB a grinzii poate fi considerată ca o consolă cu lungimea a și încărcată cu forța concentrată P în capăt și cu sarcina uniform distribuită q, greutatea proprie a grinzii pe toată lungimea.



Săgeata în vîrful consolei va fi:

$$f_A = f_A^q + f_A^P = \frac{1}{8}\frac{qa^4}{EI} - \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{qa^4}{8EI} - \frac{qa^4}{6EI}$$

$$f_A = -\frac{qa^4}{24EI} = -f_0$$

Rezultă $a = \sqrt[4]{\frac{24EI \cdot f_0}{q}}$ și deci expresia forței P va fi

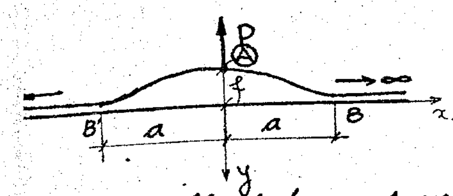
$$P = \frac{q}{2}\sqrt[4]{\frac{24EI \cdot f_0}{q}}$$

Dacă se dă forța P și se cer a și f, atunci:

$$a = \frac{2P}{q} \; ; \; f = -\frac{1}{24}\frac{qa^4}{EI} = -\frac{1}{24}\frac{q}{EI}\frac{16 \cdot P^4}{q^4} = -\frac{2}{3}\frac{P^4}{EIq^3}$$

Se poate observa că lungimea de desprindere, a, a grinzii, de teren, nu depinde de I, în schimb săgeata grinzii depinde de rigiditatea ei.

PROBLEMA NR 27

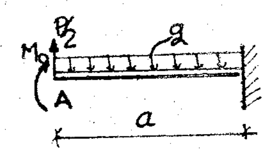


O bară foarte lungă (de exemplu o conductă), este așezată pe o suprafață orizontală. Greutatea barei pe unitatea de lungime este q. Bara este ridicată dintr-un punct A cu forța P. Se cere:

1. Pe ce distanță $2a$, se desprinde bara de teren?
2. Ce săgeată f se realizează în A?
3. Care sînt diagramele de eforturi?

Rezolvare:

1. Pe zonele pe care bara este așezată pe teren, raza de curbură $\rho = \infty$, deci $\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} = 0$, sau $M=0$ inclusiv în B și B'. De asemenea $v=0$ pe zonele BC și B'C' și $\frac{dv}{dx} = 0$, asta înseamnă că B și B' se pot considera drept puncte de încastrare pentru bară. Ținînd seama de simetria încărcării, bara echivalentă pentru această problemă va fi cea din figură.



Pentru determinarea distanței a, se vor pune condițiile ca: $M_B=0$ și $\varphi_A=0$.

$$\begin{cases} M_B=0 \; ; & \frac{P}{2}\cdot a + M_0 - q\frac{a^2}{2} = 0 \\ \varphi_A = 0 \; ; & \frac{Pa^2}{4EI} + \frac{M_0 a}{EI} - \frac{qa^3}{6EI} = 0 \end{cases}$$

Din rezolvarea sistemului se obțin cele două necunoscute

$$M_0 = -\frac{3}{32}\frac{P^2}{q} \quad \text{și} \quad a = \frac{3}{4}\frac{P}{q}$$

Deci lungimea zonei pe care grinda se desprinde de teren va fi: $2a = \frac{3}{2}\frac{P}{q}$

2. Pentru a determina săgeata în A, se folosește metoda parametrilor în origine.

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2EI} - \frac{T_0 x^3}{6EI} + \frac{\ell\, x^4}{24EI}$$

Valorile parametrilor cunoscuți sînt: $\varphi_0 = \varphi_A = 0;\ T_0 = \frac{P}{2}$;

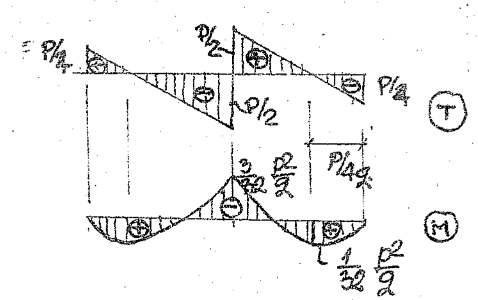
$M_0 = -\frac{3}{32}\frac{P^2}{\ell}$

Pentru determinarea celui de-al patrulea parametru $v_0 = ?$, se pune condiția ca în B deplasarea să fie nulă.

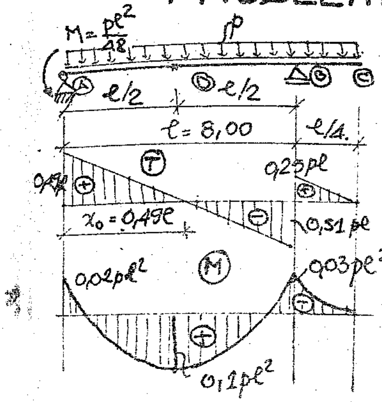
$$v_B = 0 = v_0 + \frac{3}{32}\frac{P}{\ell}\frac{1}{2EI}\cdot\frac{9}{16}\frac{P^2}{\ell^2} - \frac{P}{12EI}\cdot\frac{27}{64}\frac{P^3}{\ell^3} + \frac{\ell}{24EI}\frac{81\,P^4}{256\,\ell^4} = 0$$

$$v_0 + \frac{27}{24\cdot 256}\frac{P^4}{\ell^3 EI} = 0 \text{ și rezultă: } v_0 = -\frac{27}{24\cdot 256}\frac{P^4}{\ell^3 EI}$$

Diagramele de eforturi pe întreaga structură vor fi:



PROBLEMA NR 28

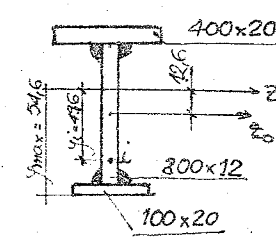


Pentru grinda din figură se cere

1. Să se determine sarcina capabilă știind că $\sigma_a = 1600\ daN/cm^2$ și apoi fluxul tensiunilor tangențiale.

2. Tensiunile și direcțiile principale, analitic și grafic în secțiunea B_{st} și punctul i, pentru o forță $p = 150\ KN/m$

3. Să se calculeze rotirea secțiunii A și deplasarea verticală a secțiunii D.



Rezolvare:

1. Caracteristicile geometrice ale secțiunii sînt:

$$y_G = \frac{-40\cdot 2\cdot 41 + 10\cdot 2\cdot 41}{40\cdot 2 + 80\cdot 1{,}2 + 10\cdot 2} = -\frac{2460}{196} = -12{,}6\ cm$$

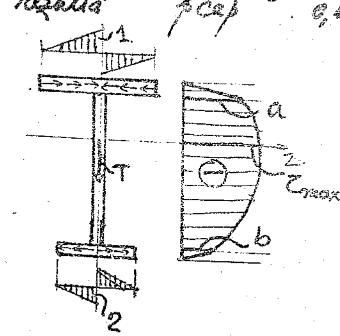
$$I_z = \frac{40\cdot 2^3}{12} + 40\cdot 2\cdot 28{,}4^2 + \frac{80^3\cdot 1{,}2}{12} + 80\cdot 1{,}2\cdot 12{,}6^2 + \frac{40\cdot 2^3}{12} + 40\cdot 2\cdot 53{,}6^2$$

$$I_z = 360856\ cm^4$$

Pentru determinarea sarcinii capabile, se pune condiția ca în secțiunea cea mai solicitată $\sigma_{max} \le \sigma_a$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_z}\cdot y_{max} = \frac{0{,}1\cdot p_{cap}\cdot 8^2\cdot 10^5}{360856}\cdot 54{,}6 = 1600$$

rezultă $$p_{cap} = \frac{1600\cdot 360856}{0{,}1\cdot 8^2\cdot 10^5\cdot 54{,}6} = 16{,}5\ tf/m = 165\ kN/m$$



$$\tau_{xy}^{max} = \frac{0{,}51\cdot 16{,}5\cdot 8\cdot 10^3(10\cdot 2\cdot 53{,}6 + 52{,}6\cdot 1{,}2\cdot 26{,}3)}{1{,}2\cdot 306856}$$

$$\tau_{max} = 499{,}48\ daN/cm^2$$

$$\tau_{xy}^{a} = \frac{0{,}51\cdot 16{,}5\cdot 8\cdot 10^3(40\cdot 2\cdot 28{,}4)}{1{,}2\cdot 306856} = 415{,}37\ daN/cm^2$$

$$\tau_{xy}^{b} = \frac{0{,}51\cdot 16{,}5\cdot 8\cdot 10^3(10\cdot 2\cdot 53{,}6)}{1{,}2\cdot 306856} = 195{,}98\ daN/cm^2$$

$$\tau_{xz}^1 = \frac{0,51\cdot 16,5\cdot 8\cdot 10^3(20\cdot 2\cdot 28,4)}{2\cdot 306856} = 124,61 \ daN/cm^2$$

$$\tau_{xz}^2 = \frac{0,51\cdot 16,5\cdot 8\cdot 10^3(5\cdot 2\cdot 53,6)}{2\cdot 306856} = 58,79 \ daN/cm^2$$

2. Pentru determinarea tensiunilor și direcțiilor principale în secțiunea B_{st} și punctul i pe secțiune, se determină componentele tensorului tensiunilor din i, pentru $p = 150\ kN/m$

$$\sigma_{x(i)} = \frac{M_B}{I_z}\, y_i = \frac{-0,03\cdot 15\cdot 8^2\cdot 10^5}{306856}\cdot 49,6 = -465,5\ daN/cm^2$$

$$\tau_{xy(i)} = \frac{T_{Bst}\cdot S_i}{b_i\cdot I_z} = \frac{-0,51\cdot 15\cdot 8\cdot 10^3(10\cdot 2\cdot 53,6+3\cdot 1,2\cdot 51,1)}{1,2\cdot 306856} = -205\ daN/cm^2$$

$$T_\sigma^i = \begin{pmatrix} -465,5 & -205 \\ -205 & 0 \end{pmatrix}$$

Tensiunile și direcțiile principale se determină analitic cu formulele:

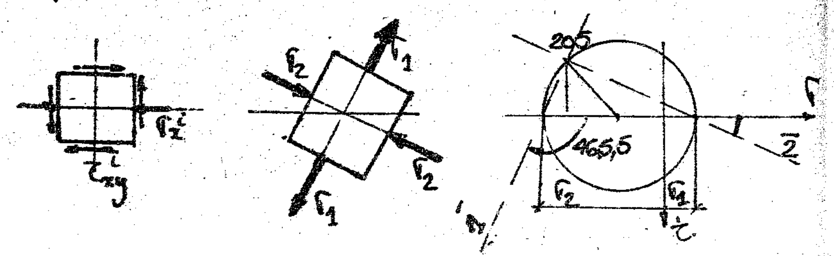
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{x(i)}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x(i)}}{2}\right)^2 + \tau_{xy(i)}^2} = -\frac{465,5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{465,5}{2}\right)^2 + 205^2}$$

$\sigma_1 = 77,4\ daN/cm^2$; $\sigma_2 = -542,91\ daN/cm^2$

$$tg\, 2\alpha = \frac{2\tau_{xy(i)}}{\sigma_{x(i)}} = \frac{2\cdot 205}{465,5} = 0,88\ ;\ 2\alpha = 41^\circ 20'$$

$\alpha = 20^\circ 40' = \alpha_2$; $\alpha + \frac{\pi}{2} = 110^\circ 40' = \alpha_1$

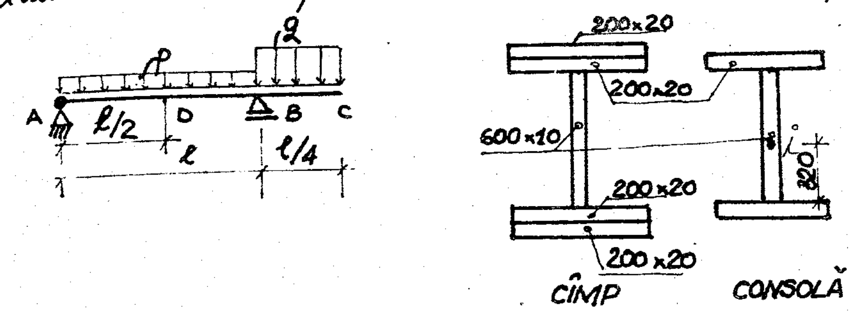
Determinarea grafică a tensiunilor și direcțiilor principale se face cu cercul lui Mohr.



PROBLEMA NR 29

Pentru grinda din figură să se determine:

1. Încărcarea $q_1 = f(p_1)$, astfel încît deplasările verticale din secțiunile C și D să fie egale ($v_C = v_D$)
2. Încărcarea $q_2 = f(p_2)$, astfel încît $|\sigma_{max}|$ consolă $= \sigma_{max}$ cîmp
3. Pentru $l = 12,0$ m și $p_3 = 54$ tf/m să se determine limitele între care poate să varieze q astfel încît $\sigma_{max} < \sigma_a$



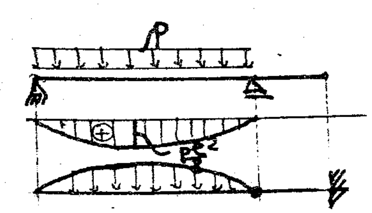
Rezolvare:

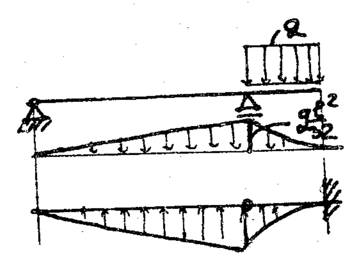
Caracteristicile geometrice ale secțiunilor din cîmp și de pe consolă sînt.

$I_{cîmp} = 182000\ cm^4 = I_0$; $W_{cîmp} = W_c = 5353\ cm^3$

$I_{consolă} = 94880\ cm^4 = 0,521\, I_0$; $W_{consolă} = W_r = 2875$

1. Pentru determinarea deplasărilor totale din secțiunile C și D se calculează separat deplasările din aceste secțiuni date de cele 2 încărcări distribuite, cu metoda grinzilor conjugate.





Din încărcarea distribuită p, deplasările din C și D sunt:

$$v_C^p = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{pl^2}{8}\cdot\frac{l}{EI_0}\cdot\frac{l}{4} = -\frac{1}{96}\frac{pl^4}{EI_0}$$

$$v_D^p = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI_0}$$

Din încărcarea distribuită q, deplasările din C și D sunt:

$$v_C^q = \frac{1}{96}\frac{ql^3}{EI_0}\cdot\frac{l}{4} + \frac{1}{3}\frac{ql^2}{32EI_0}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{l}{4} = \frac{1,3599}{384}\frac{ql^4}{EI_0}$$

$$v_D^q = -\frac{1}{192}\cdot\frac{ql^3}{EI_0}\cdot\frac{l}{2} + \frac{q\cdot l^2}{64EI_0}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{2} = -\frac{5}{6\cdot 384}\frac{ql^4}{EI_0}$$

Deplasarea totală în secțiunea D este:

$$v_D = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI_0} - \frac{5}{6\cdot 384}\frac{q\cdot l^4}{EI_0} = \frac{1}{384EI_0}\left(5-\frac{5}{6}\frac{q}{p}\right)$$

Deplasarea totală în secțiunea C este:

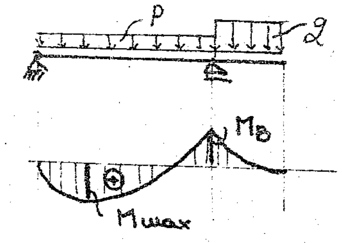
$$v_C = -\frac{1}{96}\frac{pl^4}{EI_0} + \frac{1,3599}{384}\frac{ql^4}{EI_0} = \frac{pl^4}{384EI_0}\left(1,3599\frac{q}{p}-4\right)$$

Egalînd cele două deplasări se obține încărcarea q:

$$v_C = v_D \;;\; \frac{pl^4}{EI_0}\cdot\frac{1}{384}\left(5-\frac{5}{6}\frac{q}{p}\right) = \frac{pl^4}{384EI_0}\left(1,3599\frac{q}{p}-4\right)$$

$$p_1 = p \;;\; q_1 = 4,103\,p_1$$

2.



Momentele încovoietoare din câmp și de pe reazem vor fi:

$$M_B = -q\frac{l}{4}\cdot\frac{l}{8} = -\frac{ql^2}{32}.$$

$$T_0 = \frac{pl}{2} - \frac{ql}{32}$$

$$M_{max} = \frac{T_0^2}{2p} = \frac{1}{2p}\left[\frac{pl}{2}-\frac{ql}{32}\right]^2 = \frac{1}{2p}\left[\frac{p^2l^2}{4}+\frac{q^2l^2}{32^2}-\frac{1}{32}pql^2\right]$$

Efortul unitar maxim din secțiunea cea mai solicitată din câmp va fi:

$$\sigma_{max}^{câmp} = \frac{1}{2pW_c}\left[\frac{p^2l^2}{4}+\frac{q^2l^2}{32^2}-\frac{1}{32}pql^2\right]$$

Efortul unitar maxim din secțiunea B, de pe reazem va fi:

$$|\sigma_{reazem}| = \frac{ql^2}{32W_r}$$

Se egalează cele două eforturi unitare:

$$\frac{1}{2pW_c}\left[\frac{p^2l^2}{4}+\frac{q^2l^2}{32^2}-\frac{1}{32}pql^2\right] = \frac{ql^2}{32W_r}$$

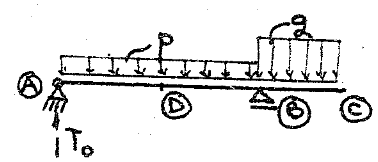
sau: $\frac{1}{2pW_c}\left[\frac{p}{4q}+\frac{q}{32^2p}-\frac{1}{32}\right] = 1$; și se notează $\frac{p}{q}=x$

$$\frac{x}{4}+\frac{1}{32^2x}-\frac{1}{32} = \frac{W_c}{16W_r} = 0,11284$$

$$\frac{x}{4}+\frac{1}{1024x} = 0,14409 \;;\; 256x^2 - 147,55x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{147,55\pm\sqrt{21770-1024}}{512} = \begin{cases} x_1 = 0,5695 \\ x_2 = 0,006875 \end{cases}$$

Pentru $x = 0,5695$



$$T_0 = \frac{1}{2}0,5695ql - \frac{ql^2}{32l} = 0,2535ql$$

$$|M_B| = \frac{ql^2}{32} = 0,03525ql^2$$

$$M_{max} = \frac{T_0^2}{2p} = \frac{(0,2535ql)^2}{2\cdot 0,5695q} = 0,0564ql^2$$

Raportul celor două momente încovoietoare este:

$\frac{M_B}{M_{câmp}} = 1,815 = \frac{W_r}{W_c}$, deci valoarea raportului momentelor încovoietoare este egal cu raportul modulelor de rezistență corespunzătoare. De aceea se acceptă soluția:

$$x = \frac{p}{q} = 0,5695 \;;\; q = 1,756p$$

Pentru $x = 0,006875$, se obține valoarea forței tăietoare:

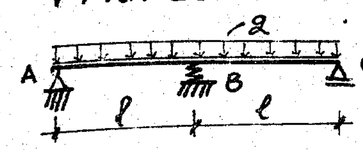
$$T_0 = \frac{pl}{2} - \frac{q\cdot l}{32} = \frac{0,006875q\cdot l}{2} - \frac{ql}{32} = -0,0278ql < 0$$

deci soluția $x = 0,006875$ nu ne convine.

3. Pentru determinarea unei limite de variație pentru q se egalează momentul maxim din cîmp al grinzii cu momentul capabil al secțiunii din cîmp.

$$M_{max} = \left(\frac{p\cdot l}{2} - \frac{q\cdot l}{32}\right)^2 \cdot \frac{1}{2p} = W_c \cdot \sigma_a$$

PROBLEMA NR 30



Grinda ABC din figură avînd o rezemare elastică în punctul central B, este încărcată cu forța uniform distribuită q. Reazemul din B este caracterizat de relația: $v_B = \frac{\alpha \cdot l^3}{EI} \cdot R_B$.

a) Să se reprezinte diagramele de eforturi și să se găsească deplasarea v_B în funcție de parametrul α, discutîndu-se apoi expresiile pentru două valori ale lui α (0 și ∞).

b) Să se determine valoarea lui α astfel încît $M_B = 0$.

Rezolvare:

a) Utilizînd metoda parametrilor în origine se scriu expresiile deplasării și rotirii pe intervalul AB.

$$v(x) = \varphi_A x - T_A \cdot \frac{x^3}{6EI} + \frac{q x^4}{24EI} \qquad (1)$$

$$\varphi(x) = \varphi_A - T_A \cdot \frac{x^2}{2EI} + \frac{q x^3}{6EI}$$

Cei doi parametri în origine necunoscuți, împreună cu reacțiunea R_B se vor determina folosind condițiile:

(a) $\varphi_B = 0$ (din motive de simetrie)

(b) $v_B = \frac{\alpha l^3}{EI} R_B$.

și ecuația de echilibru între reacțiuni și încărcarea grinzii.

Știind că: $R_C = R_A = T_A$, se poate scrie:

$2T_A + R_B = 2 \cdot q \cdot l$, sau $R_B = 2(ql - T_A)$.

În aceste condiții ecuațiile (1) devin:

$$\varphi_A - T_A \cdot \frac{l^2}{2EI} + \frac{ql^3}{6EI} = 0$$

$$\varphi_A \cdot l - T_A \cdot \frac{l^3}{6EI} + \frac{ql^4}{24EI} = \frac{\alpha l^3}{EI} \cdot 2(ql - T_A) \qquad (2)$$

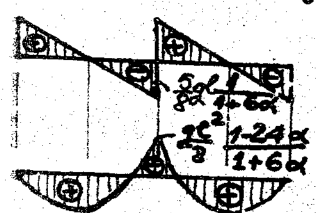
sau : $\varphi_A - T_A \cdot \frac{l^2}{2EI} + \frac{ql^3}{6EI} = 0 \qquad (3)$

$$\varphi_A \cdot l - T_A \frac{l^3}{6EI}(1-12\alpha) + \frac{ql^4}{24EI}(1-48\alpha) = 0$$

Soluţiile sistemului (3) sînt:

$$T_A = \frac{3}{8} q \cdot l \cdot \frac{1+16\alpha}{1+6\alpha} \; ; \; \varphi_A = \frac{ql^3}{48EI} \cdot \frac{1+96\alpha}{1+6\alpha}.$$

În acest caz diagramele de eforturi sînt:



Deplasarea verticală a punctului B se poate obţine folosind relaţia (6):

$$v_B = \frac{\alpha l^3}{EI} \cdot \frac{10}{8} q l \frac{1}{1+6\alpha} = \frac{5}{4} \frac{\alpha}{1+6\alpha} \cdot \frac{ql^4}{EI}.$$

Aceeaşi expresie se poate obţine folosind relaţia (1) în care $x = l$.

Cazuri particulare.

— Reazem perfect rigid în B , $\alpha = 0$.

$T_A = \frac{3}{8} q \cdot l$; $R_B = \frac{5}{4} q \cdot l$; $M_B = -\frac{ql^2}{8}$;

$v_B = 0$.

— Reazem perfect elastic în B , $\alpha = \infty$ (reazemul lipseşte.)

$T_A = \frac{3}{8} q l \cdot \frac{16}{6} = q \cdot l$; $R_B = 0$.

$$v_B = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{ql^4}{EI} = \frac{5}{24} \cdot \frac{ql^4}{EI} = \frac{5}{384} q \cdot \frac{(2l)^4}{EI}$$

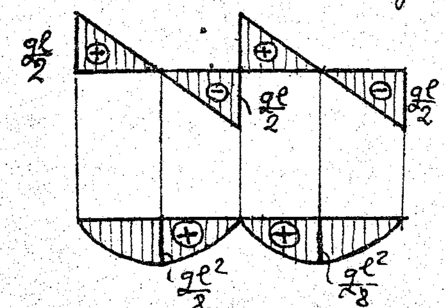
$$M_B = -\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{(-24)}{(6)} = \frac{ql^2}{2} = \frac{q(2l)^2}{8}$$

b) Expresia momentului încovoietor din punctul B este:

$$M_B = -\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1-24\alpha}{1+6\alpha}$$

Pentru ca $M_B = 0$, trebuie ca $1 - 24\alpha = 0$, deci $\alpha = \frac{1}{24}$.

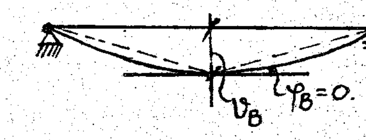
În acest caz diagramele de eforturi sînt:



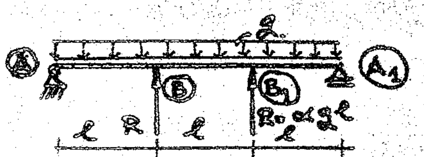
Deplasarea din punctul B va fi:

$$v_B = \frac{5}{120} \frac{ql^4}{EI}.$$

Deformata grinzii în aceste condiţii va arăta ca în figură:

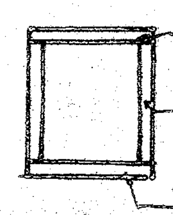


PROBLEMA NR 31

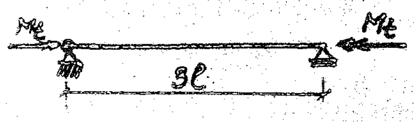


Se dă grinda din figură cu forța uniform distribuită q și forțele concentrate $R=\alpha q l$, având momentul de inerție constant.

1. Să se determine valoarea coeficientului α astfel încît deplasările în punctele B și B_1 să fie nule.



2. Cu valoarea lui α astfel determinată, luînd $l = 10.0$ m, considerînd secțiunea grinzii cea din figură, să se determine valoarea încărcării q, astfel încît să fie respectată condiția $\sigma_{max} \le 1000$ daN/cm².

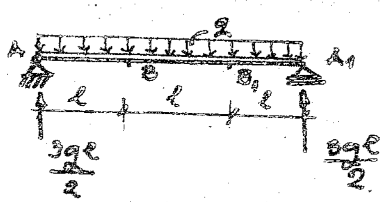


3. Ce moment de torsiune se poate adăuga pe grindă, astfel încît suprapunîndu-l cu starea de eforturi de la punctul 2 să fie respectată condiția $\sigma^{total}_{max} \le 800$ daN/cm².

Rezolvare:

1. Pentru aflarea deplasărilor din B și B_1 se folosește metoda parametrilor în origine și suprapunerea efectelor. Din încărcarea uniform distribuită q:

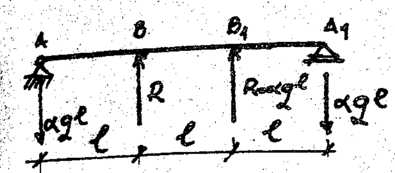
$$v_B^q = \varphi_A^q \cdot l - \frac{3ql \cdot l^3}{2 \cdot 6EI} + \frac{q l^4}{24EI}$$



$$v_{A_1} = \varphi_A^q \cdot 3l - \frac{3ql \cdot 27l^3}{12EI} + \frac{81 \cdot q l^4}{24EI}$$

$$\varphi_A^q = \frac{27ql^3}{12EI} - \frac{27ql^3}{24EI} = \frac{27ql^3}{24EI}$$

Din încărcarea cu forțele R



$$v_B^R = \varphi_A^R \cdot l + \frac{\alpha q l \cdot l^3}{6EI}$$

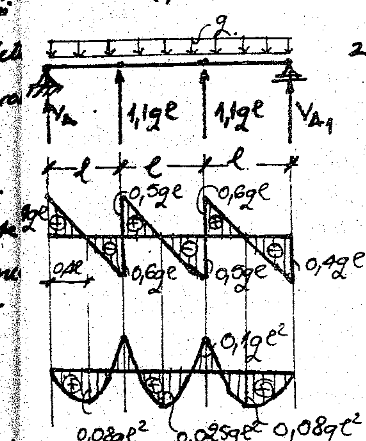
$$v_{A_1} = \varphi_A^R \cdot 3l + \frac{\alpha q l \cdot 27l^3}{6EI} - \frac{\alpha q l \, 8l^3}{6EI} - \frac{\alpha q l \cdot l^3}{6EI} = 0$$

$$\varphi_A^R = -\frac{9\alpha q l^3}{6EI} + \frac{3\alpha q l^3}{6EI} = -\frac{\alpha q l^3}{EI}$$

Pentru ca deplasările în punctele B și B_1 să fie nule se pune condiția ca cele două deplasări calculate în B din forța distribuită q și din forțele R, să fie egale.

$$\frac{27ql^4}{24EI} - \frac{3ql^4}{12EI} + \frac{ql^4}{24EI} = -\left(-\frac{\alpha q l^4}{EI} + \frac{\alpha q l^4}{6EI}\right)$$

sau: $\frac{27-6+1}{24} = \frac{5\alpha}{6}$, rezultă: $\alpha = \frac{22}{20} = 1{,}1$.



2. Pentru aflarea valorii q_{cap} se determină diagramele de eforturi și se stabilește secțiunea cea mai solicitată de pe grindă.

$$V_A = V_{A_1} = \frac{3ql}{2} - 1{,}1ql = 0{,}4ql$$

$$M_{max_1} = 0{,}4ql \cdot 0{,}4l - 0{,}4ql \cdot 0{,}2l = 0{,}08ql^2$$

$$M_B = M_{B_1} = 0{,}4ql \cdot l - ql \cdot 0{,}5l = -0{,}1ql^2$$

$$M_{max\,2} = 0{,}4ql \cdot 1{,}5l - 1{,}5ql \cdot 0{,}75l + 1{,}1ql \cdot 0{,}5l = 0{,}025ql^2$$

Secțiunile cele mai solicitate ale grinzii sînt B și B_1, unde valoarea momentului încovoietor este maximă. Momentul de inerție al secțiunii grinzii va fi:

$$I_z = \frac{86^3 \cdot 40}{12} - \frac{80^3 \cdot 37{,}6}{12} = 515\,919{,}4 \text{ cm}^4$$

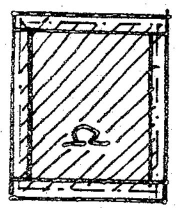
Efortul unitar maxim în secțiunea B este:

$$\sigma_{max} = \frac{M_B}{I_z} \cdot y_{max} \leq 1000$$

deci:

$$\frac{0,1 \cdot q \cdot 10^2 \cdot 10^5}{515919,4} \cdot 43 = 1000 \ ; \ q_{cap} = 11,99 \ tf/m$$

3. Pentru aflarea momentului de torsiune capabil,



se suprapune efectul acestuia de pe secțiune cu efectul forței tăietoare. Efortul unitar tangențial maxim trebuie să respecte condiția:

$$\tau_{max}^{total} \leq 800 \ daN/cm^2.$$

$$\tau^{Mt} = \frac{M_t}{2 \Omega \, t_{min}} \ ; \ \Omega = 83 \times 38,8 = 3220,4 \ cm^4$$

$$\tau^{Mt} = \frac{M^t_{cap} \cdot 10^5}{2 \cdot 3220,4 \cdot 1,2} = 12,94 \, M^t \ \frac{daN}{cm^2}$$

$$\tau^{T_2} = \frac{T^2 \cdot S_{max}}{b \cdot I_z} = \frac{0,6 \cdot 11,99 \cdot 10^3 \cdot 10(40 \cdot 3 \cdot 41,5 + 2 \cdot 40 \cdot 1,2 \cdot 20)}{2 \cdot 1,2 \cdot 515919,4} =$$

$$= 400,89 \ daN/cm^2$$

Adunând cele două eforturi unitare se obține: $12,94 \, M^t + 400,89 \leq 800$

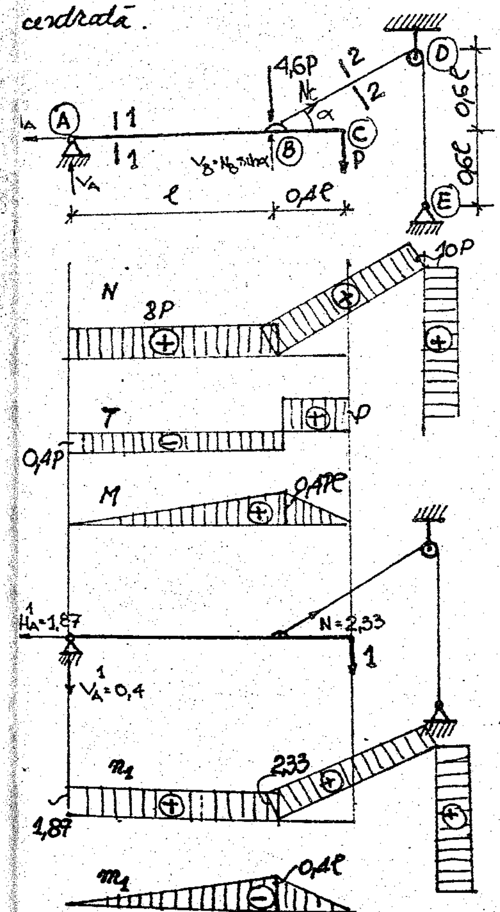
Rezultă $M^t_{cap} \leq 30,84 \ tf \cdot m$

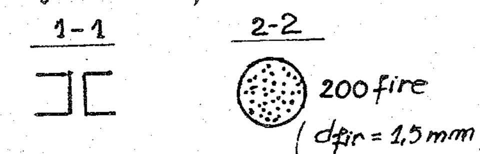
PROBLEMA NR 32

O grindă ABC este articulată în B și prinsă de un cablu BDF care trece printr-un scripete fără frecare, ca în figură. Se cer:

1. Diagramele de eforturi în grindă și în cablu.
2. Știind că $\sigma_{a\,cablu} = 5000 \ daN/cm^2$, $E_{cablu} = 1,6 \cdot 10^6 daN/cm^2$, $\sigma_{a\,grindă} = 1600 \ daN/cm^2$ și $E_{grindă} = 2,1 \cdot 10^6 \ daN/cm^2$, să se determine $P_{adm.}$, astfel încât $\sigma_{ef.cablu} = \sigma_{a\,cablu}$.
3. Să se dimensioneze grinda ABC din 2 profile U (1-1).
4. Să se determine deplasarea verticală a punctului C.

NOTĂ: Transmiterea forței din firul BD la grindă se presupune centrată.





Se dau: $l = 1,00 m$ și $tg \alpha = \frac{3}{4}$.

Rezolvare:

① Pentru determinarea diagramelor de eforturi trebuie determinate reacțiunile în reazemele A și B.

$\Sigma M_A = 0 ; 4,6P \cdot l + P \cdot 1,4 l - N_B \sin\alpha \cdot l = 0$

$6P - N_C \cdot \frac{3}{5} = 0 \quad N_C = 10P.$

$\Sigma M_B = 0 ; - V_A \cdot l + P \cdot 0,4 l = 0$

$V_A = 0,4 P \ daN.$

$\Sigma X = 0 ; H_A - N \cos\alpha = 0$

$H_A = 10 P \cos\alpha = 10 P \cdot \frac{4}{5} = 8P.$

Folosind valorile reacțiunilor, se determină diagramele de eforturi N, T, M^z pe lungimea grinzii și diagrama N pe lungimea cablului.

② Pentru a determina forța capabilă P, trebuie determinat efortul unitar σ_x în cablu. Pentru aceasta aria secțiunii cablului este : $A_{cablu} = 200 \cdot \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4}$, unde 200 este numărul de fire ale cablului, iar 0,15 este diametrul în centimetri al unui fir.

$$\sigma_x^{cablu} = \frac{N}{A_{cablu}} = \frac{10\,P}{200 \cdot \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4}} = \sigma_a^{cablu}$$

Deci s-a egalat efortul unitar efectiv în cablu cu rezistența admisibilă a cablului,

$$\frac{10 \cdot P}{200 \cdot \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4}} = 5000$$

Rezultă : $P_{cap} = 1766,25\ daN = 1,76625\ tf$.

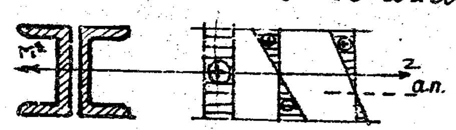
③ Pentru dimensionare, din condiția de rezistență a grinzii ABC se determină modulul de rezistență necesar pentru cele două profile U, neglijînd deocamdată efectul forței axiale :

$$W_{z\,nec}^{2U} = 2\,W_{z\,nec}^{1U} = \frac{M_z}{\sigma_a} = \frac{0,4 \cdot 1766,25 \cdot 1 \cdot 10^2}{1600} = 44,16\ cm^3$$

$$W_{z\,nec}^{1U} = \frac{44,16}{2} = 22,08\ cm^3$$

Din tabelul cu profile laminate se aleg două profile U18 cu modulul de rezistență mai mare decît 110 pentru a ține seama și de prezența forței axiale, pentru care : $A_1 = 28\ cm^2$; $I_{z_1} = 1350\ cm^4$; $W_{z_1} = 150\ cm^3$.

Pentru verificarea secțiunii alese, ținem seama că ea este solicitată la încovoiere simplă cu forță axială



$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z};$$

$$\sigma_{max} = \frac{8 \cdot 1766,25}{2 \cdot 28} + \frac{2 \cdot 1766,25 \cdot 10^2}{2 \cdot 150} = 1429,8\ daN/cm^2 < \sigma_a.$$

④ Pentru calculul deplasării verticale a secțiunii C, se încarcă grinda în C cu o forță unitară și se trasează diagramele unitare n_1 și m_1 (ca în figură). Folosind regula de integrare Vereseaghin între diagramele N cu n_1 și M^z cu m_1, se obține deplasarea secțiunii C ca sumă a deplasărilor datorate celor două eforturi N și M.

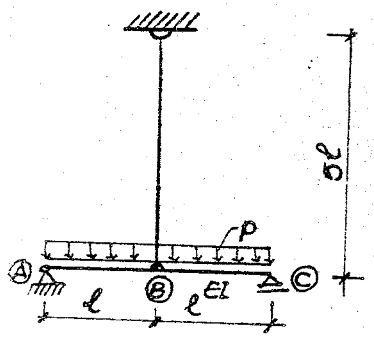
$$v_c = \frac{1}{E_{gr.} \cdot A_{gr.}} \left(8 \cdot 1,76625 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^2\ 1,87 \right) +$$

$$+ \frac{1}{E_c \cdot A_c} \left(10 \cdot 1,76625 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 2,33 \cdot 2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{E_{gr} \cdot I_{gr}} \left(0,4 \cdot 1,76625 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot \frac{4}{2} \cdot 10^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 \cdot 4 \cdot 10^2 + 0,4 \cdot 1,76625 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,4 \cdot 4 \cdot 10^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 \cdot 4 \cdot 10^2 \right) = \frac{105,69 \cdot 10^5}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 56} +$$

$$+ \frac{329,229 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^6\ 200 \cdot \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4}} + \frac{8,440 \cdot 10^9}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 1350} = 7,40\ cm.$$

PROBLEMA NR 33



Grinda ABC din figură, cu moment de inerție constant, este suspendată la mijlocul deschiderii în punctul B prin tirantul BD și este solicitată de o forță uniform distribuită p.

Să se determine raportul $\alpha = \frac{Al^2}{I}$ astfel încât momentul încovoietor în grindă în punctul B să fie nul.

Rezolvare:

Se va folosi metoda parametrilor în origine. Pentru zona AB se scrie:

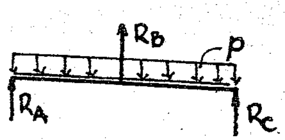
$$v(x) = \varphi_0 x - \frac{T_0 x^3}{6EI} + \frac{p x^4}{24EI} \qquad (1)$$

Pentru determinarea parametrilor φ_0 și T_0 se folosesc condițiile:

pentru $x = l$:
$$v_B = \frac{R_B \cdot 5l}{EA} \qquad (a)$$
$$\varphi_B = \frac{dv}{dx} = 0 \qquad (b)$$

Condițiile (a) și (b) se scriu astfel:

$$\varphi_0 l - \frac{T_0 l^3}{6EI} + \frac{pl^4}{24EI} = \frac{R_B \cdot 5l}{EA}$$
$$\varphi_0 - \frac{T_0 l^2}{2EI} + \frac{pl^3}{6EI} = 0 \qquad (2)$$



Din motive de simetrie, $R_A = R_C$, iar ecuația globală de echilibru conduce la: $2R_A + R_B = 2pl$, de unde

$$R_B = 2(pl - R_A) = 2(pl - T_0).$$

Prima ecuație din (2) se scrie:

$$\varphi_0 l - \frac{T_0 l^3}{6EI} + \frac{pl^4}{24EI} = \frac{5l}{EA} 2(pl - T_0)$$

sau:
$$\varphi_0 l - \frac{T_0 l^3}{6EI}\left(1 - \frac{60I}{Al^2}\right) + \frac{pl^4}{24EI}\left(1 - \frac{240I}{Al^2}\right) = 0 \qquad (a')$$

A doua ecuație din (2) multiplicată cu $(-l)$ conduce la:

$$-\varphi_0 l + \frac{T_0 l^3}{2EI} - \frac{pl^4}{6EI} = 0 \qquad (b')$$

Rezolvând sistemul de ecuații (a')(b') rezultă:

$$T_0 = \frac{pl}{8}\,\frac{3\alpha+240}{\alpha+30}\ ; \quad \varphi_0 = \frac{pl^3}{48EI}\cdot\frac{\alpha+480}{\alpha+30} \qquad (3)$$

Momentul încovoietor din punctul B va fi:

$$M_B = T_0 l - \frac{pl^2}{2} = -\frac{pl^2}{8}\cdot\frac{\alpha-120}{\alpha+30}$$

Luând pentru parametrul α câteva valori particulare se pot face verificări:

Fie $\alpha = 0$; ($A = 0$, tirantul nu există)

$$T_0 = pl = \frac{p(2l)}{2}\ ; \quad \varphi_0 = \frac{pl^3}{3EI} = \frac{p\cdot(2l)^3}{24EI}\ ; \quad M_B = \frac{pl^2}{2} = \frac{p(2l)^2}{8}$$

Fie $\alpha = \infty$; ($A = \infty$; tirantul infinit rigid echivalent cu un reazem).

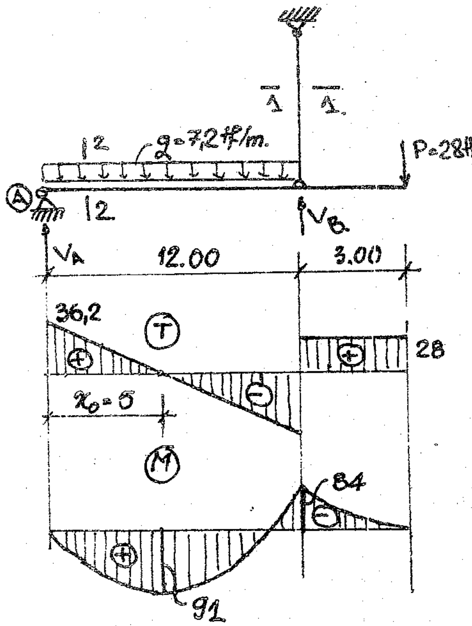
$$T_0 = \frac{3}{8}pl\ ; \quad \varphi_0 = \frac{pl^3}{48EI}\ ; \quad M_B = -\frac{pl^2}{8}$$

Toate aceste mărimi se pot verifica prin calcule simple, directe.

Pentru a răspunde la punctul doi al problemei trebuie ca: $M_B = -\frac{pl^2}{8}\cdot\frac{\alpha-120}{\alpha+30} = 0$,

deci $\alpha - 120 = 0$; rezultă: $\alpha = 120$.

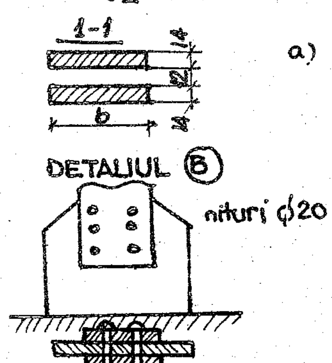
PROBLEMA NR. 34

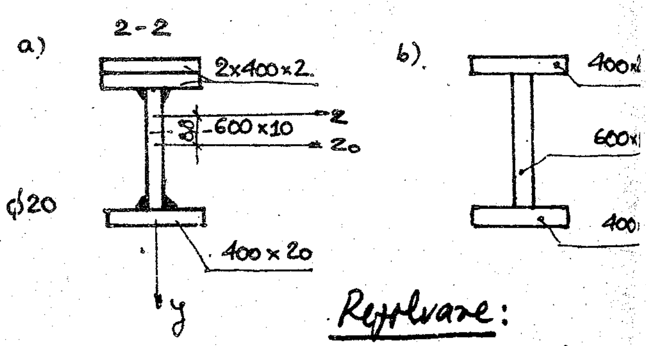


Pentru structura din figură se cere:

1. Să se dimensioneze tirantul ținând seama de îmbinările nituite și să se verifice condiția ca $v_B' \leq 0{,}40$ cm
2. Să se verifice grinda ABD la încovoiere și să se arate pe ce zone ale grinzii se poate renunța la cea de a doua platbandă a tălpii superioare
3. Să se calculeze deplasarea verticală a punctului D (cu momentul de inerție I_z^a)

(Se dau: $\sigma_a = 1600\,\frac{daN}{cm^2}$; $E = 2{,}1\cdot10^6$





Rezolvare:

1. Pentru dimensionarea tirantului BC, trebuie determinat efortul axial care-l solicită, acesta fiind reacțiunea din B de pe grinda ABD.

$$\Sigma M_A = 0;\quad 7{,}2\cdot12\cdot6 + 28\cdot15 - V_B\cdot12 = 0 \rightarrow V_B = 78{,}2\,tf$$

$$A_{nec} = \frac{V_B}{\sigma_a} = \frac{78{,}2\cdot10^3}{1600} = 48{,}875\,cm^2$$

Ținând seama că tirantul se execută din două platbande și că îmbinat cu nituri, aria necesară pentru o platbandă va fi: $A_{nec} = \frac{48{,}875}{2} + 2\cdot2\cdot1{,}4 = 30{,}037\,cm^2$

Deci cea de a doua dimensiune a platbandei va fi:

$$b = \frac{A_{1\,nec}}{1{,}4} = \frac{30{,}037}{1{,}4} \cong 22\,cm$$

aria secțiunii tirantului este: $A_{brut} = 2\cdot22\cdot1{,}4 = 61{,}6\,cm^2$

Numărul necesar de nituri pentru realizarea îmbinării din B va fi:

$$n = \frac{V_B}{R_{nit}};\quad R_{nit} = \min(R_f,\ R_{str})$$

$$R_f = 2\,\frac{\pi\cdot2^2}{4}\cdot0{,}8\cdot1600 = 8038\,daN$$

$$R_{str} = 1{,}2\cdot2\cdot2\cdot1600 = 7680\,daN$$

deci:

$$n = \frac{78{,}2\cdot10^3}{7680} \cong 11\ \text{nituri}$$

Deplasarea pe verticală a nodului B, este datorată lungirii tirantului:

$$v_B^t = \frac{V_B\cdot l_t}{E A_t} = \frac{78{,}2\cdot10^3\cdot6\cdot10^2}{2{,}1\cdot10^6\cdot61{,}6} = 0{,}36\,cm$$

Deci $v_B = 0{,}36\,cm < 0{,}4\,cm$

2. Pentru verificarea la încovoiere a grinzii ABD, se calculează caracteristicile geometrice ale secțiunii:

$$y_G = \frac{-40\cdot2\cdot33}{3\cdot40\cdot2 + 60\cdot1} = -8{,}8\,cm$$

$$I_z^a = 3\cdot\frac{40\cdot2^3}{12} + 40\cdot2\cdot24{,}2^2 + 40\cdot2\cdot22{,}2^2 + \frac{60^3}{12} + 60\cdot8{,}8^2 +$$

$$+ 40\cdot2\cdot39{,}8^2 = 235728\,cm^4$$

$$I_z^b = 2\left(\frac{40\cdot2^3}{12} + 40\cdot2\cdot31^2\right) + \frac{60^3}{12} = 171{,}813\,cm^4$$

Verificarea la încovoiere a grinzii presupune determinarea zonelor pe care se pot folosi cele două secțiuni [2a); 2b)]. De aceea se va scrie expresia momentului încovoietor pe deschiderea AB și se va egala cu momentul capabil al secțiunii 2b)

$$M(x) = 36{,}2x - \frac{7{,}2x^2}{2} = \frac{171813 \cdot 1600}{32} = 85{,}9 \text{ tfm}$$

$$3{,}6x^2 - 36{,}2x + 85{,}9 = 0 \; ; \; x_1 = 6{,}22 \text{ m} \; ; \; x_2 = 3{,}84 \text{ m}$$

Deci se poate renunța la a doua platbandă de la talpa superioară a secțiunii 2a, pe zonele:

$x \in (0; 3{,}84)$ și $x \in (6{,}22; 12)$, de pe deschiderea AB.

Pe consolă, se poate renunța de asemeni, la cea de-a doua platbandă, deoarece momentul încovoietor din diagrama (M) (84 tfm) este mai mic decât momentul capabil al secțiunii 2b.

Verificarea rezistenței grinzii:

$$\sigma_{max}^{câmp} = \frac{M_{max}}{I_z^a} \cdot y_{max}^a = \frac{91 \cdot 10^5}{235728} \cdot 40{,}8 = 1575 \text{ daN/cm}^2 < 1600$$

$$\sigma_{max}^{consolă} = \frac{M_B}{I_z^b} \, y_{max}^b = \frac{84 \cdot 10^5}{171813} \, 32 = 1564{,}5 \text{ daN/cm}^2 < 1600$$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} \cdot S_{max}^b}{b \cdot I_z^b} = \frac{50{,}2 \cdot 10^3 (40 \cdot 2 \cdot 31 + 30 \cdot 1 \cdot 15)}{171813} = 856{,}08 \text{ daN/cm}^2 < \tau_a$$

3. Pentru calculul deplasării verticale a punctului D ținem seama de deformarea tirantului și de deformarea grinzii ABD.

$$v_B^t = 0{,}36 \; ; \; v_D^t = 0{,}36 \, \frac{15}{12} = 0{,}45 \text{ cm}$$

Pentru a calcula deplasarea din D datorată deformării grinzii se va folosi metoda parametrilor în origine.

$v_0 = 0$; $\varphi_0 \neq 0$; $T_0 = 36{,}2$ tf ; $M_0 = 0$

$$v(x) = \varphi_0 \cdot x - \frac{36{,}2 \cdot x^3}{6EI_z^a} + \frac{7{,}2[x^4 - (x-12)^4]}{24EI_z^a} - \frac{78{,}2(x-12)^3}{6EI_z^a}$$

Pentru determinarea rotirii φ_0, folosim condiția $v_B^{gr} = 0$

$$\varphi_0 \cdot 12 - \frac{36{,}2 \cdot 12^3}{6EI_z^a} + \frac{7{,}2 \cdot 12^4}{24EI_z^a} = 0 \; ; \; \varphi_0 = \frac{350{,}4}{EI_z^a}$$

Deplasarea în D a grinzii va fi:

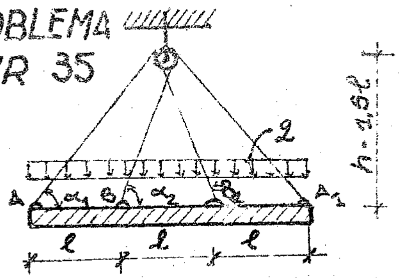
$$v_D^{gr} = \frac{350{,}4}{EI_z^a} \cdot 15 - \frac{36{,}2 \cdot 15^3}{6EI_z^a} + \frac{7{,}2(15^4 - 3^4)}{24EI_z^a} - \frac{78{,}2 \cdot 3^4}{6EI_z} = -\frac{295{,}2}{EI_z^a}$$

$$v_D^{gr} = -\frac{295{,}2 \cdot 10^9}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 235728} = -0{,}596 \text{ cm}$$

Săgeata punctului D de pe grindă va fi:

$$v_D = v_D^t - v_D^{gr} = 0{,}45 - 0{,}596 = -0{,}146 \text{ cm}.$$

PROBLEMA NR 35



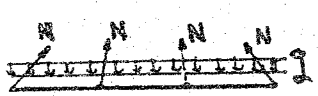
Grinda ABB_1A_1 este suspendată în patru puncte cu cablurile ACB și B_1CA_1 care trec prin câte un scripete în C. Cei doi scripeți (pentru cablul ACB și B_1CA_1) sînt independenți între ei și nu au frecare. Încărcarea pe grindă este q uniform distribuită pe orizontală. Grinda are caracteristicile E, I, A, iar cablul E, A_0 și se fac notațiile: $A_0 = \frac{100 I}{l^2}$; $A = 10 A_0$

Se cere să se determine diagramele de eforturi și deplasările pe verticală ale punctelor ABB_1A_1.

Se va presupune inițial legătura dintre cablu și grindă în axa grinzii apoi se va analiza cazul când legătura se face la fața superioară a grinzii, la distanța $h_s = \frac{l}{20}$ de axa grinzii.

Rezolvare:

Forța axială din firul ACB este constantă, scripetele fiind fără frecare. Forța axială din firul B_1CA_1 este constantă, de asemenea. Datorită simetriei $N_A = N_{A_1}$ și $N_B = N_{B_1}$ și deci în final toate forțele sînt egale.



Ecuația de proiecție pe verticală conduce la

$$2N \sin\alpha_1 + 2N \sin\alpha_2 = 3q\cdot l$$

deci: $N = \frac{3ql}{2(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)}$

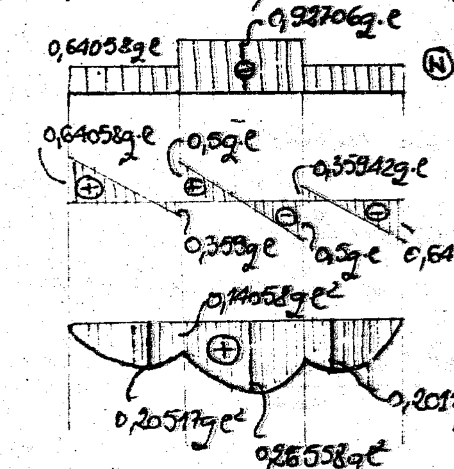
Pentru cazul în speță:

$tg\alpha_1 = 1$; $\alpha_1 = 45^\circ$; $\cos\alpha_1 = \sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\alpha_2 = 3$; $\alpha_2 = 71,565^\circ$; $\sin\alpha_2 = 0,948$; $\cos\alpha_2 = 0,316$

Rezultă forța axială din fire : $N = 0,9059\, q\cdot l$

Diagramele de eforturi din grindă sînt cele de mai jos:



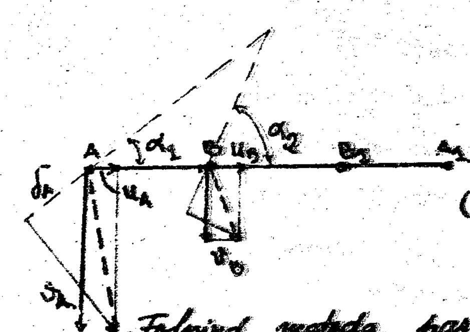
Pentru determinarea deplasărilor pe verticală ale punctelor ABB_1A_1, trebuie determinată lungimea unui cablu. Lungimea cablului este

$$L = \frac{1,5\,l}{\cos\alpha_1} + \frac{0,5\,l}{\cos\alpha_2} = 3,70247\,l$$

Deplasările ~~axiale ale~~ punctelor din deformarea axială a grinzii ABB_1A_1 ~~se pot calcula pornind~~ de la diagrama forței axiale și de la constatarea că, din motive de simetrie deplasarea axială a grinzii în axa de simetrie, este nulă.

$$u_A = \frac{0,92706\,q\,l\cdot 0,5\,l}{EA} + \frac{0,64058\,q\,l\cdot l}{EA} = 1,10411\frac{ql^2}{EA} = 1,10411\cdot 10^{-3}\frac{ql^4}{EI}$$

$$u_B = \frac{0,92706\,ql\cdot 0,5l}{EA} = 0,46353\frac{ql^2}{EA} = 0,46353\cdot 10^{-3}\frac{ql^4}{EI}$$



Din figura alăturată rezultă deplasările axiale ale cablului în punctele A și B

(2)
$$\delta_A = v_A \sin\alpha_1 - u_A \cos\alpha_1$$
$$\delta_B = v_B \sin\alpha_2 - u_B \cos\alpha_2$$

Folosind metoda parametrilor în origine se poate scrie

$$(3)\; v(x) = v_A + \varphi_A\cdot x - \frac{N\sin\alpha_1 x^3}{6EI} - \frac{q x^4}{24EI} - \frac{N\sin\alpha_2 (x-l)^3}{6EI}\Bigg|_{x>l}$$

Pentru determinarea celor doi parametri necunoscuți din origine v_A și φ_A, se folosesc condițiile:

pentru $x = 1{,}5\ell$; $\varphi = \frac{dv}{dx} = 0$ (a)

$$\delta_A + \delta_B = \frac{N \cdot L}{EA_0} \qquad (b)$$

După înlocuirea lui u_A și u_B în relațiile (2) și folosind relația (1), ecuația (b) devine:

$$(4) \quad 0{,}7071\, v_A + 0{,}94868\, v_B = 0{,}033541\, \frac{q\ell^4}{EI}$$

Pentru a folosi și ecuația (a), se scrie mai întîi expresia $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi_A - \frac{N \sin\alpha_1\, x^2}{2EI} + \frac{q x^3}{6EI} - \frac{N \sin\alpha_2 (x-\ell)^3}{2EI}$$

Ecuația (a) devine:

$$(5) \quad \varphi\left(x = \tfrac{3}{2}\ell\right) = \varphi_A - \frac{N \sin\alpha_1 \frac{9}{4}\ell^2}{2EI} + \frac{q\frac{27}{8}\ell^3}{6EI} - \frac{N \sin\alpha_2 \frac{\ell^2}{4}}{2EI} = 0.$$

Din expresia (3), pentru $x = \ell$ și folosind expresia lui φ_A din 5) se obține

$$(6) \quad v_B = v_A + 0{,}20048\, \frac{q\ell^4}{EI}$$

Sistemul alcătuit din ecuațiile (4) și (6) ne furnizează

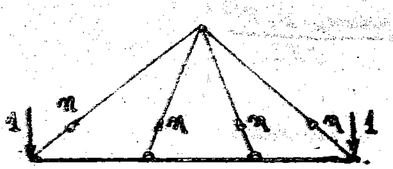
$$v_A = -0{,}093666\, \frac{q\ell^4}{EI} \; ; \; v_B = 0{,}10682\, \frac{q\ell^4}{EI}$$

Se poate face o verificare folosind expresia lui Maxwell-Mohr pentru determinarea de exemplu a deplasării v_A. Se încarcă sistemul cu o forță verticală unitară în A și A_1. Din aceleași considerente de simetrie se obțin forțe constante în firele A, B, B_1, A_1 notate cu „n", din ecuația:

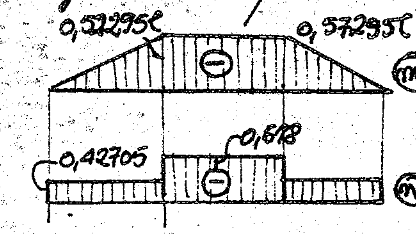
$$2n \sin\alpha_1 + 2n \sin\alpha_2 = 2$$

deci:

$$n = \frac{1}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2} = 0{,}603945$$



Diagramele de eforturi sînt în acest caz:



Utilizînd regula lui Vereșceaghin se obține:

$$2v_A = -\frac{2 \cdot \ell \cdot 0{,}14058 q\ell^2 \cdot 0{,}57295 \cdot \ell}{3EI} - 2 \cdot \frac{2}{3}\ell \frac{q\ell^2}{8} \frac{0{,}57295\ell}{2EI} - \ell \cdot 0{,}14058 q\ell^2 \frac{0{,}57295\ell}{EI} -$$

$$- \frac{2}{3}\ell \frac{q\ell^2}{8} 0{,}57295 \cdot \ell + 2\, \frac{\ell \cdot 0{,}64058 q\ell \cdot 0{,}42705}{EA} + \ell\, \frac{0{,}927069\ell \cdot 0{,}61804}{EA} +$$

$$+ 2\, \frac{3{,}70247\ell \cdot 0{,}905929\ell \cdot 0{,}603945}{EA_0}$$

După înlocuirea lui A și A_0 se obține:

$$2v_A = -0{,}188099\, \frac{q\ell^4}{EI},$$

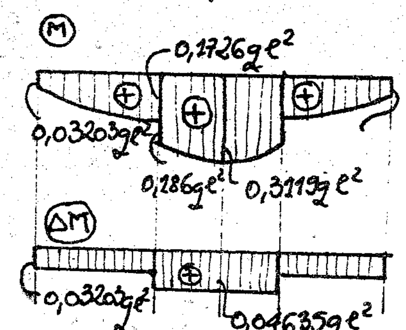
sau $\quad v_A = -0{,}09405\, \frac{q\ell^4}{EI}$, un rezultat foarte apropiat de cel precedent.

În cazul cînd articulațiile A, B, B_1, A_1 se găsesc la fața superioară a grinzii se vor analiza numai etapele de calcul.

Forța axială din cabluri rămîne aceeași $N = 0{,}90592 q\ell$

Diagramele de forță axială și forță tăietoare rămîn aceleași.

Diagrama de moment încovoietor se modifică luîndu-se în considerare și excentricitatea prinderii în ABB_0A_0:



Diferențele în diagrama de moment apar din excentricități și se notează (ΔM)

Folosind formula Maxwell-Mohr pentru integrarea diagramelor (ΔM) și (m), singura diferență care există, se va obține:

$$2\Delta v_A = -2\ell \cdot 0{,}03203 q\ell^2 \frac{0{,}57295\,\ell}{2EI} - \ell\,\frac{0{,}04635 q\ell^2 \cdot 0{,}57295\,\ell}{EI} =$$

$$= -0{,}04495 \frac{q\ell^4}{EI} \quad \text{și deci} \quad \Delta v_A = -0{,}02245 \frac{q\ell^4}{EI}$$

Sumînd v_A cu Δv_A se obține deplasarea totală, pentru acest caz: $v_A' = v_A + \Delta v_A = -0{,}11651 \frac{q\ell^4}{EI}$

În același mod se poate proceda și pentru determinarea lui v_B' sau se poate folosi metoda parametrilor în origine, astfel

$$v(x) = v_A + \varphi_A \cdot x - \frac{N \sin\alpha_1\, x^3}{6EI} - \frac{M_A x^2}{2EI} + q\frac{x^4}{24EI} - \frac{M_B (x-\ell)^2}{2EI} - \frac{N \sin\alpha_2 (x-\ell)^3}{6EI}\Bigg|_{x>\ell}$$

Aici v_A și M_A sînt cunoscute și au valorile:

$$v_A = -0{,}11651 \frac{q\ell^4}{EI}, \quad M_A = 0{,}03203 q\ell^2.$$

Rămîne de determinat φ_A care se obține din condiția

$$\varphi\left(x = \tfrac{3}{2}\ell\right) = 0$$

$$\varphi(x) = \varphi_A - \frac{N \sin\alpha_1\, x^2}{2EI} - \frac{M_A x}{EI} + q\frac{x^3}{6EI} - \frac{M_B (x-\ell)}{EI} - \frac{N \sin\alpha_2 (x-\ell)^2}{2EI}\Bigg|_{x>\ell}$$

Condiția conduce la:

$$\varphi_A = \frac{N \sin\alpha_1\, 9\ell^2}{8EI} + \frac{N \sin\alpha_2\, \ell^2}{8EI} + \frac{3M_A \ell}{2EI} - \frac{27 q\ell^3}{48EI} + \frac{M_B \cdot \ell}{2EI}$$

După substituirea valorilor se obține:

$$\varphi_A = \frac{0{,}905929\,\ell^3}{8EI}(9 \cdot 0{,}7071 + 0{,}94868) + \frac{3 \cdot 0{,}03203 q\ell^3}{2EI} - \frac{27}{48}\frac{q\ell^3}{EI} + \frac{0{,}014329\,\ell^3}{2EI} =$$

$$= 0{,}32078 \frac{q\ell^3}{EI}$$

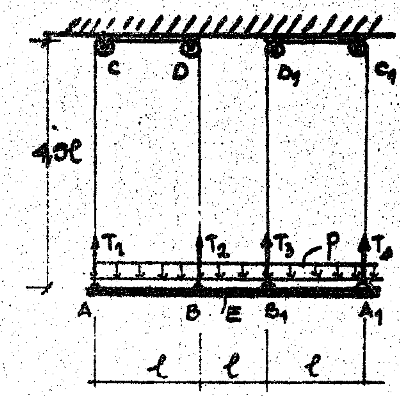
Se poate acum calcula v_B cunoscînd toți parametrii în origine φ_A, v_A, T_A, M_A

$$v_B = -0{,}11651 \frac{q\ell^4}{EI} + 0{,}32078 \frac{q\ell^3}{EI}\ell - \frac{0{,}64058 q\ell \cdot \ell^3}{6EI} - \frac{0{,}03203 q\ell^4}{2EI} + \frac{q\ell^4}{24EI} =$$

$$= 0{,}12316 \frac{q\ell^4}{EI}$$

Verificarea, din nou, a acestor valori se poate face cu relația (b) care trebuie să rămînă valabilă și pentru cazul prinderii cablurilor la fața superioară a grinzii.

PROBLEMA NR 36



Grinda ABB_1A_1 este suspendată prin intermediul cablului $ACDB$ trecînd peste scripeții CD (fără frecare) și $B_1D_1C_1A_1$ trecînd peste scripeții D_1C_1 (fără frecare). Grinda este încărcată cu sarcina uniform distribuită p. Caracteristicile secțiunii grinzii sînt E, I iar ale cablurilor E, A. Se dă relația $A = \frac{100 I}{\ell^2}$. Se cer: diagramele de eforturi pe bara ABB_1A_1 și deplasările în cele 4 puncte de prindere.

Rezolvare:

Scripeții fiind fără frecare, perechile de eforturi axiale din cabluri $T_1 = T_2$, $T_3 = T_4$ sînt egale. Apoi considerînd simetria sistemului, rezultă $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T = \frac{3p\ell}{4} = 0{,}75\,p\ell$.

Pentru calculul deplasărilor punctelor barei ABB_1A_1 folosim metoda parametrilor în origine:

$$v(x) = -\frac{T_1 x^3}{6EI} + \varphi_A x + \frac{p x^4}{24EI} - \frac{T_2 (x-\ell)^3}{6EI} - \frac{T_3 (x-2\ell)^3}{6EI} + v_A \qquad (1)$$

În expresia (1) v_A și φ_A sînd parametrii în origine, necunoscuți. Din deformația cablului $ACDB$ rezultă:

$$v_A + v_B = \frac{T}{EA} \cdot 10\,\ell. \qquad (2)$$

Din simetria sistemului și a încărcărilor $\varphi_E = 0$

$$v_B = v_A + \varphi_A \cdot \ell - \frac{3}{4}\frac{p\ell^4}{6EI} + \frac{p\ell^4}{24EI} \qquad (3)$$

$$\varphi_E = \varphi_A - \frac{3}{4}\cdot\frac{pl\left(\frac{3}{2}l\right)^2}{2EI} + \frac{p\left(\frac{3}{2}l\right)^3}{6EI} - \frac{3}{4}\cdot\frac{pl\left(\frac{1}{2}l\right)^2}{2EI} = 0 \quad (4)$$

$$v_A + v_B = \frac{3}{4}\cdot\frac{pl}{EA}\cdot 10\cdot l = \frac{3}{4}\cdot\frac{10\,pl^2}{E\cdot 100\cdot\frac{I}{l^2}} = \frac{3}{40}\cdot\frac{pl^4}{EI} \quad (5)$$

Din (4) rezultă: $\varphi_A = \frac{36}{96}\frac{pl^3}{EI} = \frac{3}{8}\frac{pl^3}{EI}$.

După înlocuirea lui φ_A, ecuațiile (3) și (5) se scriu astfel:

$$v_B + v_A = \frac{3}{40}\cdot\frac{pl^4}{EI} = \frac{9}{120}\frac{pl^4}{EI}.$$

$$v_B - v_A = \frac{7}{24}\cdot\frac{pl^4}{EI} = \frac{35}{120}\cdot\frac{pl^4}{EI}.$$

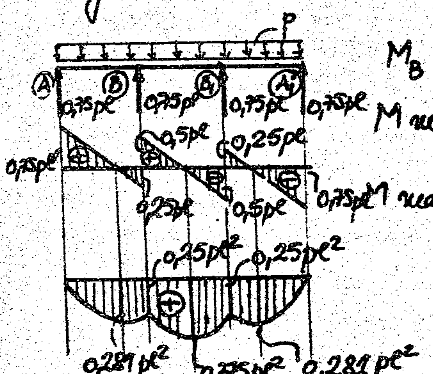
Rezolvând sistemul se obțin valorile:

$v_A = -\frac{13}{120}\frac{pl^4}{EI}$ (în sus).

$v_B = \frac{22}{120}\frac{pl^4}{EI}$ (în jos)

Din simetria structurii: $v_A = v_{A_1}$, și $v_B = v_{B_1}$.

Diagramele de eforturi pe grinda ABB_1A_1 vor fi:

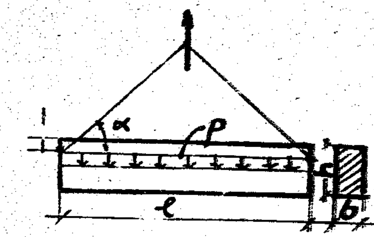


$$M_B = M_{B_1} = 0,75pl^2 - \frac{pl^2}{2} = 0,25pl^2$$

$$M\,max_1 = \frac{(0,75pl)^2}{2p} = 0,28125\,pl^2$$

$$M\,max_2 = M_B + \frac{(0,5pl)^2}{2p} = 0,375\,pl^2.$$

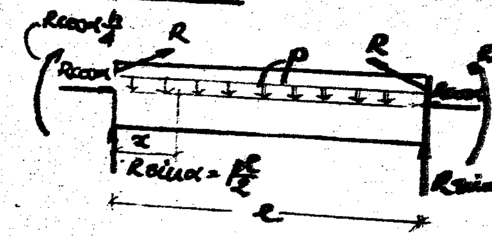
PROBLEMA NR 37



O grindă prefabricată este ridicată cu ajutorul unui cablu fixat la efectul macaralei și înclinat cu unghiul „α" față de orizontală. Se cere să se traseze diagramele de variație ale tensiunilor normale în fibrele superioară și inferioară (în lungul grinzii).

Date numerice: $p = 1tf/m = 10kN/m$; $l = 17,3m$; $\alpha = 20°$; $h = 0,8m$; $b = 0,5m$

Rezolvare:



Din egalitatea reacțiunilor verticale ale grinzii date de cablul înclinat și de încărcarea uniform distribuită „p", rezultă valoarea efortului din cablu: $R\sin\alpha = \frac{pl}{2}$; $R = \frac{pl}{2\sin\alpha}$

Se determină expresiile forței axiale N și momentului încovoietor M într-o secțiune oarecare x pe grindă:

$$N(x) = R\cos\alpha = \frac{pl}{2\sin\alpha}\cos\alpha = \frac{pl}{2}\,ctg\alpha$$

$$M(x) = R\cos\alpha\frac{h}{4} + \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} = \frac{pl}{2}ctg\alpha\frac{h}{4} + \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2}$$

Caracteristicile geometrice ale secțiunii sunt:

$A = b\cdot h$; $I_z = \frac{bh^3}{12}$; $W_z = \frac{bh^2}{6}$

Expresia efortului unitar σ_x pe fața superioară a grinzii va fi: $\sigma_x^{sus} = -\frac{N(x)}{A} - \frac{M(x)}{W_z} = -\frac{pl\,ctg\alpha}{2bh} - \frac{3}{4}\frac{pl\,ctg\alpha}{bh} - \frac{3plx}{bh^2} +$

$+ \frac{3px^2}{bh^2}$ Pentru $x = 0$; $\sigma_x^{sus} = -\frac{5pl\,ctg\alpha}{4bh}$

Înlocuind valorile numerice în expresie se obține:

$$\sigma_x^{sus}(x=0) = -\frac{5\cdot 1\cdot 17{,}3\cdot 2{,}74}{4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8} = -148{,}13\ t/m^2 = -1481\ \frac{daN}{cm^2}$$

Pentru $x = \frac{l}{2}$; $\sigma_x^{sus} = -\frac{pl\,ctg\alpha}{2bh} - \frac{3pl\,ctg\alpha}{4bh} - \frac{3pl^2}{2bh^2} + \frac{3pl^2}{4bh^2} =$

$$= -\frac{5pl\,ctg\alpha}{4bh} - \frac{3pl^2}{4bh^2} = -\frac{pl}{4bh}\left(5ctg\alpha + \frac{3l}{h}\right)$$

Înlocuind cu valorile se obține:

$$\sigma_x^{sus}\left(x=\frac{l}{2}\right) = -\frac{1\cdot 17{,}3}{4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8}\left(5\cdot 2{,}74 + 3\cdot\frac{17{,}3}{0{,}8}\right) = -849{,}5\ t/m^2$$

Expresia efortului unitar σ_x pe fața inferioară a grinzii este:

$\sigma_x^{jos} = -\frac{N(x)}{A} + \frac{M(x)}{W_z} = -\frac{pl\,ctg\alpha}{2bh} + \frac{3}{4}\frac{pl\,ctg\alpha}{bh} + \frac{3plx}{bh^2} -$

$- \frac{3px^2}{bh^2}$. Pentru $x = 0$, $\sigma_x^{jos} = -\frac{pl\,ctg\alpha}{2bh} + \frac{3}{4}\frac{pl\,ctg\alpha}{bh} =$

$= \frac{pl\,ctg\alpha}{4bh}$

Înlocuind cu valorile numerice se obține:

$$\sigma_x^{jos}(x=0) = \frac{1\cdot 17{,}3\cdot 2{,}74}{4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8} = 29{,}6\ t/m^2 = 296\ daN/cm^2$$

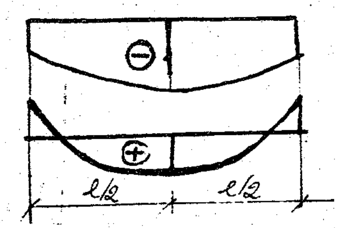
Pentru $x = \frac{l}{2}$; $\sigma_x^{jos} = -\frac{pl\,ctg\alpha}{2bh} + \frac{3}{4}\frac{pl\,ctg\alpha}{bh} + \frac{3pl^2}{2bh^2} -$

$$- \frac{3pl^2}{4bh^2} = \frac{pl\,ctg\alpha}{4bh} + \frac{3pl^2}{4bh^2} = \frac{pl}{4bh}\left(ctg\alpha + \frac{3l}{h}\right)$$

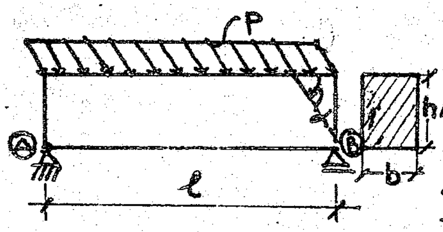
Înlocuind cu valorile numerice se obține:

$$\sigma_x^{jos}\left(x=\frac{l}{2}\right) = \frac{1\cdot 17{,}3}{4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8}\left(2{,}74 + \frac{3\cdot 17{,}3}{0{,}8}\right) = 731{,}08\ t/m^2$$

Diagramele de efort unitar σ_x, în lungul grinzii, pe cele două fețe, superioară și inferioară, vor fi:



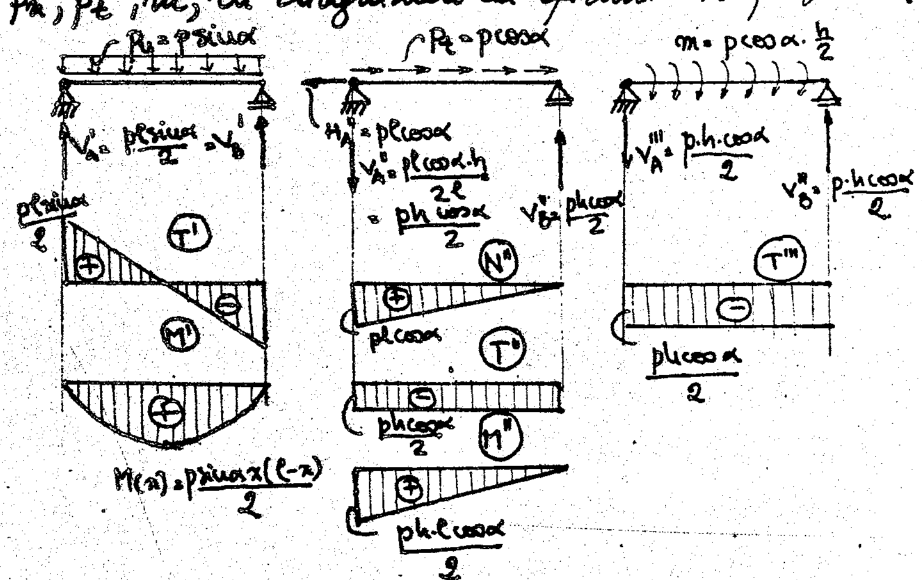
PROBLEMA NR 38



Pentru grinda AB din figură, încărcată la fața superioară cu o forță uniform distribuită înclinată, să se determine pentru ce valoare a unghiului α, secțiunea periculoasă se află la sfertul deschiderii grinzii. În acest caz să se determine p_{adm} luând $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$

Rezolvare:

Reducând încărcarea la axa barei se obțin încărcările: p_n, p_t, m, cu diagramele de eforturi corespunzătoare.



Într-un punct curent de abscisă x eforturile vor fi:

$$M(x) = \frac{p\sin\alpha}{2}\,x(l-x) + \frac{p\cdot h\cdot l}{2}\cos\alpha\left(1-\frac{x}{l}\right)$$

$$T(x) = \frac{p\cdot l\cdot\sin\alpha}{2} - p\sin\alpha\cdot x$$

$$N(x) = p\cdot l\cos\alpha\left(1-\frac{x}{l}\right)$$

Solicitarea pentru care au fost scrise eforturile este de întindere excentrică. Efortul unitar σ_x la fibra marginală inferioară este:

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{W} + \frac{N(x)}{A} = \frac{p\sin\alpha}{2W}\,x(l-x) + \frac{p\cdot h\cdot l}{2W}\cos\alpha\left(1-\frac{x}{l}\right) + \frac{p\cdot l\cos\alpha}{A}\left(1-\frac{x}{l}\right)$$

Valoarea maximă a lui σ_x are loc în secțiunea periculoasă, adică acolo unde $\frac{d\sigma_x}{dx} = 0$

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{p\sin\alpha}{2W}(l-2x) - \frac{p\cdot h\cdot l}{2W}\cos\alpha\,\frac{1}{l} - \frac{p\cdot l\cos\alpha}{A}\cdot\frac{1}{l} = 0$$

Rezultă: $x = \frac{l}{2} - \frac{1}{2\,tg\alpha}\left(h + 2\frac{W}{A}\right) = \frac{l}{2} - \frac{1}{2\,tg\alpha}\cdot\frac{4}{3}h = \frac{l}{2} - \frac{2}{3}\frac{h}{tg\alpha}$

Pentru ca abscisa x să reprezinte sfertul deschiderii grinzii trebuie ca:

$$\frac{l}{4} = \frac{l}{2} - \frac{2}{3}\frac{h}{tg\alpha}\ ;\quad tg\alpha = \frac{8}{3}\frac{h}{l}$$

Luând, conform datelor problemei, $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ se obține:

$tg\alpha = \frac{8}{30}$; deci $\alpha = 28{,}0725°$, iar

$\sin\alpha = 0{,}47059$, $\cos\alpha = 0{,}88235$

În acest caz efortul unitar maxim va fi:

$$\sigma_{\frac{l}{4}} = \sigma_{max} = \frac{p\cdot 0{,}47059}{2\cdot\frac{bh^2}{6}}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{3l}{4} + \frac{p\cdot h\cdot l}{2\cdot\frac{bh^2}{6}}\,0{,}88235\left(1-\frac{1}{4}\right) + \frac{p\cdot l}{bh}\cdot 0{,}88235\left(1-\frac{1}{4}\right) = 52{,}941\frac{p}{b}$$

Punând condiția ca efortul unitar maxim în secțiunea periculoasă să nu depășească valoarea efortului unitar admisibil, se obține, la limită, valoarea încărcării admisibile p_{adm}:

$$\sigma_{max} \le \sigma_a\ ;\quad 52{,}941\frac{p}{b} \le \sigma_a\ ;\quad p \le \frac{b\cdot\sigma_a}{52{,}941}$$

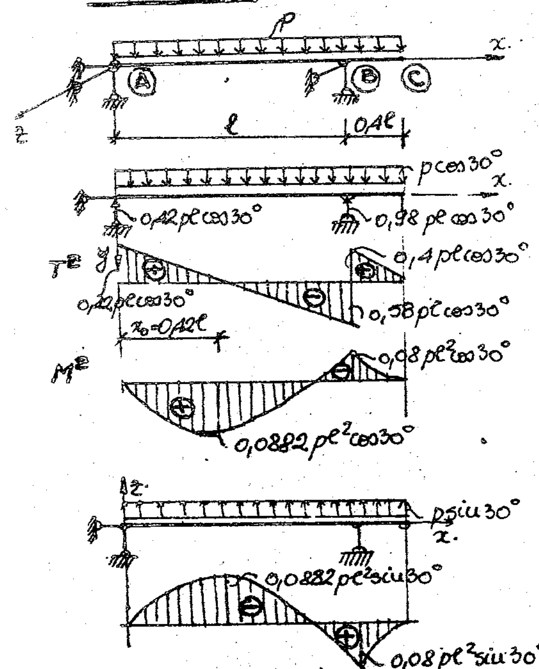
deci: $p \le 0{,}01889\, b\cdot\sigma_a$

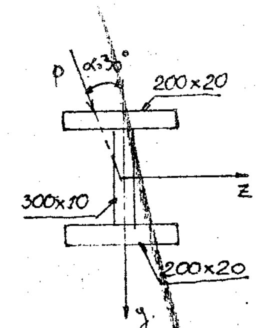
PROBLEMA NR: 39

Se dă grinda din figură încărcată cu o forță uniform distribuită „p" care face unghiul $\alpha = 30°$ cu axa Oy. În punctele A și B sînt aceleași rezemări pe Oz și Oy. Cunoscînd $\sigma_a = 1600\ daN/cm^2$; $l = 4{,}00\ m$, se cere:

1. Încărcarea p admisibilă.
2. Diagrama σ_x în secțiunea cea mai solicitată
3. Să se arate că fibra medie deformată este o curbă plană și să se determine care este acest plan.

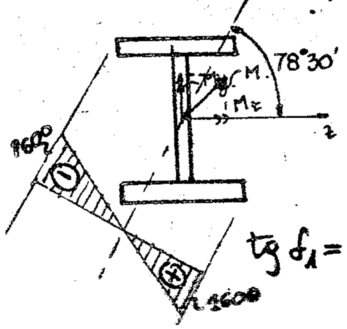
Rezolvare:





1. Pentru a determina încărcarea admisibilă pe grindă se pune condiția, în secțiunea cea mai solicitată, ca σ_{max} să fie egal cu σ_a. Pentru a determina punctul cel mai solicitat al secțiunii celei mai solicitate, se determină poziția axei neutre.

Caracteristicile geometrice ale secțiunii sînt: $I_z = 22756{,}67\ cm^4$
$I_y = 2669{,}17\ cm^4$
$W_z = 1338{,}627\ cm^3$; $W_y = 266{,}917\ cm^3$



$$tg\,\delta_1 = tg\,\alpha \frac{I_z}{I_y} = -tg\,30° \frac{22756{,}67}{2669{,}17} = -4{,}92;\ \delta_1 = 78°30'$$

Unghiul δ_1 dă poziția axei neutre a secțiunii.

Efortul unitar maxim va fi cel corespunzător punctului extrem față de axa neutră.

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{I_z} y_1 - \frac{M_y}{I_y} z_1 = \frac{0{,}0882 \cdot p \cdot 4^2 \cdot 0{,}866 \cdot 10^5}{22756{,}67} \cdot 17 +$$

$$+ \frac{0{,}0822 \cdot p \cdot 4^2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^5}{2669{,}17} \cdot 10 = 355{,}64p$$

Punînd condiția la limită: $\sigma_{max} = \sigma_a$, se obține valoarea încărcării admisibile p_{adm}.

$$\sigma_{max} = 1600\ daN/cm^2 \longrightarrow 355{,}64\, p_{adm} = 1600$$

Rezultă: $p_{adm} = 4{,}49\ tf/m$

2. Față de axa neutră a secțiunii, înclinată cu unghiul $\delta_1 = -78°30'$ față de axa Oz, se trasează diagrama σ_x, cu valoarea zero în axa neutră și valorile maxime egale cu 1600.

3. Fibra medie deformată este o curbă plană deoarece forțele active și de legătură se află într-un singur plan, urmărit planul forțelor, legăturile grinzii sînt de același tip în ambele planuri și secțiunea se păstrează aceeași pe toată lungimea barei.

În acest caz $\varphi = ct$, sau $tg\,\varphi = \frac{v(x)}{w(x)} = ct$.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M^z \cos 30°}{EI_z}$$

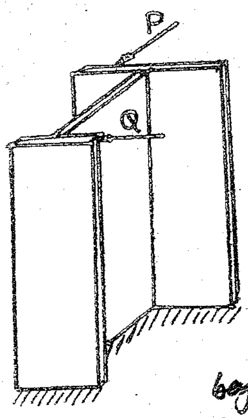
deci $$v = -\frac{\cos 30°}{EI_z}\left\{\int\left[\int M^z dx\right]dx + C_1x + C_2\right\}$$

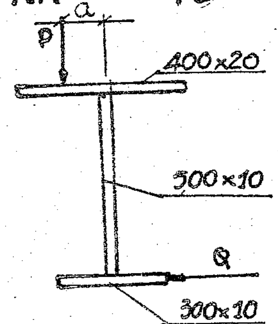
$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M^y}{EI_y} = -\frac{M^z \sin 30°}{EI_y}$$

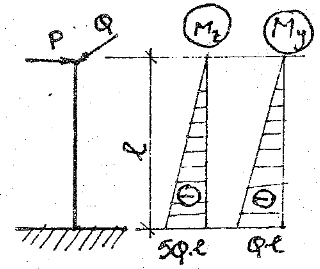
deci $$w = -\frac{\sin 30°}{EI_y}\left\{\int\left[\int M^z dx\right]dx + C_1x + C_2\right\}$$

$tg\,\varphi = \frac{v}{w} = 0{,}203 = ct.$ Rezultă $\varphi = 11°30'$, unghiul pe care săgeata îl face cu axa Oz, deci planul în care se găsește fibra medie deformată este perpendicular pe axă.

PROBLEMA NR. 40







Se dă stâlpul din figură, încastrat la bază, solicitat de forțele P și Q ($P=5Q$) și se cere: 1. Să se determine „P" și „a", astfel încât $\sigma_a = 1600$ și toate elementele secțiunii transversale să rămână după deformație paralele cu poziția lor inițială. 2. Să se determine planul în care se produce deformarea stâlpului, precum și deplasarea totală maximă. Să se verifice că acest plan este perpendicular pe planul axei neutre.

Rezolvare:

1.

$$y_G = \frac{-10\cdot 2\cdot 26}{190} = -2{,}73 \text{ cm}$$

$$I_z = 2\cdot 40\cdot 23{,}27^2 + \frac{50^3}{12} + 50\cdot 2{,}73^2 + 2\cdot 30\cdot 28{,}73^2 = 103.633 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{2\cdot 40^3}{12}\cdot 2 + \frac{1\cdot 50}{12} = 15167 \text{ cm}^4$$

Pentru ca toate elementele secțiunii să rămână, după deformare, paralele cu pozițiile lor inițiale, trebuie ca cele două forțe (P și Q) să-și echilibreze momentele de torsiune față de centrul de încovoiere-torsiune.

$$S_s = 20\cdot 2\cdot 10 = 400 \text{ cm}^3;\quad \tau_s = \frac{T\cdot S_s}{b_s I_y} = \frac{T\cdot 400}{2\cdot 15167} = 0{,}01318\,T$$

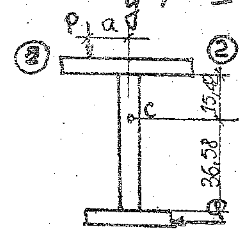
$$H_s = \frac{2}{3}\cdot 40\cdot 2\cdot 0{,}01318 = 0{,}7033\,T$$

$$S_i = 15\cdot 2\cdot 7{,}5 = 225;\quad \tau_i = \frac{T\cdot S_i}{b_i I_y} = \frac{T\cdot 225}{2\cdot 15167} = 0{,}007417\,T$$

$$H_i = \frac{2}{3}\cdot 30\cdot 2\cdot 0{,}007417\,T = 0{,}2967\,T$$

Se scrie momentul celor trei forțe (H_i; H_s și T) față de axul tălpii superioare a secțiunii și se obține distanța $\bar{y}$ care dă poziția centrului de încovoiere-torsiune al secțiunii.

$$\bar{y}T = H_i\cdot 52 \quad \text{sau} \quad \bar{y}T = 0{,}2967T\cdot 52$$



$$\bar{y} = 15{,}42 \text{ cm}$$

Deci, față de centrul de încovoiere-torsiune (C) momentele celor două forțe (P și Q) trebuie să fie egale și de semne contrarii

$$Q\cdot 36{,}58 = P\cdot a = 5Q\cdot a$$

Rezultă valoarea distanței $a = \frac{36{,}58}{5} = 7{,}32$ cm

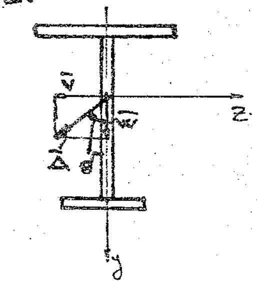
Efortul unitar maxim nu trebuie să depășească $\sigma_a = 1600$. Valoarea maximă a efortului unitar apare în punctul (2).

$$\sigma_{max}^{(2)} = \frac{M_z}{I_z} y_{(2)} - \frac{M_y}{I_y} z_{(2)} = \frac{(-5Q\cdot \ell)}{103633}(-24{,}27) + \frac{(-Q\cdot \ell)}{15167}20 = 1600.$$

$$0{,}4684\cdot Q + 0{,}527a = 1600;\quad Q = 1606 \text{ daN}.$$

Deci: $P = 5\cdot 1606 = 8033$ daN.

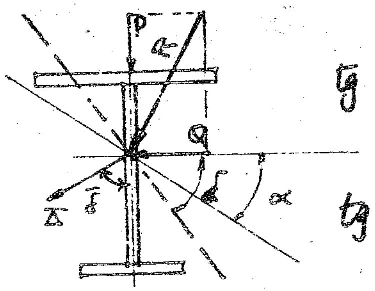
2.



Deplasarea datorată momentului încovoietor M^z este: $v = \frac{P\ell^3}{3EI_z}$, iar cea datorată momentului încovoietor M^y este: $|w| = \frac{Q\ell^3}{3EI_y}$

Dacă notăm: $I_z = \eta I_y = 6{,}833 I_y$ și $P=5Q$, atunci

$$|\Delta| = \sqrt{\left(\frac{P\ell^3}{3EI_z}\right)^2 + \left(\frac{Q\ell^3}{3EI_y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5Q\ell^3}{3E\eta I_y}\right)^2 + \left(\frac{Q\ell^3}{3EI_y}\right)^2};\quad |\Delta| = \frac{Q\ell^3}{3EI_y}\sqrt{\left(\frac{5}{\eta}\right)^2+1} = 1{,}333 \text{ cm}.$$



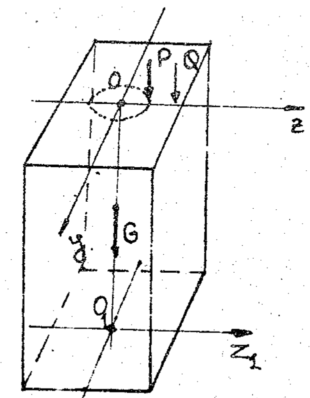
$$\operatorname{tg}\bar{\delta} = \frac{|w|}{v} = \frac{\dfrac{Ql^3}{3EI_y}}{\dfrac{5Ql^3}{3EI_y}} = \frac{\eta}{5} = 1{,}366$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Q}{P} = \frac{1}{5} = 0{,}20$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{I_z}{I_y}\cdot\frac{M_y}{M_z} = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{I_z}{I_y} = 0{,}20\cdot 6{,}833 = 1{,}366$$

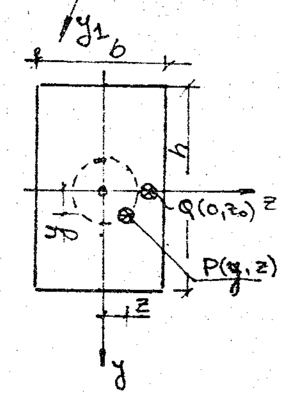
Deci $\operatorname{tg}\bar{\delta} = \operatorname{tg}\delta$, însemnînd că planul în care se găsește deplasarea maximă a consolei este perpendicular pe planul în care se găsește axa neutră a secțiunii.

PROBLEMA NR 41



Un bloc cu secțiune dreptunghiulară avînd greutatea G, este acționat la partea superioară de două forțe:
- o forță fixă „Q" situată pe axa Oz
- o forță mobilă „P" care se deplasează pe cercul de rază „r"

Să se determine relația între Q, P, G, astfel încît pe secțiunea de la baza blocului să nu apară întinderi



Rezolvare:

Ecuația cercului de rază „r", de pe fața zOy a blocului este:

$$y^2 + z^2 = r^2 \qquad (1)$$

Reducînd toate încărcările blocului pe secțiunea de la baza sa, se obține:

$$\begin{cases} N = -(P+Q+G) \\ M_z = -Py \\ M_y = Pz + Qz_0 \end{cases}$$

Excentricitățile forței axiale N, față de axele sistemului rezult:

$$y_1 = e_z = \frac{M_z}{N} = \frac{Py}{P+Q+G}; \qquad (2)$$

$$z_1 = e_y = \frac{-M_y}{N} = \frac{Pz}{P+Q+G} + \frac{Qz_0}{P+Q+G}$$

Deci forța axială N parcurge curba definită de z_1, y_1 pe secțiunea de la baza blocului

Se introduc relațiile (2) în ecuația (1) și se obține ecuația curbei parcursă de N. Se notează $P+Q+G=R$ (3) și se obține:

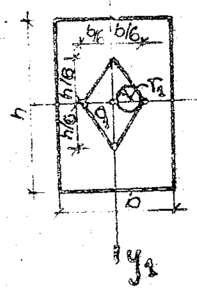
$$y_1^2 + z_1^2 - 2\frac{Q}{R}z_1z_0 + z_0^2\frac{Q^2}{R^2} = r^2\frac{P^2}{R^2} = r_1^2$$

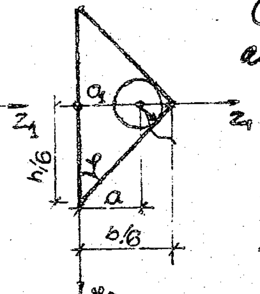
sau:

$$y_1^2 + \left(z_1 - z_0\frac{Q}{R}\right)^2 = r_1^2 \quad (4)$$

Deci punctul de aplicație al forței N se deplasează pe un cerc cu raza r_1, având centrul în punctul de coordonate $\left(0, z_0\frac{Q}{R}\right)$

Pentru ca pe secțiunea de la baza blocului să nu existe întinderi, cercul definit de ecuația (4) trebuie să se înscrie în conturul sâmburelui central al secțiunii





Condiția amintită se scrie astfel:

$$r_1 \le \left(\frac{b}{6} - a\right)\cos\varphi$$

$$r\frac{P}{R} \le \left(\frac{b}{6} - a\right)\cos\varphi$$

unde $a = z_0\frac{Q}{R}$

Relația de mai sus impune ca în primul rând centrul cercului să se găsească în interiorul sâmburelui central unde:

$$\frac{b}{6} \ge a \quad \text{sau} \quad \frac{b}{6} \ge z_0\frac{Q}{R} \quad (5)$$

Dacă condiția (5) este îndeplinită, atunci relația cerută de textul problemei este:

$$r\frac{P}{P+Q+G} \le \frac{b}{6}\cos\varphi - z_0\frac{Q}{P+Q+G}\cos\varphi$$

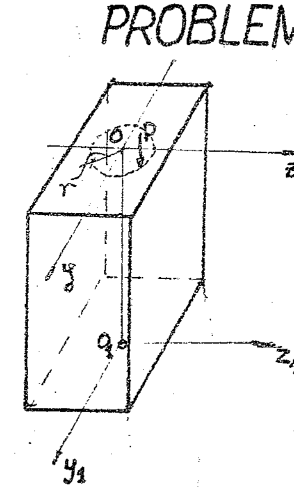
sau

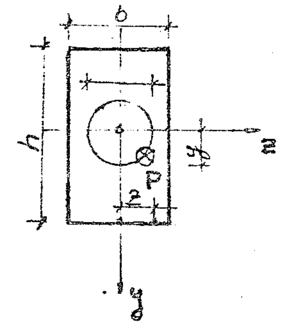
$$\frac{rP + z_0 Q\cos\varphi}{P+Q+G} \le \frac{b}{6}\cos\varphi.$$

PROBLEMA NR 42

Un corp prismatic cu secțiunea dreptunghiulară, având greutatea G, este acționat pe fața superioară de o forță concentrată P, al cărei punct de aplicație se află tot timpul pe cercul de rază r.

Să se determine raportul $\frac{G}{P}$ minim astfel încât la baza corpului prismatic să nu apară întinderi.





Rezolvare:

Ecuația cercului de rază r, pe fața superioară zOy a corpului prismatic este

$$z^2 + y^2 = r^2 \quad (1)$$

Reducând toate încărcările corpului în centrul de greutate al barei sale, se obține:

$$\begin{cases} N = -(P+G) \\ M_z = -Py \\ M_y = Pz \end{cases}$$

Excentricitățile forței axiale față de cele două axe ale sistemului sunt:

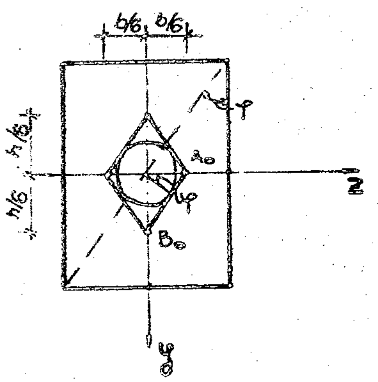
$$e_z = \frac{M_z}{N} = \frac{P\cdot y}{P+G} \quad \text{și} \quad e_y = \frac{M_y}{N} = \frac{P\cdot z}{P+G} \quad (2)$$

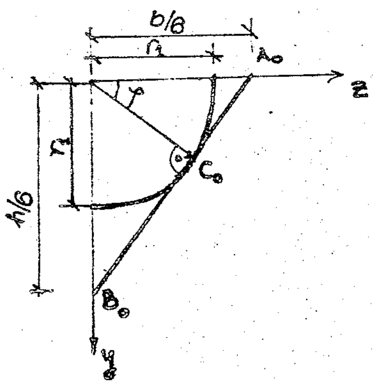
Se introduc relațiile (2) în ecuația (1) și se obține ecuația curbei pe care se deplasează forța N în secțiunea $z_1O_1y_1$ de la baza corpului prismatic

$$e_z^2 + e_y^2 = \left(\frac{P\cdot r}{P+G}\right)^2 = r_1^2 \quad (3)$$

Curba (3) este un cerc cu centrul în O_1 și cu raza $r_1 < r$.

Pentru ca pe secțiunea de la baza corpului prismatic să nu apară întinderi trebuie ca cercul (3) să se afle în întregime în sâmburele central.





$\overline{O_1C_0} = \overline{O_1A_0}\cos\varphi$ sau $\overline{O_1C_0} = \frac{b}{6}\cos\varphi$

Pentru ca cercul să se înscrie în conturul sâmburelui central, trebuie ca:

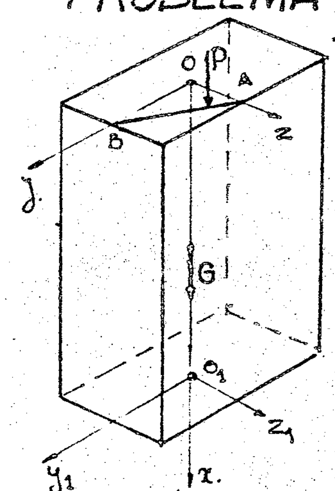
$r_1 \le \frac{b}{6}\cos\varphi$ sau $\frac{P\cdot r}{P+G} \le \frac{b}{6}\cos\varphi$

Rezultă valoarea raportului $\frac{G}{P}$

$$\frac{G}{P} \geq \frac{6\cdot r}{b\cos\varphi} - 1$$

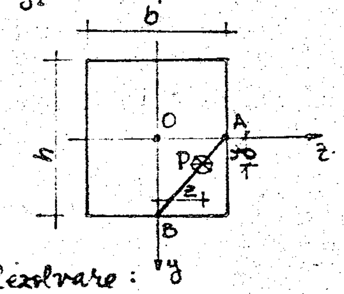
Pentru $r = \frac{b}{2}$, $\varphi = 30°$, rezultă: $\frac{G}{P} \geq \frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

PROBLEMA NR 43



Un corp prismatic cu secțiunea dreptunghiulară, având greutatea totală G este acționat pe fața superioară de o forță concentrată verticală P, acționând spre bază, pe intervalul AB.

1. Să se determine raportul minim necesar $\frac{G}{P}$ astfel încât pentru orice poziție a forței P cuprinsă în intervalul AB să nu apară eforturi unitare de întindere pe secțiunea de la baza corpului prismatic.
2. Aceeași problemă pentru cazul în care forța P are orientare în sus.



Rezolvare:

(1) Ecuația dreptei AB este: $\frac{2z}{b} + \frac{2y}{h} = 1$ (1). Reducând toate încărcările corpului în centrul de greutate al bazei sale, se obține:

$$\begin{cases} N = -(P+G) \\ M_z = -P\cdot y \\ M_y = P\cdot z \end{cases}$$

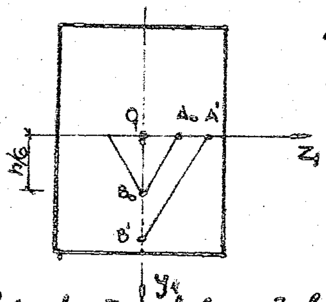
Excentricitățile forței axiale față de cele două axe ale sistemului sunt:

$$e_z = \frac{M_z}{N} = \frac{P\cdot y}{P+G} \quad ; \quad e_y = \frac{P\cdot z}{P+G} \qquad (2)$$

Se introduc coordonatele z și y din relațiile (2) în ecuația (1). Se obține ecuația dreptei pe care se deplasează rezultanta N.: $\frac{2}{b}\cdot\frac{P+G}{P}\cdot e_y + \frac{2}{h}\cdot\frac{P+G}{P}\cdot e_z = 1$ (3)

Ecuația (3) este ecuația unei drepte $A'B'$ din planul

$O_1 y_1 z_1$ astfel încît : $\overline{O_1A'} = \frac{b}{2} \cdot \frac{P}{G+P}$; $\overline{O_1B'} = \frac{h}{2} \cdot \frac{P}{P+G}$.
Dreapta $A'B'$ este paralelă cu dreapta AB și cu dreapta A_0B_0 care reprezintă limita sîmburelui central.

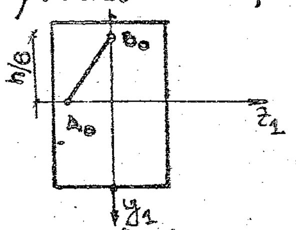


Pentru ca pe secțiunea de la baza corpului prismatic să nu apară întinderi, trebuie ca punctul de aplicație a lui N să se afle în interiorul sîmburelui central al secțiunii $O_1A' \leq OA_0$ și $O_1B' \leq OB_0$ sau
$\frac{b}{2} \cdot \frac{P}{P+G} \leq \frac{b}{6}$ și $\frac{h}{2} \cdot \frac{P}{P+G} \leq \frac{h}{6}$.
Cele două relații sînt echivalente și de aici rezultă :
$\frac{P}{P+G} \leq \frac{1}{3}$ sau $\frac{P+G}{P} \geq 3$. ; $1 + \frac{G}{P} \geq 3$ și deci
$$\frac{G}{P} \geq 2 .$$

② Dacă forța P are orientarea în sus, eforturile în centrul de greutate al bazei corpului vor fi :

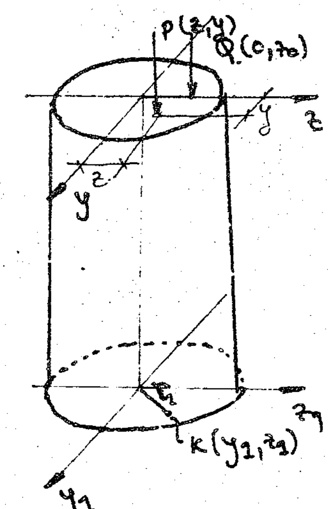
$$\begin{cases} N = -(G-P) \\ M_z = P \cdot y \\ M_y = -P \cdot z \end{cases}$$

Excentricitățile forței axiale față de cele două axe ale sistemului sînt : $e_z = \frac{M_z}{N} = -\frac{P \cdot y}{G-P}$; $e_y = \frac{M_y}{N} = -\frac{P \cdot z}{G-P}$.
Ecuația (3) a dreptei pe care se deplasează rezultanta forțelor normale N, devine :
$$\frac{2}{b} \cdot \frac{G-P}{P} \cdot e_y + \frac{2}{h} \cdot \frac{G-P}{P} e_z = -1 \quad (4)$$
Ecuația (4) reprezintă ecuația unei drepte $A''B''$ care este paralelă cu AB și A_0B_0, astfel încît :
$\overline{O_1A''} = -\frac{b}{2} \cdot \frac{P}{G-P}$ și $O_1B'' = -\frac{h}{2} \cdot \frac{P}{G-P}$



Pentru ca pe secțiunea de bază să nu apară întinderi, trebuie ca punctul de aplicație al lui N să se afle în interiorul sîmburelui central.
$|O_1A''| \leq |A_0O_1|$ sau $\frac{b}{2} \cdot \frac{P}{G-P} \leq \frac{b}{6}$; $\frac{G-P}{P} \geq 3$ sau $\frac{G}{P} \geq 4$.

PROBLEMA NR 44



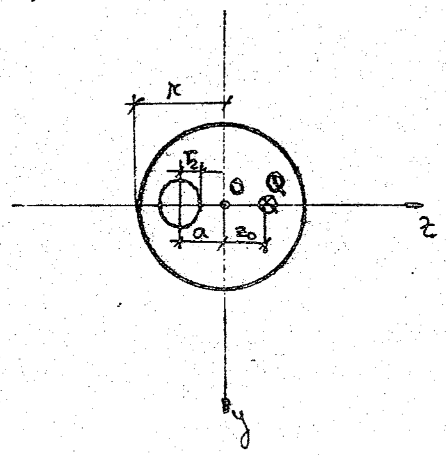
Blocul cilindric circular din figură are greutatea G și este acționat pe fața superioară de o forță fixă Q cu punctul de aplicație pe axa Oz și de forța P de poziție variabilă, de coordonate z, y. Se cere să se determine zona pe care se poate deplasa forța $P(z,y)$ astfel încît pe secțiunea de la baza blocului să nu existe eforturi de întindere, unitare.

Rezolvare :

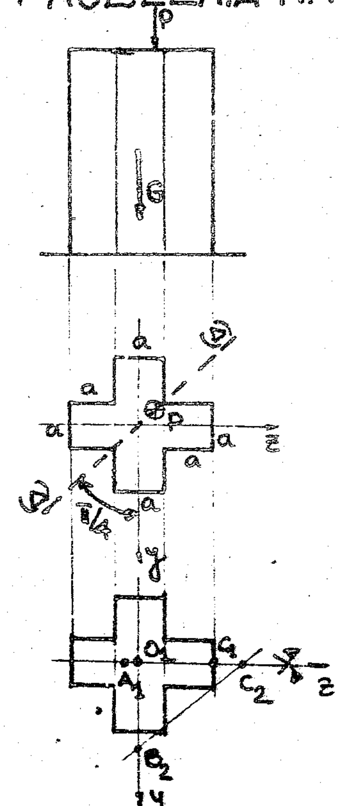
Se reduc încărcările blocului cilindric în centrul de greutate al bazei sale.
$N = -(P+Q+G)$ $\quad M_z = -P \cdot y$ $\quad M_y = P z + Q \cdot z_0$
Excentricitățile forței axiale față de axele sistemului sînt : $e_z = y_1 = \frac{M_z}{N} = \frac{P \cdot y}{P+Q+G}$; $e_y = z_1 = -\frac{M_y}{N} = \frac{P \cdot z}{P+Q+G} + \frac{Q \cdot z_0}{P+Q+G}$ (1)

Punctul „K" de aplicație a rezultantei N, avînd coordonatele y_1, z_1, trebuie să se afle în interiorul sîmburelui central care este un cerc cu centrul în punctul O_1 și raza $r_0 = \frac{r}{4}$.
Distanța r_1 din centrul O_1 pînă la punctul K trebuie să satisfacă relația :
$$r_1 \leq r_0 \; ; \; \sqrt{y_1^2 + z_1^2} \leq r_0 \; ; \; y_1^2 + z_1^2 \leq r_0^2 \quad (2)$$
Notînd cu : $R = P+Q+G$ și înlocuind în (2) coordonatele y_1 și z_1 se obține :
$$\frac{P^2}{R^2} y^2 + \frac{P^2}{R^2} z^2 + \frac{Q^2}{R^2} z_0^2 + 2 \frac{PQ}{R^2} z \cdot z_0 \leq \frac{r^2}{16}$$
sau
$$y^2 + z^2 + 2 \frac{Q}{P} z \cdot z_0 + \frac{Q^2}{P^2} z_0^2 \leq \frac{R^2}{P^2} \cdot \frac{r^2}{16} = r_2^2$$
și deci : $y^2 + \left(z + \frac{Q}{P} z_0 \right.$ [illegible]

Rezultă deci, că pentru ca pe secțiunea de la baza blocului cilindric să nu apară eforturi unitare de întindere, trebuie ca forța P să fie aplicată pe fața unui cerc de rază $r_z = \frac{R}{P} \cdot \frac{r}{16}$, având centrul pe axa Oz, în punctul de abscisă: $a = -\frac{Q}{P} \cdot z_0$



PROBLEMA NR 45



Stâlpul din figură are greutatea $G = 0,7P$ și este solicitat, la partea superioară de forța P.

a) Să se determine conturul sâmburelui central al secțiunii de bază.

b) Intervalul de pe dreapta (Δ) pe care se poate deplasa forța P astfel încât pe secțiunea de bază a stâlpului să nu existe întinderi.

<u>Rezolvare:</u>

a) Se determină caracteristicile geometrice ale secțiunii.

$$I_z = I_y = \frac{a(3a)^3}{12} + \frac{2a(a)^3}{12} = \frac{29a^4}{12};$$

$$A = 5a^2; \quad i_z^2 = i_y^2 = \frac{29}{60}a^2.$$

Secțiunea fiind dublu simetrică se vor calcula numai două vârfuri ale sâmburelui central: corespunzătoare dreptelor D_1 și D_2. Ecuația axei neutre este:

$$\frac{e_z}{i_z^2} \cdot y + \frac{e_y}{i_y^2} \cdot z + 1 = 0.$$

Intersecțiile axei neutre cu axele Oz și Oy vor fi:

cu axa Oy: $y = -\frac{i_z^2}{e_z}$; $z = 0$

cu axa Oz: $y = 0$; $z = -\frac{i_y^2}{e_y}$.

<u>Pentru dreapta D_1:</u> $y_{B_1} = \infty$; $z_{B_1} = 0$; $z_{C_1} = 1,5a$; $y_{C_1} = 0$.

Prin identificare rezultă:

$-\frac{i_z^2}{e_{z_1}} = \infty$, deci $e_{z_1} = 0$; $-\frac{i_y^2}{e_{y_1}} = 1,5a$, deci $e_{y_1} = -\frac{\frac{29}{60}a^2}{\frac{3}{2}a} = -\frac{29}{90}a$.

Coordonatele punctului A_1, punctul de aplicație al rezultantei forțelor axiale, corespunzător axei neutre D_1 sînt deci: $\left(0; -\frac{29}{90}a\right)$.

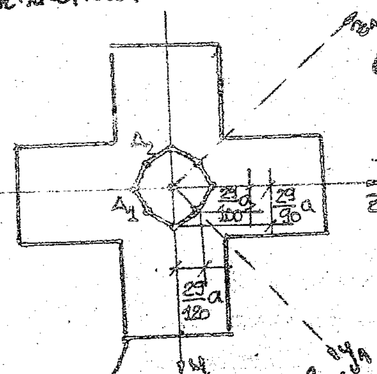
<u>Pentru dreapta D_2</u>: $y_{B_2}=2a$; $z_{B_2}=0$; $y_{C_2}=0$; $z_{C_2}=2a$.

Prin identificare rezultă:

$$\frac{-i_z^2}{e_{z_2}}=2a\text{, deci } e_{z_2}=-\frac{\frac{29}{60}a^2}{2a}=-\frac{29}{120}a\text{; analog}$$

$$e_{y_2}=-\frac{29}{120}a.$$

Coordonatele punctului A_2 (de aplicație a rezultantei pentru axa neutră D_2) sînt deci: $\left(-\frac{29}{120}a, -\frac{29}{120}a\right)$. Celelalte puncte ale sîmburelui central se obțin prin simetrie.



b) Se calculează eforturile pe secțiunea de bază a stîlpului în sistemul de axe ortogonale $z O y_1 z_1$ (axa $Oz_1 \equiv \Delta$).

$$\begin{cases} N=-(P+G)=-1{,}7P. \\ M_{z_1}=0. \\ M_{y_1}=P\cdot z_1 \end{cases}$$

Excentricitățile față de cele două axe sînt:

$$e_{z_1}=\frac{M_{z_1}}{N}=0\text{; } e_{y_1}=-\frac{M_{y_1}}{N}=\frac{P\cdot z_1}{P+G}=\frac{z_1}{1{,}7}$$

deci $z_1=1{,}7\,e_{y_1}$.

Pentru ca pe secțiunea de la baza stîlpului să nu apară întinderi trebuie ca e_{y_1} să respecte condiția:

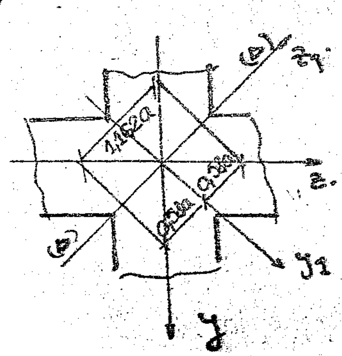
$$-\sqrt{2}\,\frac{29}{120}a\le e_{y_1}\le\sqrt{2}\cdot\frac{29}{120}a$$

$$\text{sau } -\sqrt{2}\cdot 1{,}7\cdot\frac{29}{120}a\le z_1\le\sqrt{2}\cdot 1{,}7\cdot\frac{29}{120}a$$

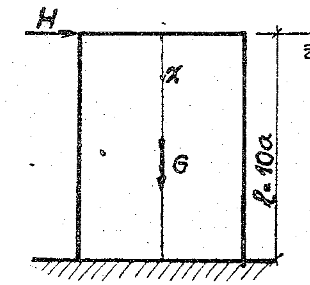
Numeric condiția este:

$$-0{,}581a\le z_1\le 0{,}581a.$$

Intervalul de pe dreapta (Δ) pe care se poate deplasa P este arătat pe figură.



PROBLEMA NR 46

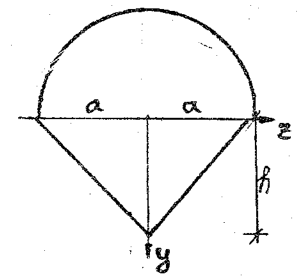


Masivul din figură are greutatea G și este acționat de o forță orizontală H, acționînd paralel cu axa z, la fața superioară a sa.

Se cere:

1) Care este raportul $\frac{h}{a}$ astfel încît axele z și y indicate în figură să fie axe centrale principale de inerție ale secțiunii transversale?

2) Care este raportul minim $\frac{G}{H}$ astfel încît pe secțiunea de la baza fundației să nu apară întinderi?



<u>Rezolvare</u>:

1) Axa Oy fiind axă de simetrie a secțiunii este axă centrală principală de inerție. Pentru ca și axa Oz să fie axă centrală principală, ea trebuie să treacă prin centrul de greutate al secțiunii, adică centrul de greutate G să coincidă cu punctul O care este centrul semicercului.

În acest caz momentul static al secțiunii față de axa O_z trebuie să fie nul.

$$-\frac{\pi a^2}{2}\cdot\frac{4a}{3\pi}+2\,\frac{a\cdot h}{2}\cdot\frac{h}{3}=0\text{ ; } h^2=2a^2\text{ ; } h=\sqrt{2}\cdot a$$

$$\text{deci : } \frac{h}{a}=\sqrt{2}$$

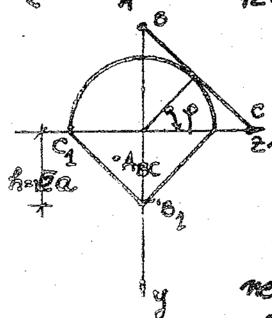
2) Se determină caracteristicile geometrice ale secțiunii

$$I_z=\frac{\pi(2a)^4}{2\cdot 64}+2\,\frac{a\cdot h^3}{12}=a^4\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$I_y=\frac{\pi(2a)^4}{128}+2\,\frac{h a^3}{12}=a^4\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

$$A = \frac{\pi a^2}{2} + 2\,\frac{a\cdot \ell}{2} = a^2\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}\right)$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = a^2\,\frac{3\pi+8\sqrt{2}}{12\pi+24\sqrt{2}} \quad ; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = a^2\,\frac{3\pi+4\sqrt{2}}{12\pi+24\sqrt{2}}$$



Pentru determinarea sîmburelui central al secțiunii masivului, se analizează separat cazul unei tangente curente BC la semicerc ca fiind axă neutră pentru secțiune, apoi se analizează cazul uneia din laturi B_1C_0 ca fiind axă neutră.

Ecuația dreptei BC trebuie să fie:

$$\frac{e_z}{i_z^2}\,y + \frac{e_y}{i_y^2}\,z + 1 = 0 \qquad (1)$$

cu tăieturile cu axele Oz și Oy : $z_C = -\dfrac{i_y^2}{e_y}$; $y_B = -\dfrac{i_z^2}{e_z}$ (2)

De asemenea :

$$\overline{OC} = z_C = \frac{a}{\cos\varphi}\ ,\ \text{iar}\ \ \overline{OB} = y_B = -\frac{a}{\sin\varphi} \qquad (3)$$

Identificînd relațiile (2) și (3) se obține :

$$e_y = -\frac{i_y^2}{a}\cos\varphi \quad ; \quad e_z = \frac{i_z^2}{a}\sin\varphi \qquad (4)$$

Expresiile (4) sînt deci coordonatele punctului A_{BC} de aplicație a forței N în condițiile cînd axa neutră este tangentă la acest contur și este chiar dreapta BC.

Dacă se elimină unghiul φ între expresiile (4) se obține:

$$\frac{e_z^2 a^2}{i_z^4} + \frac{e_y^2\cdot a^2}{i_y^4} = 1 \qquad (5)$$

Expresia (5) reprezintă ecuația curbei descrisă de A_{BC} adică sîmburele central corespunzător semicercului. Ecuația reprezintă o elipsă cu semiaxele: $\dfrac{i_z^2}{a}$ și $\dfrac{i_y^2}{a}$.

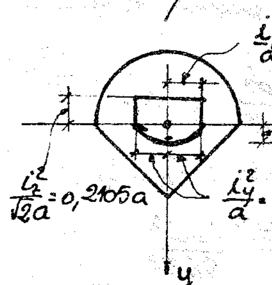
Se consideră drept axă neutră dreapta B_1C_1 avînd tăieturile cu cele două axe Oy și Oz:

$$y_{B_1} = \sqrt{2}\cdot a \quad \text{și} \quad z_{C_1} = -a$$

Identificînd aceste valori cu expresiile (2) se obține:

$$e_{y_1} = \frac{i_y^2}{a} \quad ; \quad e_{z_1} = -\frac{i_z^2}{\sqrt{2}\,a} \qquad (6)$$

Relațiile (6) reprezintă coordonatele punctului $A_{B_1C_1}$ de aplicație a forței N pentru ca axa neutră să fie dreapta B_1C_1. Cealaltă latură a triunghiului conduce la Oz o poziție simetrică a punctului.



Reducînd încărcările masivului în centrul de greutate al secțiunii bazei se obține torsorul:

$$N = -G \quad ; \quad M_z = 0 \quad ; \quad M_y = H\cdot\ell$$

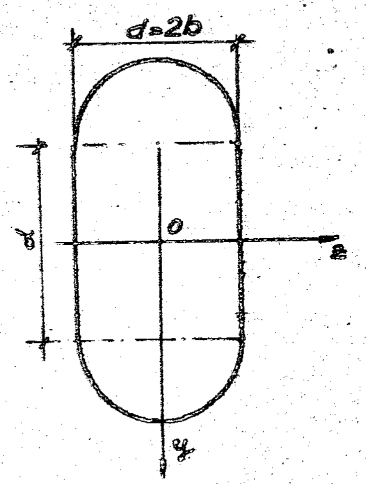
$$e_z = \frac{M_z}{N} = 0 \quad ; \quad e_y = -\frac{M_y}{N} = \frac{H\cdot\ell}{G}$$

Rezultanta N se află pe axa Oz ($e_z=0$). Pentru a rămîne în interiorul sîmburelui central trebuie ca:

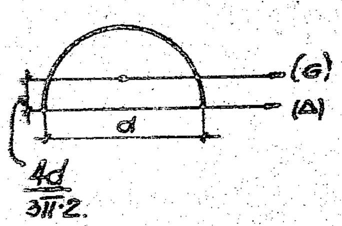
$$e_y = \frac{H\cdot\ell}{G} \le 0{,}2119a \quad ; \quad \frac{G}{H} \ge \frac{1}{0{,}2119}\,\frac{\ell}{a}$$

deci : $\dfrac{G}{H} \ge 4{,}7192$

PROBLEMA NR 47



Secțiunea unei pile de pod este arătată în figură. Să se determine momentele de inerție I_z și I_y, precum și conturul sâmburelui central al secțiunii (prin expresiile analitice ale bucăților de contur)



Rezolvare:

Se știe că pentru semicerc avem datele:

$$I_\Delta = \frac{\pi d^4}{128} \; ; \; A = \frac{\pi d^2}{8}$$

Se poate scrie: $I_G = I_\Delta - A\left(\frac{4d}{6\pi}\right)^2 =$

$$= \frac{\pi d^4}{128} - \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{16 d^2}{36\pi^2}$$

$$I_G = I_{z\,propriu} = \frac{\pi d^4}{128} - \frac{d^4}{18\pi}$$

Deci pentru întreaga secțiune:

$$I_z = 2\left[\frac{\pi d^4}{128} - \frac{d^4}{18\pi} + \frac{\pi d^2}{8}\left(\frac{d}{2} + \frac{4d}{6\pi}\right)^2\right] + \frac{d^4}{12} = \frac{d^4}{4}\left[1 + \frac{10\pi}{32}\right]$$

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64} + \frac{d^4}{12} = \frac{d^4}{12}\left[1 + \frac{3}{16}\pi\right]$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} + d^2 = d^2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{d^4}{4}\left(1 + \frac{5}{16}\pi\right)}{d^2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)} = d^2\,\frac{16 + 5\pi}{64 + 6\pi}$$

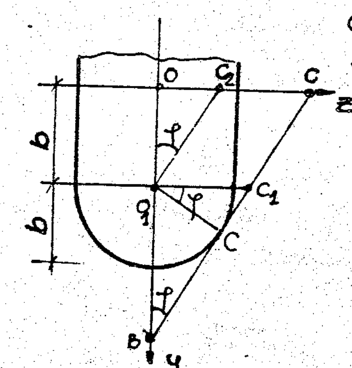
$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{d^4}{4}\left(1 + \frac{3}{16}\pi\right)}{d^2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)} = d^2\,\frac{16 + 3\pi}{192 + 48\pi}$$

În funcție de $b = \frac{d}{2}$, caracteristicile geometrice de mai sus se scriu după efectuarea calculelor:

$$I_z = b^4\,\frac{32 + 10\pi}{8} \cong 7{,}925\,b^4 ; \; I_y = b^4\,\frac{16 + 3\pi}{12} \cong 2{,}118\,b^4$$

$$A = b^2(4 + \pi) \cong 7{,}14\,b^2 \; ; \; i_z^2 = 1{,}11\,b^2 \; ; \; i_y^2 = 0{,}295\,b^2$$

Pentru determinarea sâmburelui central se trasează o tangentă curentă definită de unghiul φ din figură. Dacă această dreaptă este axă neutră, se caută punctele de tăiere ale sale, B și C, cu cele două axe ale sistemului de axe centrale principale.



$$\overline{O_1C_1} = \frac{b}{\cos\varphi} = \overline{C_2C}$$

$$\overline{OC_2} = b\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

$$(1) \quad \overline{OC} = b\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{b}{\cos\varphi} = b\,\frac{1 + \sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\overline{OB} = \overline{OC}\,\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi} = b\,\frac{1 + \sin\varphi}{\sin\varphi}$$

Ecuația axei neutre este:

$$\frac{e_z}{i_z^2}\,y + \frac{e_y}{i_y^2}\,z + 1 = 0$$

Punctele de tăiere B și C sînt definite de relațiile:

$$y_B = -\frac{i_z^2}{e_z} \; ; \quad z_C = -\frac{i_y^2}{e_y} \quad (2)$$

Identificînd relațiile (1) și (2) rezultă:

$$-\frac{i_z^2}{e_z} = b\,\frac{1 + \sin\varphi}{\sin\varphi} \; ; \; -\frac{i_y^2}{e_y} = b\,\frac{1 + \sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Se obțin apoi coordonatele punctului A de aplicație a forței N:

$$y_A = e_z = -\frac{i_z^2}{b}\,\frac{\sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \; ; \; z_A = e_y = -\frac{i_y^2}{b}\,\frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi}$$

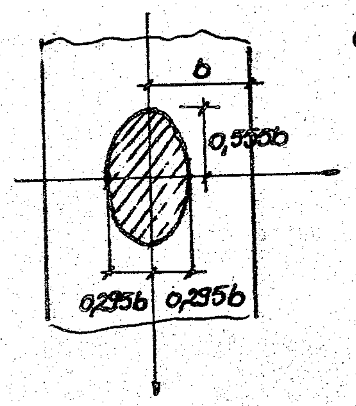
Dacă se transcriu aceste relații în funcție de unghiul $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ se obține:

$$y_A = e_z = -\frac{i_z^2}{2b}\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{\psi}{2}\right) ; \; z_A = e_y = -\frac{i_y^2}{b}\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}$$

Eliminînd $\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}$ între aceste două relații se obține:

$$y_A = -\frac{i_z^2}{2b}\left(1-\frac{z_A^2\, b^2}{i_y^4}\right) \qquad (3)$$

Expresia (3) reprezintă ecuația conturului sâmburelui central corespunzătoare conturului semicircular din partea inferioară a secțiunii. Cum ultima tangentă la cerc (pentru $\varphi = 0$; $\psi = \frac{\pi}{2}$) coincide și cu latura verticală a secțiunii, această ecuație (3) epuizează, de fapt, și laturile verticale.



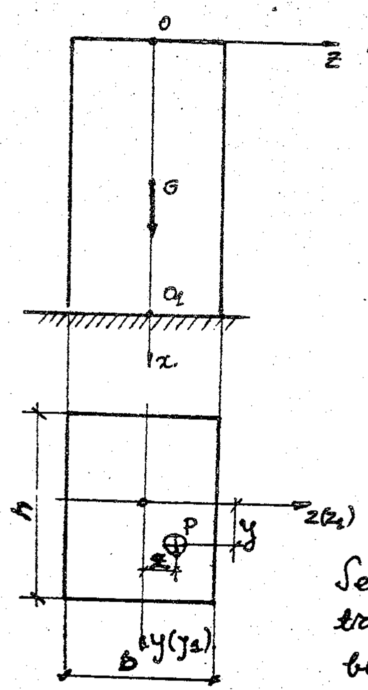
Curba de contur a sâmburelui central este o parabolă. Înlocuind cu valori numerice se obține expresia:

$$y_A = -0{,}555b\left[1-\left(\frac{z_A}{0{,}295b}\right)^2\right]$$

Completând, apoi, prin simetrie și partea superioară se obține conturul sâmburelui central al acestei secțiuni.

PROBLEMA NR. 48.

Pentru un bloc de secțiune dreptunghiulară de greutate G și acționat la fața superioară de o forță cu poziție verticală P. Se cere să se stabilească raportul minim al forțelor G și P $\left(\frac{G}{P}\right)$, pentru ca pentru orice poziție a forței P pe suprafața superioară a blocului, pe secțiunea de bază a blocului să existe numai compresiune.



Rezolvare:

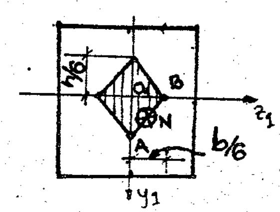
Se reduc încărcările în centrul de greutate O_1 al bazei blocului.

$$N = -(P+G)$$
$$M_z = -P\cdot y \qquad (1)$$
$$M_y = P\cdot z$$

Poziția rezultantei N a forțelor axiale, pe suprafața de bază a blocului este dată de excentricitățile sale față de cele două axe z_1 și y_1.

$$e_z = y_1 = \frac{M_z}{N} = \frac{P}{P+G}\,y \qquad (2)$$
$$e_y = z_1 = -\frac{M_y}{N} = \frac{P}{P+G}\,z$$

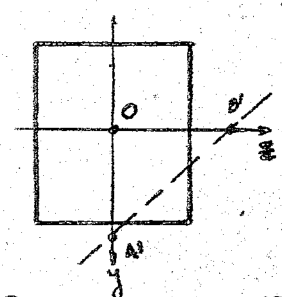
La limită aceste coordonate trebuie să descrie conturul sâmburelui central. Datorită simetriei se analizează numai una din cele 4 ramuri ale sâmburelui central (AB). Când forța axială se deplasează pe AB, (y_1, z_1) descriu ecuația:



$$\frac{6y_1}{h} + \frac{6z_1}{b} = 1 \qquad (3)$$

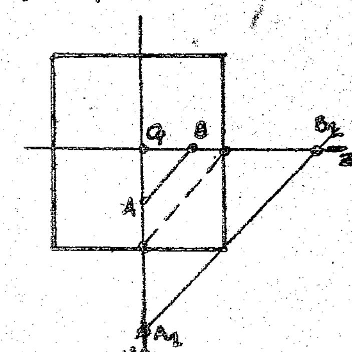
Înlocuind în ecuația (3), ordonatele z_1 și y_1 din expresiile (2) se obține dreapta pe care se deplasează forța P la fața superioară care corespunde deplasării forței N de la baza blocului.

$$\frac{6}{h}\cdot\frac{P}{P+G}\,y + \frac{6}{b}\cdot\frac{P}{P+G}\,z = 1 \qquad (4)$$



Se obține astfel o dreaptă A'B' paralelă cu AB dar mai depărtată de O în raportul $\frac{P+G}{P}$. De fapt zona OA'B' arată punctele în care dacă se aplică forța axială la baza blocului se obțin numai eforturi de compresiune.

Pentru ca această zonă să cuprindă toate punctele suprafeței superioare, trebuie ca dreapta A'B' să ocupe poziția limită $A_1B_1 \parallel AB$.



$$\overline{O_1B_1} = \overline{O_1B}\cdot\frac{P+G}{P} = \frac{b}{6}\cdot\frac{P+G}{P}$$

$$\overline{O_1A_1} = \overline{O_1A}\cdot\frac{P+G}{P} = \frac{h}{6}\cdot\frac{P+G}{P}$$

Dreapta A_1B_1 trebuie să treacă prin colțul secțiunii și de aceea rezultă:

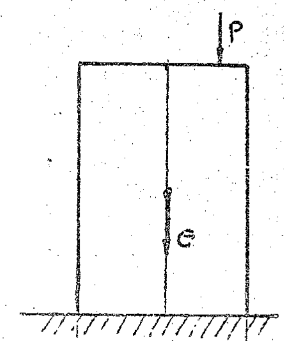
$$\overline{O_1B_1} = \frac{2b}{2} = b\ ;\quad O_1A_1 = 2\cdot\frac{h}{2} = h.$$

De aici rezultă: $\frac{b}{6}\cdot\frac{P+G}{P} = b$; sau $1+\frac{G}{P} = 6$;

și deci $\frac{G}{P} = 5$.

Evident pentru $\frac{G}{P} \geq 5$ condiția este automat îndeplinită, deoarece se pleacă de la condiția $\overline{O_1B_1} \geq b$.

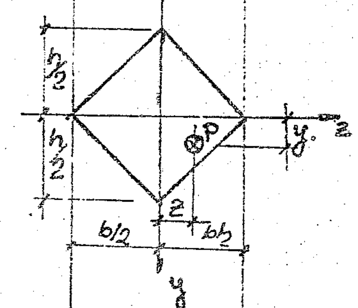
PROBLEMA NR 49

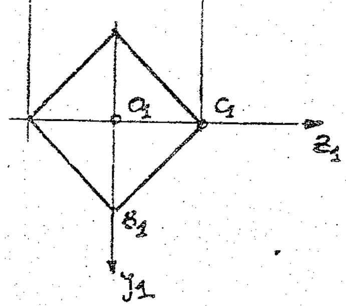


Un bloc de greutate G având secțiune romboică este acționat la fața superioară de o forță P având o poziție verticală.

1) Să se determine sâmburele central al secțiunii transversale de bază.

2. Să se determine raportul minim $\frac{G}{P}$ astfel încât oricum ar fi plasată forța P în interiorul suprafeței superioare, să nu avem întinderi pe secțiunea de la baza blocului.





Rezolvare:

1. Pentru determinarea sâmburelui central se consideră, pentru început, dreapta B_1C_1 dreaptă neutră tangentă la secțiune:

$$\overline{O_1C_1} = \frac{b}{2}\ ;\quad \overline{O_1B_1} = \frac{h}{2} \qquad (1)$$

Ecuația ei este: $\frac{e_z}{i_z^2}y + \frac{e_y}{i_y^2}z + 1 = 0$

iar tăieturile sale cu cele două axe sunt:

$$z_C = -\frac{i_y^2}{e_y}\ ;\quad y_B = -\frac{i_z^2}{e_z} \qquad (2)$$

Identificând (1) cu (2) rezultă poziția necesară a forței N pentru a conduce la axa neutră B_1C_1

$$-\frac{i_y^2}{e_y} = \frac{b}{2}\ ;\quad -\frac{i_z^2}{e_z} = \frac{h}{2} \quad (3)$$

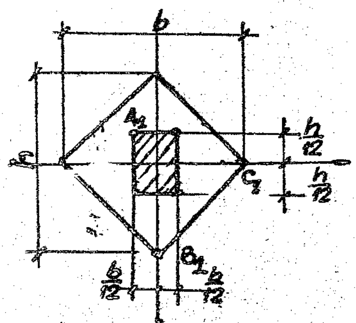
În cazul de față: $I_z = 4\cdot\frac{b}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^3\frac{1}{12} = \frac{1}{48}bh^3$;

$I_y = \frac{1}{48} h b^3$; $A = 4 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{bh}{2}$; $i_z^2 = \frac{h^2}{24}$; $i_y^2 = \frac{b^2}{24}$ (4)

Din (3) și (4) rezultă poziția forței N (definind un punct) A_1 al sâmburelui central corespunzător laturii $B_1 C_1$)

$$(e_y)_1 = -\frac{2 i_y^2}{b} = -\frac{2}{b} \frac{1}{24} b^2 = -\frac{b}{12}; \quad (e_z)_1 = -\frac{h}{12}$$

Situația este identică pentru cele 4 laturi ale rombului. Se obțin patru puncte ale sâmburelui central care se unesc cu drepte.



2. Reducând forțele blocului în centrul de greutate al secțiunii de la bază se obțin:

$$N = -(P+G)$$
$$M_z = -P \cdot y$$
$$M_y = P \cdot z.$$

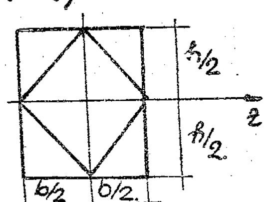
Forța N are punctul de aplicație de coordonate:

$$e_z = y_1 = \frac{M_z}{N} = \frac{P}{P+G} y; \quad e_y = z_1 = -\frac{M_y}{N} = \frac{P}{P+G} z$$

Obligând forța N să parcurgă conturul sâmburelui central se obține curba pe care trebuie să se deplasege forța P la partea superioară a blocului. Sâmburele central fiind compus din patru laturi similare se analizează numai una, de exemplu: $y_1 = \frac{h}{12}$

Rezultă: $\frac{h}{12} = \frac{P}{P+G} y$ și deci $y = \frac{P+G}{P} \cdot \frac{h}{12}$

Repetând acest calcul de patru ori, rezultă că zona pe care trebuie să se afle forța P este de forma sâmburelui central amplificat cu raportul $\frac{P+G}{P}$. Pentru ca această zonă să cuprindă toate punctele suprafeței superioare trebuie ca dreptunghiul să fie circumscris

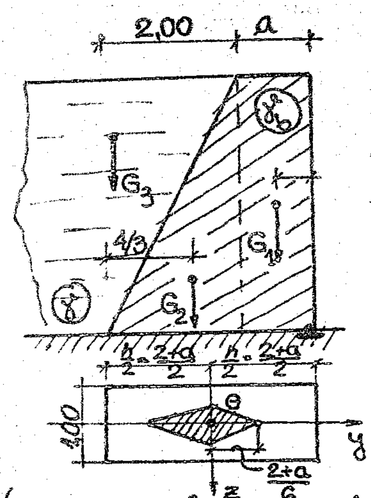


sâmburelui central.

$$y = \frac{h}{2} = \frac{P+G}{P} \cdot \frac{h}{12}$$

$$G = 1 + \frac{G}{P}; \quad \text{deci } \frac{G}{P} = 5.$$

Aceasta e valoarea minimă a raportului $\frac{G}{P}$, deoarece pentru $\frac{G}{P} > 5$ condiția e satisfăcută cu atât mai mult.



PROBLEMA NR. 50

Pentru barajul din figură se cere:

1. Să se determine mărimea minimă a lui „a" astfel încît pe talpa fundației zidului să nu apară întindere și în acest caz să se determine și σ_{max}.
2. Să se determine a, considerînd o zonă activă pe talpa fundației egală cu 0,75 din (a+2) și în acest caz să se determine σ_{max}.

(Se dau: $\gamma_b = 2,5\ tf/m^3$; $\gamma = 1\ tf/m^3$).

① Trebuie reduse toate încărcările barajului în centrul de greutate al tălpii fundației sub forma unui moment încovoietor și a unei forțe de compresiune.

$$G_1 = 4 \cdot a \cdot 1 \cdot 2,5 = 10a\ tf.$$
$$G_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2,5 = 10\ tf$$
$$G_3 = \frac{2 \cdot 4}{2} \cdot 1,0 = 4\ tf.$$
$$N_G = G_1 + G_2 + G_3 = 10a + 10 + 4 = 14 + 10a.$$
$$M_G = G_1 \cdot 1 - G_2\left(\frac{3a-2}{6}\right) - G_3\left(\frac{2+a}{2} - \frac{2}{3}\right) + \gamma \cdot \frac{4 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 =$$
$$= 3a + \frac{38}{3}.$$

Pentru ca talpa fundației să nu fie întinsă trebuie ca punctul de aplicație al forței de compresiune N_G, să se găsească cel puțin la limita sîmburelui central, deci excentricitatea forței axiale să fie cel puțin egală cu $\frac{2+a}{6}$

$$e = \frac{M_G}{N_G} = \frac{3a + \frac{38}{3}}{10a + 14}, \quad \text{deci} \quad \frac{3a + \frac{38}{3}}{10a + 14} = \frac{2+a}{6}$$

$$18a + 76 = (2+a)(10a+14); \quad 10a^2 + 16a - 48 = 0.$$

rezultă: $a_{1,2} = \dfrac{-16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \cdot 10 \cdot 48}}{2 \cdot 10} = \begin{cases} a_1 = 1,53m \\ a_2 = -3,13m \end{cases}$

Deci valoarea minimă a lui a pentru ca pe talpa fundației să nu apară întinderi este $a = 1,53m$.

Efortul unitar maxim va fi în acest caz:

$$\sigma_{max} = \frac{2N}{b \cdot h} = \frac{2(10 \cdot 1,53 + 10)}{1(2 + 1,53)} = 14,33\ tf/m^2$$

② Dacă lungimea zonei active pe talpa fundației este: $d = 0,75(2+a) = \frac{3}{4}(2+a)$, atunci $c = \frac{d}{3} = \frac{3}{4 \cdot 3}(2+a) = \frac{2+a}{4}$.

Excentricitatea forței de compresiune va fi:

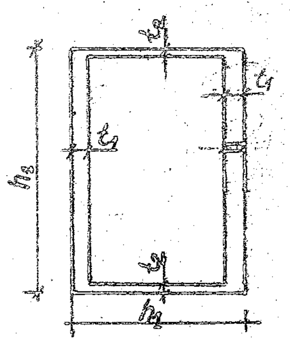
$$e = \frac{M_G}{N_G} = \frac{h}{2} - c \quad \text{sau}$$

$$\frac{3a + \frac{38}{3}}{10a + 14} = \frac{2+a}{2} - \frac{2+a}{4}$$

rezultă: $10a^2 + 22a - 22,67 = 0$; $a = 0,76\ m$

$$\sigma_{max} = \frac{2N}{A_{z.a.}} = \frac{2(10 \cdot 0,76 + 10)}{\frac{3}{4}(2 + 0,76) \cdot 1} = 17,00\ tf/m^2.$$

PROBLEMA NR 51



O grindă supusă la torsiune liberă are secțiunea ca în figură, cu $h_1 = 60$ cm, $h_2 = 40$ cm, $t_1 = 20$ mm și $t_2 = 10$ mm

1. Să se determine momentul de torsiune admisibil (M^t_{adm})
2. Să se determine unghiul de torsiune specifică (θ)
3. Pentru cazul în care, secțiunea are în mijlocul înălțimii h_1 o fantă, să se determine mărimile de la punctele 1 și 2.

(Se dau: $G = 8\cdot10^5$ daN/cm^2; $\tau_a^t = 400$ daN/cm^2)

Rezolvare:

1. Secțiunea este cu pereți subțiri și contur închis pentru care: $M^t_{adm} = 2\Omega\, t_{min}\, \tau_a^t$ (formula lui Bredt)

unde: $\Omega = h_1 \cdot h_2 = 60\cdot40 = 2400$ cm^2 iar $t_{min} = 10$ mm $= 1$ cm

$$M^t_{adm} = 2\cdot2400\cdot1\cdot400 = 192\cdot10^4 \text{ daNcm} = 19,2 \text{ tfm}$$

2. Unghiul de torsiune specifică va fi:

$$\theta = \frac{M^t_{adm}}{GI_t}\ ; \quad \text{unde: } I_t = \frac{4\Omega^2}{\sum_i \left(\frac{s_i}{t_i}\right)}$$

sau: $$I_t = \frac{4\cdot2400^2}{2\left(\frac{60}{2}+\frac{40}{1}\right)} = 164571 \text{ cm}^2$$

deci: $$\theta = \frac{19,2\cdot10^5}{8\cdot10^5\cdot164571} = 1,45\cdot10^{-5}\ \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

3. Când secțiunea are o fantă în mijlocul înălțimii h_1, ea se transformă în secțiune cu pereți subțiri și cu contur deschis

În acest caz, momentul încovoietor admisibil la torsiunea liberă a barei va fi:

$$M^t_{adm} = W_t\, \tau_a\ ; \quad \text{unde } W_t = \frac{I_t}{t_{max}}$$

$$I_t = \frac{1}{3}\left(2\cdot42\cdot1^3 + 2\cdot59\cdot2^3\right) = 342,67 \text{ cm}^4$$

deci: $$W_t = \frac{342,67}{2} = 171,3 \text{ cm}^3$$

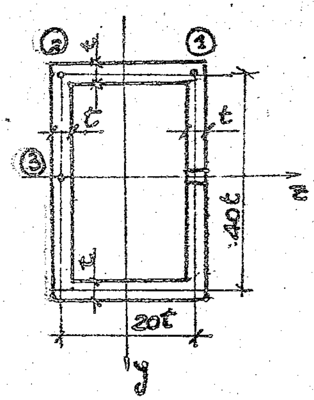
rezultă: $$M^t_{adm} = 171,3\cdot400 = 68520 \text{ daNcm} = 0,685 \text{ tfm}$$

Unghiul de torsiune specifică va fi în acest caz:

$$\theta = \frac{0,6852\cdot10^5}{8\cdot10^5\cdot342,67} = 2,49\cdot10^{-4} \text{ rad.}$$

Concluzia este că o mică tăietură a peretelui secțiunii, modifică foarte mult rigiditatea la torsiune a secțiunii. Secțiunea cu pereți subțiri și contur închis are o rigiditate mare la torsiune spre deosebire de secțiunea cu pereți subțiri și contur deschis cu aceleași dimensiuni. De aceea momentele de inerție la torsiune ale celor două secțiuni sunt mult diferite, momentele admisibile la torsiune și unghiurile de torsiune specifică de asemenea.

PROBLEMA NR 52



Pentru secțiunea din figură se cere să se determine centrul de încovoiere-torsiune. (Se permite calculul față de axa peretelui)

Rezolvare:

Centrul de încovoiere-~~torsiune~~ se va afla pe axa de simetrie ~~Oz~~. ~~Se consideră~~ forța tăietoare $T_{xy} = \cancel{T_z}$ ~~perpendiculară~~ pe axa Oz.

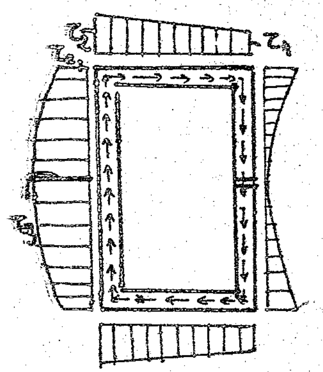
Caracteristicile geometrice ale secțiunii:

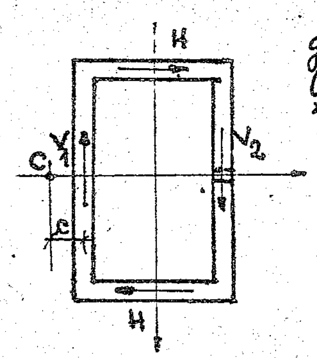
$$I_z = \frac{21t\,(41t)^3}{12} - \frac{19t\,(39t)^3}{12} = 26690t^4$$

$$S_1 = 20t\cdot t\cdot 10t = 200t^3$$

$$S_2 = 200t^3 + 20t\cdot t\cdot 20t = 600t^3$$

$$S_3 = 600t^3 + 200t^3 = 800t^3$$





Eforturile unitare tangențiale pe elementele secțiunii vor fi:

$$\tau_1 = \frac{TS_1}{t\,I_z} = 200\,\frac{Tt^2}{I_z}$$

$$\tau_2 = \frac{TS_2}{t\,I_z} = 600\,\frac{Tt^2}{I_z}$$

$$\tau_3 = \frac{TS_3}{t\cdot I_z} = \cancel{800\,\frac{Tt^2}{I_z}}$$

Rezultantele eforturilor unitare pe elementele secțiunii:

$$V_1 = 600\,\frac{Tt^2}{I_z}\cdot 40t\cdot t + \frac{2}{3}\,200\,\frac{Tt^2}{I_z}\,t\cdot 40t = 29333\,\frac{Tt^4}{I_z}$$

$$2V_2 = 2\cdot\frac{1}{3}\,200\,\frac{T\cdot t^2}{I_z}\,t\cdot 20t = 2667\,\frac{Tt^4}{I_z}$$

$$H = 400\,\frac{Tt^2}{I_z}\cdot t\cdot 20t = 8000\,\frac{T\cdot t^4}{I_z}$$

Calculând momentul rezultantelor față de punctul C, egalându-l cu zero se obține distanța c care dă poziția centrului de încovoiere-torsiune

$$M_C = -V_1\cdot c + 2V_2(c + 20t) + H\cdot 40t = 0$$

sau $-V_1c + 2V_2c + 40t\,V_2 + H\cdot 40t = 0$

dar: $-V_1c + 2V_2c = -c(V_1 - 2V_2) = -T\cdot c$

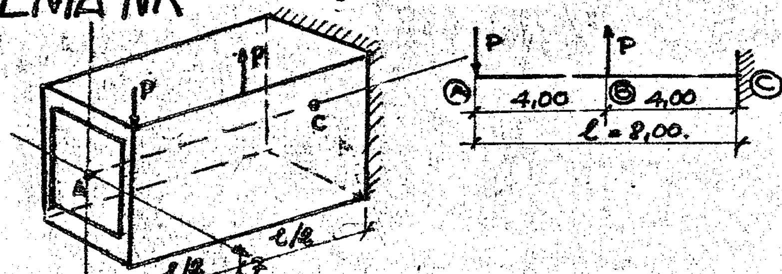
și deci: $M_C = -T\cdot c + 2V_2\cdot 20t + H\cdot 40t = 0$

$$-T\cdot c + 2667\,\frac{Tt^4}{I_z}\,20t + 8000\,\frac{T\cdot t^4}{I_z}\cdot 40t = 0$$

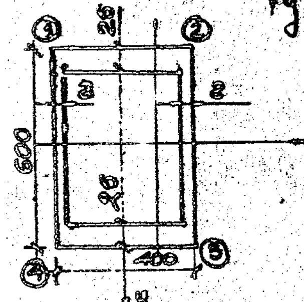
Înlocuind valoarea lui I_z se obține:

$$c = \left(\frac{2667\cdot 20}{26690} + \frac{8000\cdot 40}{26690}\right)t = 13{,}988t \approx 14t$$

PROBLEMA NR 53



1. Să se determine valoarea maximă a lui P astfel încît să fie respectată condiția: $\sigma_{echiv}^{III} \le 1,1\sigma_a$ și în care punct al barei ABC
2. Să se determine rotirea secțiunii barei în jurul axei x în punctul A și în punctul B.
3. Să se determine deplasarea totală a punctului 1 din secțiunea transversală A, prin componentele sale u_1, v_1, w_1.



Rezolvare

1. Diagramele de eforturi se vor trasa presupunînd pentru P exprimare în kN și ele sînt reprezentate în figură. Diagramele N, M_y și T_{xz} (T_y) sînt nule. Calculul caracteristicilor geometrice ale secțiunii:

$$I_z = \frac{40\cdot60^3}{12} - \frac{38,4\cdot55^3}{12} = 187600\ cm^4$$

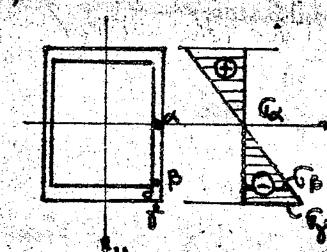
$$I_y = \frac{60\cdot40^3}{12} - \frac{55\cdot38,4^3}{12} = 60477\ cm^4$$

$$\Omega = 39,2 + 57,5 = 2254\ cm^2$$

$$I_t = \frac{4\Omega^2}{\oint\frac{ds}{\delta}} = \frac{4\cdot2254^2}{2\left(\frac{39,2}{2,5}+\frac{57,5}{0,8}\right)} = 116053\ cm^4$$

Secțiunea periculoasă este B st. Diagramele de tensiuni σ și τ în această secțiune sînt:

Efectul momentului M_z

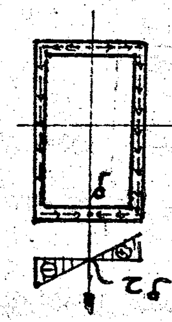


$$\sigma_\alpha = 0$$

$$\sigma_\beta = \frac{4P\cdot10^4}{187600}\cdot27,5 = 5,864P$$

$$\sigma_\gamma = \frac{4P\cdot10^4\cdot30}{187600} = 6,397P$$

Efectul forței tăietoare T_z



$$S_\alpha = 40\cdot2,5\cdot28,75 + 1,6\frac{27,5^2}{2} = 3480\ cm^3$$

$$S_\beta = 40\cdot2,5\cdot28,75 = 2875\ cm^3$$

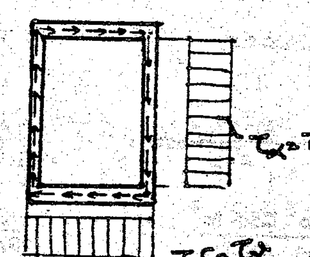
$$S_\gamma = 38,4\cdot2,5\cdot28,75 = 2760\ cm^3$$

$$\tau_\alpha = \frac{P\cdot10^2\cdot3480}{1,6\cdot187600} = 1,159P$$

$$\tau_\beta = \frac{P\cdot10^2\cdot2875}{1,6\cdot187600} = 0,957P$$

$$\tau_\gamma = \frac{P\cdot10^2\cdot2760}{5\cdot187600} = 0,294P$$

Efectul lui M_t



$$\tau_\alpha = \tau_\beta = \frac{0,2P\cdot10^4}{2\cdot2254\cdot0,8} = 0,555P$$

$$\tau_\gamma = \tau_\delta = \frac{0,2P\cdot10^4}{2\cdot2254\cdot2,5} = 0,177P$$

Secțiunea B stînga fiind secțiunea periculoasă pe grindă, se vor verifica cu teoria a III-a de rezistență punctele α, β, γ, δ de pe această secțiune. Proiecțiile eforturilor se vor lua pe partea dreaptă a secțiunii acolo unde efectele lui τ se adună.

punctul (α) $\sigma_{echiv}^{III} = \sqrt{\sigma^2+4\tau^2} = 2\tau_\alpha^{total} = 2(1,159+0,555)P = 3,418P$

punctul (β) $\sigma_{echiv}^{III} = P\sqrt{5,8635^2+4(0,957+0,555)^2} = 6,597P$

punctul (γ) $\sigma_{echiv}^{III} = P\sqrt{6,397^2+4(0,294+0,177)^2} = 6,466P$

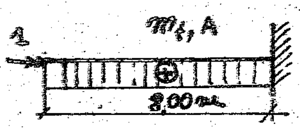
punctul (δ) $\sigma_{echiv}^{III} = P\sqrt{6{,}397^2 + 4\cdot 0{,}177^2} = 6{,}4067P$

Rezultă că punctul în care apare solicitarea maximă pentru σ_{echiv} este punctul β

$$\sigma_{echiv,\beta}^{III} = \sigma_{echiv,max} = 6{,}597P = 1{,}1\times 1600$$

Rezultă $P = 266{,}79\,KN = 26{,}68\,tf$

2) Pentru determinarea celor două rotiri φ_A și φ_B se va folosi formula Maxwell-Mohr și regula lui Vereșceaghin.



$$\varphi_A = \int \frac{M_t \cdot m_{t,A}}{GI_t}dx = -\frac{0{,}2P\cdot 10^4\cdot 400\cdot 1}{810.000\cdot 116053} =$$

$$= -0{,}0000085P = -0{,}0000085\cdot 266{,}79 = -0{,}00227 \text{ radiani}$$

Vectorul rotire este în sens invers față de sensul pozitiv al axei x

$$\varphi_B = 0$$

3) Deplasarea totală a punctului 1 din secțiunea A se poate calcula cu formula Maxwell Mohr și se compune din:

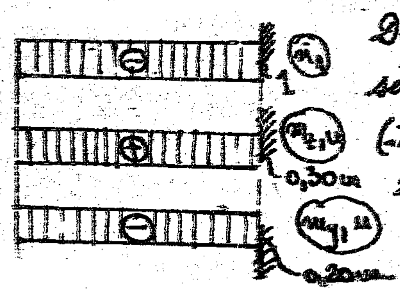
$$\overline{\Delta_1} = \overline{u_1} + \overline{v_1} + \overline{w_1}$$

Pentru calculul deplasării u_1, se încarcă grinda în punctul 1 cu o forță 1 în sensul axei x

$$u_1 = \int \frac{N\cdot n}{EA}dx + \int \frac{M^z m_z u}{EI_z}dx + \int \frac{M^y m_y u}{EI_y}dx =$$

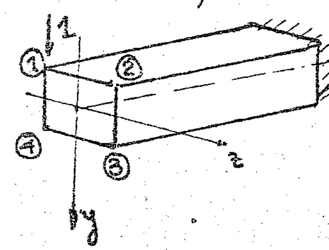
$$= -\frac{4\cdot P\cdot 10^4\cdot 4\cdot 10^2\cdot 0{,}30\cdot 10^2}{2\cdot 2{,}1\cdot 10^6\cdot 187600} - \frac{4P\cdot 10^4\cdot 4\cdot 10^2\cdot 0{,}30\cdot 10^2}{2{,}1\cdot 10^6\cdot 187600} =$$

$$= -0{,}483\,cm$$



Deplasarea u_1 se face în sens invers sensului pozitiv al axei x.
(în expresia s-a înlocuit P cu valoarea 266,79 KN)

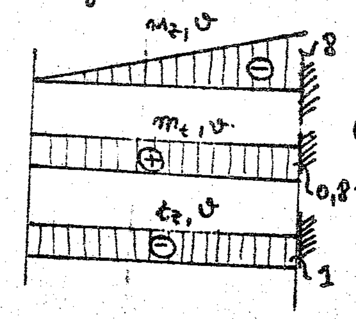
Pentru calculul deplasării v_1, se încarcă grinda în punctul 1, al secțiunii A cu o forță 1 paralelă cu axa y.



$$v_1 = \frac{4\cdot P\cdot 10^4\cdot 4\cdot 10^2\cdot 0{,}5\cdot \frac{2}{3}\cdot 4\cdot 10^2}{2{,}1\cdot 10^6\cdot 187600} + \frac{4\cdot P\cdot 10^4\cdot 4\cdot 10^2\cdot 6\cdot 10^2}{2{,}1\cdot 10^6\cdot 187600} +$$

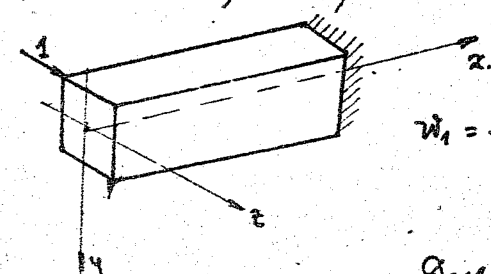
$$+ 1{,}2\,\frac{P\cdot 10^2\cdot 4\cdot 10^2\cdot 1}{810000\cdot 1{,}6\cdot 55} - \frac{0{,}2\cdot P\cdot 10^4\cdot 4\cdot 10^2\cdot 0{,}2\cdot 10^2}{810000\cdot 116053} =$$

$$= 8{,}08\,cm$$

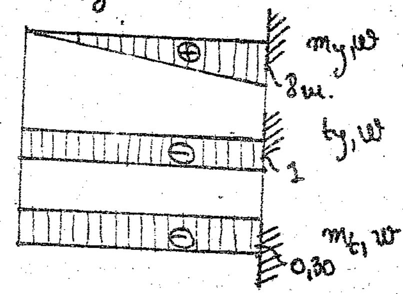


(în expresie s-a înlocuit P cu valoarea 266,79 KN)

Pentru calculul deplasării w_1, se încarcă grinda în punctul 1 al secțiunii A cu o forță 1 paralelă cu axa z.



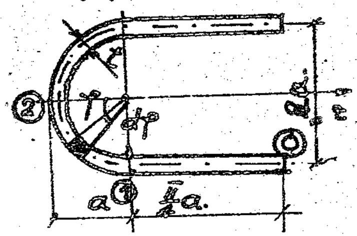
$$w_1 = \frac{0{,}2\cdot P\cdot 10^4\cdot 4\cdot 10^2\cdot 0{,}30\cdot 10^2}{810000\cdot 116053} = 0{,}066\,cm$$



Deplasarea totală a punctului 1 din secțiunea A este:

$$\Delta_1 = \sqrt{0{,}488^2 + 8{,}08^2 + 0{,}066^2} = 8{,}095\,cm$$

PROBLEMA NR 54



Să se determine centrul de încovoiere torsiune pentru profilul cu pereți subțiri din figură. (Se admite calculul față de axa medie a peretelui $t \ll a$).

Rezolvare:

Momentul de inerție pentru profilul din figură se compune din momentul de inerție al aripilor laterale I_z' și momentul de inerție al semicercului I_z''.

$$I_z = I_z' + I_z''$$

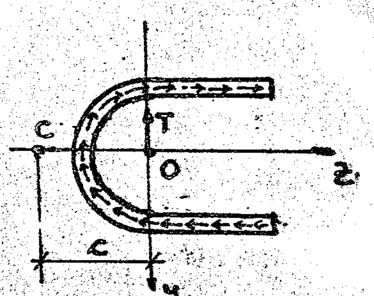
dar $I_z' \cong 2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot a\cdot t\cdot a^2 = \frac{\pi}{2}\cdot t\cdot a^3$.

$$I_z'' = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot a\cdot d\varphi\cdot a^2\sin^2\varphi = \frac{\pi\cdot t\cdot a^3}{2}$$

deci: $I_z = \pi t a^3$

Centrul de încovoiere torsiune pentru această secțiune se află pe axa de simetrie Oz. Secțiunea se presupune solicitată de o forță tăietoare $T_{zy} = T$, perpendiculară pe axa Oz.

Fluxul tensiunilor tangențiale pe secțiune va arăta ca în figură:



Pentru aripile laterale momentul static va fi în punctul (1):

$S' = S_1 = \frac{\pi}{4}\cdot a\cdot t\cdot a = \frac{\pi}{4}\cdot a^2\cdot t$,

iar pentru semicerc:

$S'' = \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} t\cdot a\cdot d\varphi\cdot a\sin\varphi = t\cdot a^2\cos\varphi$.

Deci momentul static total al secțiunii este suma celor două momente statice S' și S'':

$$S_\varphi = S' + S'' = \frac{\pi}{4}\cdot t\cdot a^2 + t\cdot a^2\cos\varphi.$$

sau

$$S_\varphi = ta^2\left(\frac{\pi}{4} + \cos\varphi\right)$$

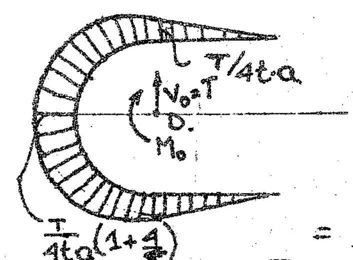
Pentru $\varphi = \frac{\pi}{2} \longrightarrow S_\varphi = S' = S_1 = \frac{\pi}{4}\cdot t\cdot a^2$

Pentru $\varphi = 0 \longrightarrow S_\varphi = S_2 = ta^2\cdot\frac{\pi+4}{4}$.

Efortul tangențial va fi:

$$\tau_\varphi = \frac{T\cdot t\cdot a^2\left(\frac{\pi}{4}+\cos\varphi\right)}{t\cdot I_z} = \frac{T\cdot t\cdot a^2}{t\cdot\pi\cdot t\cdot a^3}\left(\frac{\pi}{4}+\cos\varphi\right) = \frac{T}{\pi\cdot t\cdot a}\left(\frac{\pi}{4}+\cos\varphi\right),$$

iar diagrama este cea din figură:



Reducând eforturile în centrul O se obțin: V_0 și M_0.

$$V_0 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T}{\pi\cdot t\cdot a}\left(\frac{\pi}{4}+\cos\varphi\right)t\cdot a\cdot\cos\varphi\, d\varphi = \frac{2T}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{4}+\cos\varphi\right)\cos\varphi\, d\varphi = \frac{2T}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = T.$$

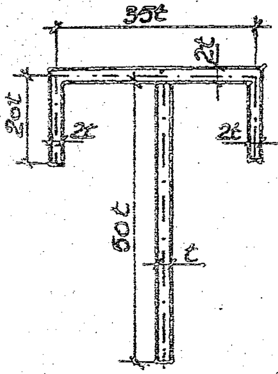
$$M_0 = 2\cdot\frac{T}{4t\cdot a}\cdot t\cdot\frac{\pi}{4}\cdot a\cdot\frac{1}{2}a + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{4}+\cos\varphi\right)\frac{T}{\pi t\cdot a}\cdot t\cdot a\cdot d\varphi\cdot a = \frac{\pi}{16}\cdot T\cdot a + \frac{2T\cdot a}{\pi}\left(\frac{8+\pi}{8}\right) = T\cdot a\cdot\frac{32+5\pi^2}{16\pi}$$

Reducând apoi eforturile în centrul de încovoiere torsiune C și egalând momentul astfel obținut (M_C) cu zero, rezultă valoarea distanței c, care dă poziția centrului de încovoiere-torsiune.

$$M_C = M_0 - T\cdot c = 0$$

deci $c = \frac{M_0}{T} = a\cdot\frac{32+5\pi^2}{16\pi} \simeq 1{,}618\, a$

PROBLEMA NR 55



Se dă secțiunea din figură la care calculul se va face pe linia mediană a peretelui (grosimea peretelui secțiunii fiind foarte mică în raport cu celelalte dimensiuni).

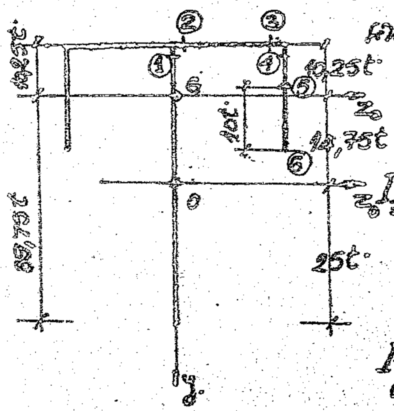
Să se determine:

1) Pentru $T_{zy} = T$, distribuția de tensiuni tangențiale

2) Poziția centrului de încovoiere torsiune

Rezolvare:

1) Caracteristicile geometrice ale secțiunii sînt:



$$y_G = \frac{-35t\cdot 2t\cdot 25t - 2\cdot 20t\cdot 2t\cdot 15t}{35t\cdot 2t + 2\cdot 20t\cdot 2t + 50t\cdot t} = -14{,}75t.$$

$$I_z = \frac{t(50t)^3}{12} + 50t\cdot t\cdot(14{,}75t)^2 + 35t\cdot 2t\cdot(10{,}25t)^2 + 2\,\frac{2t(20t)^3}{12} + 2\cdot 20t\cdot 2t\cdot(0{,}25)^2 + \frac{35t(2t)^3}{12} = 31344t^4$$

$$I_y = \frac{2t(35t)^3}{12} + 2\cdot 20t\cdot 2t(17{,}5t)^2 + 2\cdot\frac{20t\cdot(2t)^3}{12} = 31672\,t^4$$

Momentele statice în punctele 1, 2, 3, 4, 5, 0 și G sînt

$S_1 = 35t\cdot 2t\cdot 10{,}25t + 2\cdot 20t\cdot 2t\cdot 0{,}25t = 737{,}5\,t^3$

$S_2 = \frac{35t}{2}\cdot 2t\cdot 10{,}25t + 20t\cdot 2t\cdot 0{,}25t = 369\,t^3$

$S_3 = 20t\cdot 2t\cdot 0{,}25t = 10\,t^3$

$S_4 = S_3$

$S_5 = 10t\cdot 2t\cdot 4{,}75t = 95t^3$

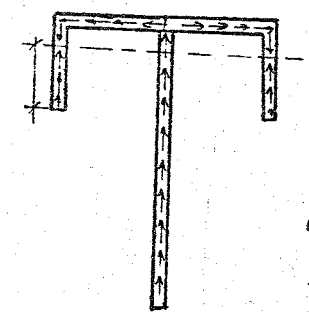
$S_0 = 25t\cdot t\cdot(39{,}75t - 12{,}5t) = 681t^3$

$S_G = 39{,}75t\cdot t\cdot\frac{39{,}75}{2} = 790t^3$

Eforturile unitare tangențiale în punctele 1, 2, 3, 4, 5, 0, G vor fi:

$$\tau_1 = \frac{T\cdot 737{,}5t^3}{t\cdot I_z} = 737{,}5\,\frac{T\cdot t^2}{I_z}\ ;\quad \tau_2 = 369\,\frac{T\cdot t^2}{I_z}\ ;\quad \tau_3 = 10\,\frac{T\cdot t^2}{I_z}$$

$$\tau_4 = 10\,\frac{T\cdot t^2}{I_z}\ ;\quad \tau_5 = 95\,\frac{T\cdot t^2}{I_z}\ ;\quad \tau_0 = 681\,\frac{T\cdot t^2}{I_z};\quad \tau_G = 790\,\frac{T\cdot t^2}{I_z}$$

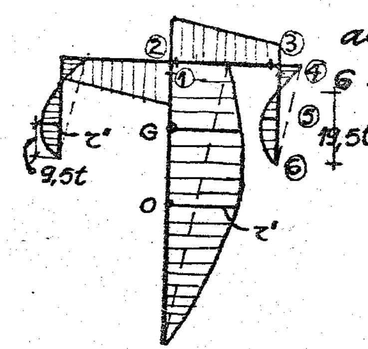


$$\tau' = (681 - 0{,}5\cdot 737{,}5)\frac{T\cdot t^2}{I_z} = 312{,}5\,\frac{Tt^2}{I_z}$$

$$\tau'' = (95+5)\frac{T\cdot t^2}{I_z} = 100\,\frac{Tt^2}{I_z}$$

Fluxul de efort unitar tangențial generat de o forță tăietoare presupusă pozitivă, este cel din figură.

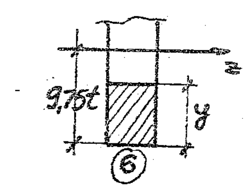
Pentru determinarea sensului corect al fluxului de efort unitar τ în punctul G se presupun eforturile T și M pozitive:



19,5t $T>0$; $M>0$

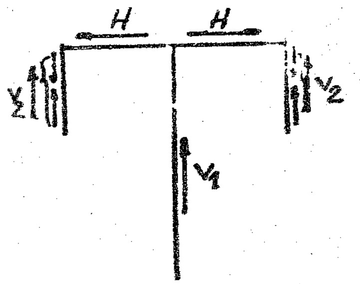
Pentru determinarea punctului de anulare a efortului unitar în zona punctelor 4, 3, 6, se consideră un punct curent în această zonă, pentru care momentul static este:

$$S_{\bar y} = 2\cdot t\cdot\bar y\left(9{,}75t - \frac{\bar y}{2}\right)$$



Această expresie se anulează pentru $\bar y = 0$ și $\bar y = 19{,}5t$

$\frac{dS_{\bar y}}{d\bar y} = 2t(9{,}75t - \bar y)$, această expresie se se anulează pentru $\bar{y} = 35\,t$, deci în acest punct se produce maximul funcției pe această zonă. Folosind diagrama de efort unitar tangențial τ, reprezentată anterior, se calculează rezultantele de efort unitar de pe pereții secțiunii:



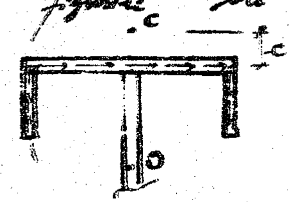
$$V_1 = 737{,}5\,\frac{T\cdot t^2}{I_z}\cdot\frac{50t}{2}\cdot t + \frac{2}{3}\cdot 50\cdot t\cdot t\cdot 312{,}5\,\frac{T\cdot t^2}{I_z} = 28857{,}2\cdot\frac{T\cdot t^2}{I_z} = 0{,}9207\,T$$

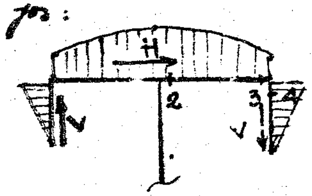
$$V_2 = \frac{2}{3}\cdot 100\cdot\frac{T\cdot t^2}{I_z}\cdot 20t\cdot 2t - 10\,\frac{T\cdot t^2}{I_z}\cdot\frac{20t\cdot 2t}{2} = 2467\,\frac{T\cdot t^2}{I_z} = 0{,}0787\,T$$

Se constată că $V_1 + V_2 = 0{,}9994\,T$, o valoare apropiată de valoarea $1\cdot T$; diferența provine din reducerea la axă.

$$H = \frac{369+10}{2}\cdot 17{,}5t\cdot 2t\cdot\frac{T\cdot t^2}{I_z} = 6632{,}5\,\frac{T\cdot t^2}{I_z} = 0{,}2116\,T$$

2) Pentru determinarea centrului de încovoiere torsiune, secțiunea se presupune solicitată de o forță tăietoare $T_{xz} = T$, acționând perpendicular pe axa de simetrie. Caracteristicile geometrice ale secțiunii (moment de inerție și momente statice) se calculează față de axa de simetrie y, a secțiunii. În această situație, fluxul de efort unitar și diagramele sunt cele din figurile de mai jos:





$$S_4 = 20t\cdot 2t\cdot 17{,}5\,t = 700\,t^3 = S_3$$

$$S_2 = 700t^3 + 17{,}5\,t\cdot 2t\cdot\frac{17{,}5}{2}t = 1006\,t^3$$

$$\tau_4 = \tau_3 = \frac{T\cdot 700t^3}{2t\cdot I_y} = 300\,\frac{T\cdot t^2}{I_y}$$

$$\tau_2 = \frac{T\cdot 1006\,t^3}{2t\cdot I_y} = 503\,\frac{T\cdot t^2}{I_y}$$

Rezultantele eforturilor unitare tangențiale sunt H și V

$$H = 35t\cdot 2t\cdot 350\cdot\frac{T\cdot t^2}{I_y} + \frac{2}{3}\cdot 35t\cdot 2t\,(503-350)\,\frac{T\cdot t^2}{I_y} = 31670\,\frac{T\cdot t^4}{I_y} \cong T$$

$$V = 350\,\frac{T\cdot t^2}{I_y}\cdot 2t\cdot\frac{20t}{2} = 7000\,\frac{T\cdot t^4}{I_y} = 0{,}2210\,T$$

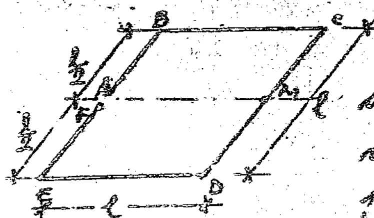
Calculând momentul forțelor H și V față de centrul de încovoiere torsiune și egalându-l cu zero se obține ecuația din care se calculează valoarea distanței c.

$$M = V\cdot 35t - H\cdot c = 0$$

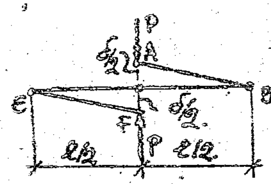
sau : $-7{,}7355\,T\cdot t + T\cdot c = 0$

rezultă : $c = \dfrac{7{,}7355\,T\cdot t}{T} = 7{,}7355\,t$

PROBLEMA NR 56

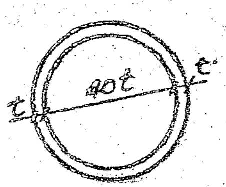


Bara plană ABCDEF trebuie realizată astfel încît punctele A și F să fie strict apropiate pentru a putea fi solidarizate prin sudură. La montaj se constată însă că aceste puncte (A și F) sînt depărtate între ele în sensul normalei la planul ABCDEF cu cantitatea δ. Pentru a putea fi sudate se aplică 2 forțe P egale și de sens contrar în punctele A și E pentru a se anula distanța δ. Secțiunea barei este cea din figură. Se cere:

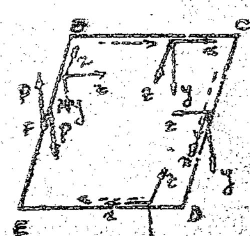


1) Care este valoarea forței P necesară pentru a anula distanța δ.

2) Care este rotirea relativă a fețelor din A și F în acest caz.



Calculul se va face literal și numeric. Pentru calculul numeric se va considera: $t = 1{,}2$ cm, $\ell = 4$ m, $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm²; $\mu = 0{,}3$; $\delta = 5$ cm.



Rezolvare:

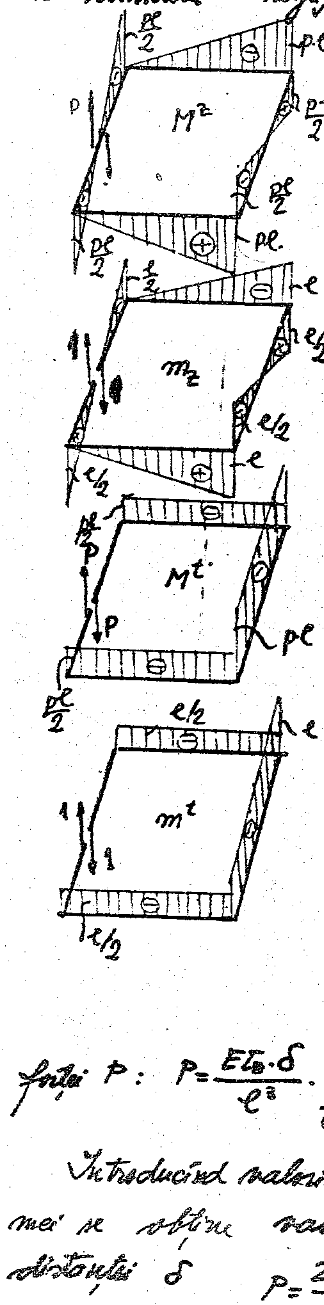
1) Caracteristicile geometrice ale secțiunii sînt:
$I_z = \frac{\pi}{64}(42^4 - 40^4)t^4 = 27081\, t^4$

$I_p = 2 I_z = 54162\, t^4$

Pentru determinarea deplasării relative a punctelor A și F se încarcă sistemul cu două forțe unitare de sens contrar și acționînd chiar pe direcțiile forțelor P.

Pentru reprezentarea diagramelor de momente încovoietoare și de torsiune se alege un sens de

parcurs ca cel din figură. În calculul practic, se consideră neglijabilă influența forței tăietoare.



Pentru integrarea Maxwell-Mohr prin regula lui Vereșceaghin se folosesc diagramele de momente din figurile alăturate

$$v_{M_z} = \frac{1}{EI_z}\left[2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{P\ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot P\ell \cdot \ell \cdot \frac{2}{3}\ell + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{P\ell}{2}\frac{2}{3}\ell\right] =$$

$$= \frac{10}{12}\frac{P\ell^3}{EI_z}$$

$$v_{M^t} = \frac{1}{GI_t}\left[2 \cdot \frac{P\ell}{2} \ell \cdot \frac{\ell}{2} + P\ell \cdot \ell \cdot \ell\right] = \frac{3}{2}\frac{P\ell^3}{GI_t}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{P\ell}{GI_z}$$

Deplasarea relativă între punctele A și F va fi:

$$v_{rel} = v_{M_z} + v_{M_t} = \frac{10}{12}\frac{P\ell^3}{EI_z} + \frac{3}{4}\frac{P\ell^3}{\frac{EI_z}{2(1+\mu)}} =$$

$$= \frac{P\ell^3}{EI_z}\left[\frac{10}{12} + \frac{6(1+\mu)}{4}\right] = \frac{P\ell^3}{EI_z}\left(\frac{14}{6} + \frac{3}{2}\mu\right)$$

Din egalitatea $v_{rel} = \delta$, rezultă expresia forței P: $P = \frac{EI_z \cdot \delta}{\ell^3} \cdot \frac{1}{\frac{14}{6} + \frac{3}{2}\mu}$

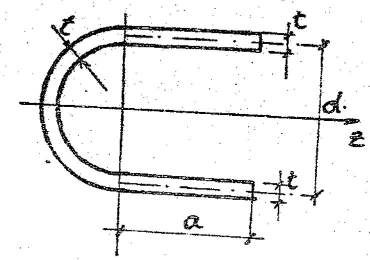
Introducînd valorile numerice date în textul problemei se obține valoarea forței P pentru anularea distanței δ

$$P = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 27081 \cdot (1{,}2)^4 \cdot 5}{(400)^3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{14}{6} + \frac{0{,}9}{2}\right)} = 3310 \text{ daN}$$

2) Pentru determinarea rotirii relative a celor două fețe A și F ale barei se încarcă sistemul cu două momente unitare și de sens contrar în A și F. Aceste momente au vectorul în planul ABCDEF și sunt normale pe dreapta AB. Diagrama m_z care rezultă din încărcarea cu aceste momente este simetrică față de dreapta AA_1, iar diagrama M_z este antisimetrică. La fel, diagrama m_t este antisimetrică, iar M^t este simetrică. În consecință, rotirea relativă φ_z, între fețele A și F este nulă.

La fel se procedează și pentru rotirea relativă φ_y. Se încarcă grinda cu două momente unitare și de sens contrar pe direcția normală pe planul ABCDEF care ne conduce la o diagramă de moment m_y, iar diagrama $m_t = 0$. În consecință și rotirea relativă $\varphi_y = 0$.

PROBLEMA NR 57.



Pentru secțiunea din figură să se determine:

1) Mărimea $a = a(d)$, astfel încît momentul de inerție al secțiunii, față de axa z să fie egal cu momentul de inerție al unei secțiuni inelare fine cu diametrul mediu d.

2) Cu valoarea lui a determinată la punctul 1) să se găsească poziția centrului de încovoiere-torsiune.
(Se dă : $t = \frac{1}{20} d$).

Rezolvare:

1) Din datele problemei rezultă :

$$d_e = d + t = d + \frac{d}{20} = \frac{21}{20} d$$

$$d_i = d - t = d - \frac{d}{20} = \frac{19}{20} d .$$

Se calculează momentul de inerție al unei secțiuni inelare cu diametrul exterior d_e și diametrul interior d_i.

<u>exact</u> : $$I_z^{inel} = \frac{\pi}{64}(d_e^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{64}\left[\left(\frac{21}{20}\right)^4 d^4 - \left(\frac{19}{20}\right)^4 d^4\right] =$$
$$= \frac{\pi}{64}\cdot\frac{d^4}{20^4}(21^4 - 19^4) = \frac{\pi}{64}\cdot 0{,}4\, d^4$$

<u>aproximativ</u> : $$I_z^{inel} = \frac{\pi}{64}(d_e - d_i)(d_e + d_i)2d^2 =$$
$$= \frac{\pi}{64}\cdot 2\cdot t\cdot 2d\cdot 2d^2 = \frac{\pi}{8} t\, d^3 = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{d}{20}\cdot d^3 =$$
$$= 0{,}4\cdot\frac{\pi}{64}\cdot d^4 .$$

Se calculează momentul de inerție al celor două ramuri ale secțiunii:

<u>exact</u>: $$2\left[\frac{a t^3}{12} + a\cdot t\left(\frac{d}{2}\right)^2\right] = 2a\left[\frac{d^3}{12\cdot 20^3} + \frac{1}{20}\cdot\frac{d^3}{4}\right] =$$
$$= 0{,}025\cdot a\cdot d^3 .$$

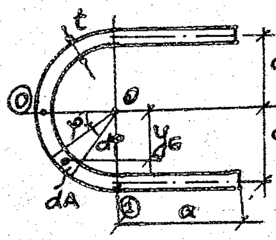
<u>aproximativ</u>: $$2a\,t\left(\frac{d}{2}\right)^2 = a\cdot\frac{d}{20}\cdot\frac{d^2}{2} = 0{,}025\cdot a\cdot d^3$$

Pentru a răspunde la prima întrebare a problemei, trebuie egalat momentul de inerție al unei jumătăți de inel, cu momentul de inerție al celor două ramuri ale secțiunii, adică:

$$0,4\cdot\frac{\pi}{2\cdot 64}\cdot d^4 = 0,025\, a\, d^3 \text{ și rezultă:}$$

$$a = \frac{0,4\cdot\pi\cdot d}{128\cdot 0,025} = 0,3927\, d.$$

2) Pentru determinarea poziției centrului de încovoiere-torsiune, se determină caracteristicile geometrice ale secțiunii. Se consideră forța tăietoare T aplicată perpendicular pe axa Oz.



$$S_1 = a\cdot t\cdot\frac{d}{2} = 0,3927 d\cdot\frac{d}{20}\cdot\frac{d}{2} = 0,00982\, d^3.$$

$$dA = \frac{d}{2}\cdot d\varphi\cdot t.$$

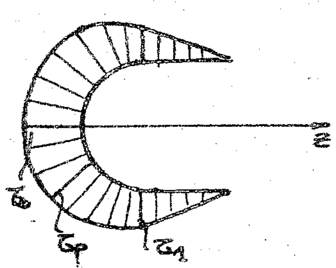
$$dS = dA\cdot\frac{d}{2}\cdot\sin\varphi = \frac{d}{2}\, d\varphi\cdot t\cdot\frac{d}{2}\cdot\sin\varphi = \frac{d^2}{4}\cdot\frac{d}{20}\, d\varphi\,\sin\varphi = \frac{d^3}{80}\sin\varphi\, d\varphi.$$

Momentul static al zonei inelare din secțiune este:

$$S^{inel} = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d^3}{80}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{d^3}{80}\Big[-\cos\varphi\Big]_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{d^3}{80}\cos\varphi.$$

$$S^{curent} = \frac{d^3}{80}\cos\varphi + 0,00982\, d^3 = 0,00125\, d^3\cos\varphi + 0,00982\, d^3$$

$$S_0 = \frac{d^3}{80} + 0,00982\, d^3 = 0,02232\, d^3$$



$$\tau_1 = \frac{T\cdot S_1}{t\cdot I_z} = \frac{T\cdot 0,00982\, d^3}{t\cdot 0,01963\, d^4} = 10\frac{T}{d^2}.$$

$$\tau_0 = \frac{T\cdot S_0}{t\cdot I_z} = \frac{T\cdot 0,02232\, d^3}{t\cdot 0,01963\, d^4} = 22,74\frac{T}{d^2}$$

$$\tau_\varphi = \frac{T(0,00125\, d^3\cos\varphi + 0,00982\, d^3)}{t\cdot 0,01963\, d^4}$$

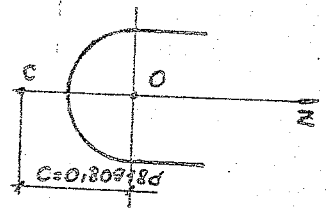
Pentru verificarea expresiei τ_φ se calculează valoarea forței tăietoare T.

$$T = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tau_\varphi\cdot\frac{d}{2}\, d\varphi\cdot t\cdot\cos\varphi = \frac{2Td^4}{2\cdot I_z}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(0,0125\cos^2\varphi + 0,00982\cos\varphi)\, d\varphi = \frac{T}{0,01963}\Big[0,0125\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0,00982\Big] = \frac{T}{0,01963}(0,01963) = T.$$

Rezultantele efortului unitar τ de pe secțiune vor fi:

$$R_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\tau_\varphi\frac{d}{2}\cdot d\varphi\cdot t = \frac{1}{2}d\cdot\frac{Td^3}{0,01963\, d^4}\Big[0,0125 + 0,00982\frac{\pi}{2}\Big] = 0,711\, T.$$

$$R_2 = 10\frac{T}{d^2}\cdot 0,3927 d\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{20} = 0,098175\, T.$$



Se calculează momentul rezultantelor R_1 și R_2 față de centrul de încovoiere-torsiune.

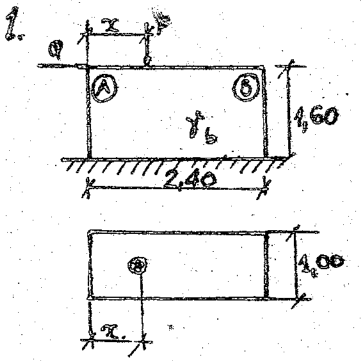
$$2R_1\cdot\frac{d}{2} + 2R_2\cdot\frac{d}{2} - T\cdot c = 0.$$

$$2\cdot 0,711\, T\frac{d}{2} + 2\cdot 0,098175\, T\frac{d}{2} - T\cdot c = 0$$

$$0,80918\, T\cdot d - T\cdot c = 0$$

$$c = \frac{0,80918\, T\cdot d}{T} = 0,80918\, d.$$

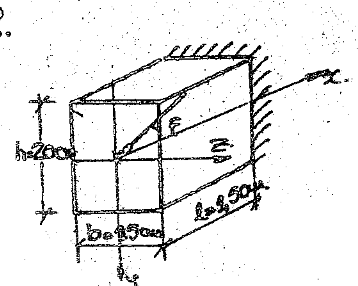
PROBLEME PROPUSE PENTRU REZOLVARE

1. 

Un zid din beton este acționat de două forțe P=18KN și Q = 10KN, ca în figură.

1) Să se determine lungimea x pe care se poate deplasa forța P, astfel încât pe talpa fundației să nu apară eforturi unitare de întindere. Să se determine în acest caz și valoarea maximă a efortului unitar.

2) Pentru $x = 0,2m$, să se reprezinte diagrama σ_x pe talpa fundației și să se calculeze valoarea σ_{max}.

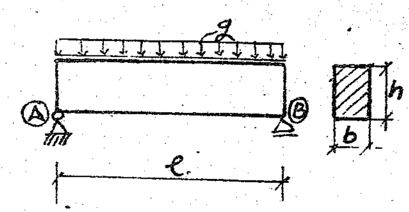
2. 

Consola din lemn, din figură este solicitată de o forță F care acționează în planul secțiunii de capăt a consolei și face un unghi α cu axa Oy.

1) Pentru ce unghi α se obține F_{adm} minim?

2) Să se calculeze componentele deplasării și deplasarea totală în centrul O al secțiunii de capăt pentru unghiul α de la pct. 1.

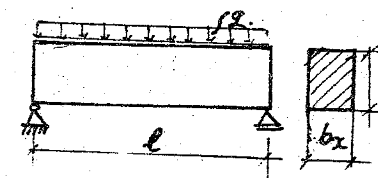
(Se dau: $\sigma_a = 100\ kgf/cm^2$; $E = 10^5\ daN/cm^2$).

3 

Se dă grinda din figură articulată în A și B.

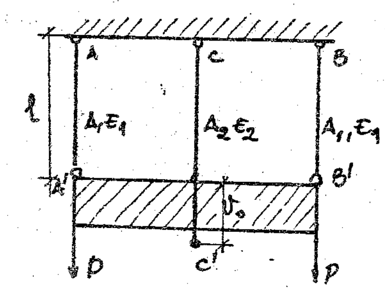
1. Să se determine q_{adm} în funcție de l, b, h, σ_a.

2. Să se determine deplasarea verticală maximă de la mijlocul deschiderii și rotirile de pe reazeme.

4. 

Se dă grinda din figură cu secțiunea dreptunghiulară, având înălțimea constantă și lățimea b_x variabilă ($b_x = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{l} \cdot x$; $b_2 = 2b_1$).

Pentru un σ_a dat, să se determine q_{adm} în funcție de h, l, b_1, σ_a și să se arate în ce secțiune a grinzii are loc σ_{max}.

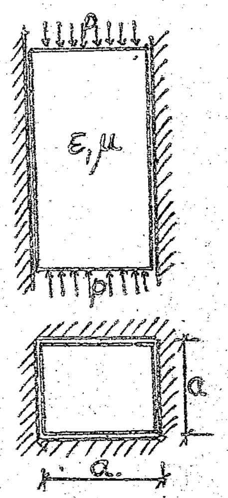
5 

O grindă infinit rigidă trebuie suspendată cu 3 tiranți AA', BB', CC'. Tirantul din mijloc este mai lung cu cantitatea v_0 decât ceilalți doi. Pentru a se putea monta se aplică două forțe egale P în punctele B și B', astfel încât prin deformarea elastică a tiranţilor se poate monta şi CC'.

1. Ce forţe P trebuie aplicate pentru a se putea prinde şi tirantul din mijloc.
2. Care sînt eforturile în cei trei tiranţi, după montajul tirantului CC' şi înlăturarea forţelor P?
3. Care este deplasarea finală a feţei superioare a grinzii după înlăturarea forţelor P?

(calculele se vor face literal, în funcţie de datele de pe figură).

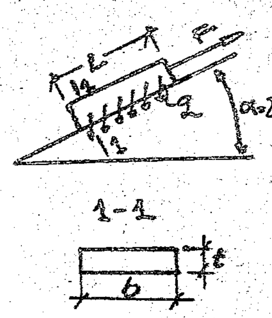
6.



O bară cu secţiunea pătrată, este acţionată de o încărcare uniform distribuită p. Bara este introdusă într-un locaş rigid faţă de care poate avea deplasări longitudinale, dar deplasările transversale sînt împiedicate.

1. Să se determine presiunea care apare între bară şi pereţii locaşului.
2. Să se determine scurtarea barei.

7.

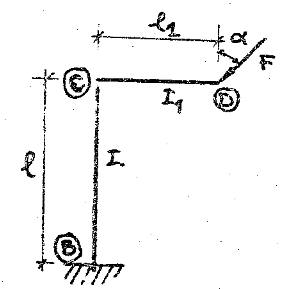


Se dă bara din figură aşezată pe un plan înclinat. Încărcarea totală gravitaţională (inclusiv greutatea proprie a barei) este Q. Coeficientul de frecare între bară şi plan este $f = 0{,}8$, greutatea specifică $\gamma = 7{,}8\ tf/m^3$.

Se cer:

1. Lungimea barei „L" astfel încît în momentul în care, sub acţiunea forţei F bara se pune în mişcare, $\sigma_{max} = 1000\ daN/cm^2$.
2. Diagrama forţei axiale de la punctul 1.
3. Lungirea barei în aceaşi situaţie.

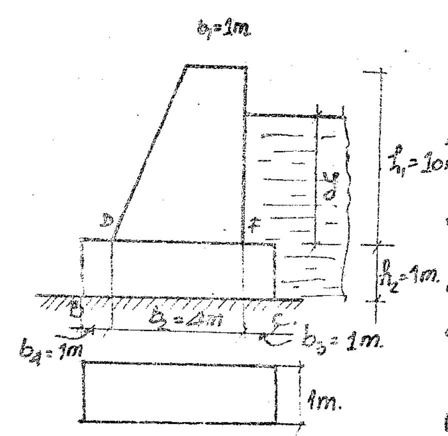
8.



Ce direcţie trebuie să aibă forţa F pentru ca să fie îndeplinite condiţiile:

1. Rotirea din punctul D să fie nulă.
2. Rotirea din punctul C să fie nulă.
3. Deplasarea orizontală din punctul C să fie nulă.
4. Deplasarea orizontală din punctul D să fie nulă.
5. Deplasarea verticală din punctul D să fie nulă.
6. Deplasarea totală din D să aibă direcţia forţei F din D.

9.



Barajul din figură este acţionat de presiunea apei pe o înălţime $y + h_2$.

1. Pînă la ce înălţime y se poate ridica nivelul apei în spatele barajului, astfel încît pe talpa fundaţiei să nu apară întinderi?
2. Diagrama presiunilor σ în secţiunea $D-F$.

3. Dacă nivelul apei se ridică cu 1 m peste cota de la punctul 1, care este distribuţia presiunilor în secţiunea BC ?

10. Se dau eforturile unitare: $\sigma_x = 14p$, $\sigma_y = 11p$, $\sigma_z = 2p$, $\tau_{xy} = -2p$, $\tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$.

Să se determine tensiunile şi direcţiile principale, tensiunile tangenţiale maxime şi direcţiile lor.

Tiraj :
Predat multiplicare
Corectat : autorii
Transcriere, studenţii : Şerban Mirela, Szabo Cristina, Cristea Radu
Desen, studentul : Iordache Mircea
Multiplicarea s-a făcut sub comanda nr.: în atelierul reprografie al I.C.B.