INSTITUTUL DE CONSTRUCTII BUCURESTI
FACULTATEA DE CONSTRUCTII
Secția INSTALATII

REZISTENȚA MATERIALELOR

TEME PROPUSE LA CONCURSUL PROFESIONAL

„Traian Lalescu"

SISTEMATIZARE ȘI REZOLVARE

Asistent ing. VASILICA CORÂCI

1987

În ședința de catedră din data de 25.03.1987 s-a discutat și aprobat multiplicarea pe plan local a lucrării „REZISTENȚA MATERIALELOR”. Nu conține date secrete sau brevetabile.

1. Se dă tensorul de tensiune:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \alpha p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix}$$

a) Se cere să se caracterizeze starea de tensiune dată (stare spațială, plană, monoaxială, etc);

b) Pentru ce valoare a lui α, tensorul reprezintă o stare de tensiune monoaxială;

c) Pentru ce valoare a lui α, tensorul reprezintă o stare de forfecare pură.

Facultativ: vor fi determinate direcția solicitării monoaxiale de la punctul b) și planul de forfecare de la punctul c).

Rezolvare:

Ecuația de gradul 3 în σ, pentru calculul tensiunilor principale este

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = p(\alpha+2) \\ I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{zy}^2 = 2p^2(\alpha-1) \\ I_3 = \begin{vmatrix} \alpha p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

a) Pentru că $I_3 = 0$ starea de tensiune dată este o stare de tensiune plană.

b) Pentru a avea o stare de tensiune monoaxială trebuie îndeplinită condiția:

$$\begin{cases} I_2 = 0 \\ I_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Obținem: $\sigma^3 - 3p\sigma^2 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 3p$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

Pentru determinarea direcției lui σ_1 se scrie sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_1)l_1' + \tau_{yx} m_1' + \tau_{zx} n_1' = 0 \\ \tau_{xy} l_1' + (\sigma_y - \sigma_1) m_1' + \tau_{zy} n_1' = 0 \\ \tau_{xz} l_1' + \tau_{yz} m_1' + (\sigma_z - \sigma_1) n_1' = 0 \end{cases} \quad \text{unde } l_1' = 1$$

$$\begin{cases} (p-3p) + p m_1' + p n_1' = 0 \\ p + (p-3p) m_1' + p n_1' = 0 \\ p + p m_1' + (p-3p) n_1' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1' + n_1' = 2 \\ -2m_1' + n_1' = -1 \\ m_1' - 2n_1' = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1' = 1 \\ m_1' = 1 \\ n_1' = 1 \end{cases}$$

Cosinusii directori ai direcției lui σ_1 vor fi:

$$\begin{cases} l_1 = \dfrac{l_1'}{\sqrt{l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\[2ex] m_1 = \dfrac{m_1'}{\sqrt{l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\[2ex] n_1 = \dfrac{n_1'}{\sqrt{l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

c) Pentru ca starea de tensiune să reprezinte o forfecare pură (o rădăcină nulă și două rădăcini egale și de semne opuse) trebuie îndeplinită condiția:

$$\begin{cases} I_1 = 0 \\ I_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

Obținem ecuația:

$$\sigma^3 - 6p^2\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0 \text{ și } \sigma_{1,2} = \pm p\sqrt{6}$$

unde $I_2 = 2p^2(\alpha - 1) = -6p^2$

Pentru $\alpha = -2$, T_σ devine:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} -2p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix}$$

Se determină direcția lui $\sigma_1 = p\sqrt{6}$, considerând $l_1' = 1$

$$\begin{cases} -p(2+\sqrt{6})l_1' + pm_1' + pn_1' = 0 \\ p\,l_1' + p(1-\sqrt{6})m_1' + pn_1' = 0 \\ p\,l_1' + p\,m_1' + p(1-\sqrt{6})n_1' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1' + n_1' = 2+\sqrt{6} \\ (1-\sqrt{6})m_1' + n_1' = -1 \\ m_1' + (1-\sqrt{6})n_1' = -1 \end{cases}$$

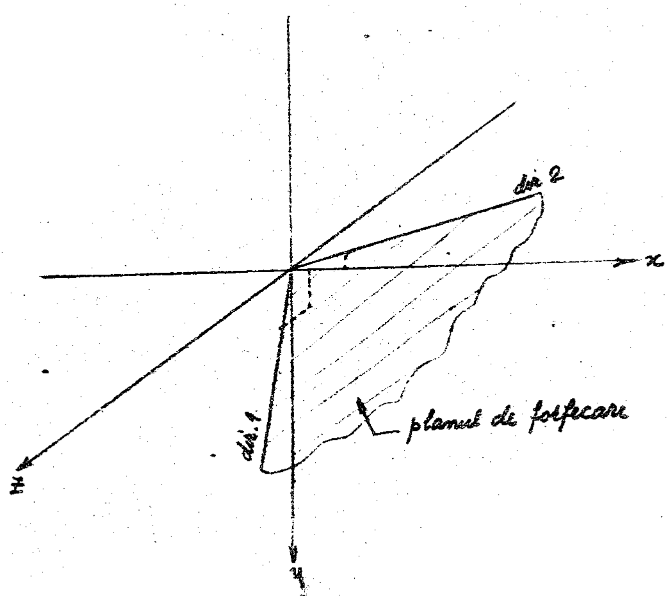
$$\begin{cases} l_1' = 1 \\ m_1' = 1 + \dfrac{3}{\sqrt{6}} = 2{,}2247 \\ n_1' = 1 + \dfrac{3}{\sqrt{6}} = 2{,}2247 \\ \lambda = \sqrt{l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2} = 3{,}3013 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 = \dfrac{l_1'}{\lambda} = \dfrac{1}{3{,}3013} = 0{,}3029 \\[2ex] m_1 = \dfrac{m_1'}{\lambda} = \dfrac{2{,}2247}{3{,}3013} = 0{,}6738 \\[2ex] n_1 = \dfrac{n_1'}{\lambda} = 0{,}6738 \end{cases}$$

Se determină direcția lui $\sigma_2 = -p\sqrt{6}$, considerând $l_2' = 1$

$$\begin{cases} p(-2+\sqrt{6})l_2' + pm_2' + pn_2' = 0 \\ p\,l_2' + p(1+\sqrt{6})m_2' + pn_2' = 0 \\ p\,l_2' + p\,m_2' + p(1+\sqrt{6})n_2' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_2' + n_2' = 2-\sqrt{6} \\ (1+\sqrt{6})m_2' + n_2' = -1 \\ m_2' + (1+\sqrt{6})n_2' = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_2' = 1 \\ m_2' = 1 - \dfrac{3}{\sqrt{6}} = -0{,}2247 \\ n_2' = 1 - \dfrac{3}{\sqrt{6}} = -0{,}2247 \\ \lambda_2 = \sqrt{l_2'^2 + m_2'^2 + n_2'^2} = 1{,}0492 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_2 = \dfrac{l_1'}{\lambda_2} = 0{,}95303 \\[2ex] m_2 = \dfrac{m_2'}{\lambda_2} = -0{,}21414 \\[2ex] n_2 = \dfrac{n_2'}{\lambda_2} = -0{,}21414 \end{cases}$$

Planul de forfecare este planul format de direcțiile 1 și 2.



2. Se dă tensorul de tensiune:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & \alpha p \\ p & \alpha p & \beta p \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in R$$

Să se determine parametrii α și β astfel încât starea de tensiune dată să reprezinte:

1) - solicitare monoaxială;
2) - forfecare pură;
3) - pentru fiecare caz se cer valorile și direcțiile tensiunilor principale și să se reprezinte grafic pe un element.

<u>Rezolvare</u>:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = p(\beta+2)$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = p^2(2\beta - \alpha^2 - 1)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} p & p & p \\ p & p & \alpha p \\ p & \alpha p & \beta p \end{vmatrix} = -p^3(\alpha-1)^2$$

1) Pentru a avea o stare de tensiune monoaxială (doar o singură tensiune diferită de zero) trebuie îndeplinită condiția:

$$\begin{cases} I_2 = 0 & \Rightarrow \beta = 1 \\ I_3 = 0 & \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

I_1 devine: $I_1 = 3p$

Ecuația în σ devine:

$$\sigma^3 - 3p\sigma^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_1 = 3p \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0}$$

Pentru $\alpha = 1$ și $\beta = 1$ tensorul de tensiune devine:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix}$$

Se calculează direcția tensiunii $\sigma_1 = 3p$.

$$\begin{cases} -2p\, l_1' + p\, m_1' + p\, n_1' = 0 \\ p\, l_1' - 2p\, m_1' + p\, n_1' = 0 \\ p\, l_1' + p\, m_1' - 2p\, n_1' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1' + n_1' = 2 \\ 2m_1' - n_1' = 1 \\ m_1' - 2n_1' = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1' = 1 \\ m_1' = 1 \\ n_1' = 1 \end{cases}$$

alegem $l_1' = 1$

$$\lambda_1 = \sqrt{l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2} = \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} l_1 = \dfrac{l_1'}{\lambda_1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ m_1 = \dfrac{m_1'}{\lambda_1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ n_1 = \dfrac{n_1'}{\lambda_1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

2). Pentru a avea o stare de tensiune de forfecare pură (o tensiune nulă și două tensiuni egale și de semn opus) trebuie îndeplinită condiția:

$$\begin{cases} I_1 = 0 & \rightarrow \beta = -2 \\ I_3 = 0 & \rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

În acest caz I_2 devine: $I_2 = -6p^2$

Ecuația de gradul 3 în σ se rescrie sub forma:

$$\sigma^3 - 6p^2\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = 0 \quad \sigma = \pm p\sqrt{6}}$$

Deci:

$$\begin{cases} \sigma_1 = p\sqrt{6} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -p\sqrt{6} \end{cases}$$

Cu α și β determinate, tensorul T_σ devine

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & -2p \end{pmatrix}$$

Se calculează direcția lui $\sigma_1 = p\sqrt{6}$

$$\begin{cases} p(1-\sqrt{6})\, l_1' + p\, m_1' + p\, n_1' = 0 \\ p\, l_1' + p(1-\sqrt{6})\, m_1' + p\, n_1' = 0 \\ p\, l_1' + p\, m_1' - p(2+\sqrt{6})\, n_1' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m_1' + n_1' = \sqrt{6} - 1 \\ (1-\sqrt{6})\, m_1' + n_1' = -1 \\ m_1' - (2+\sqrt{6})\, n_1' = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1' = 1 \\ m_1' = 1 \\ n_1' = 0{,}44948 \end{cases}$$

Se alege $l_1' = 1$

$$\lambda_1 = \sqrt{l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2} = 1{,}4839$$

$$\begin{cases} l_1 = \dfrac{l_1'}{\lambda_1} = 0{,}6738 \\ m_1 = \dfrac{m_1'}{\lambda_1} = 0{,}6738 \\ n_1 = \dfrac{n_1'}{\lambda_1} = 0{,}30289 \end{cases}$$

Se calculează direcția lui $\sigma_3 = -p\sqrt{6}$.

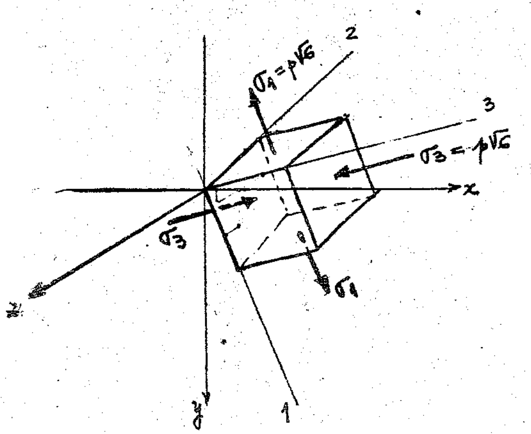
$$\begin{cases} p(1+\sqrt{6})\,l_3' + p\,m_3' + p\,n_3' = 0 \\ p\,l_3' + p(1+\sqrt{6})\,m_3' + p\,n_3' = 0 \\ p\,l_3' + p\,m_3' + p(-2+\sqrt{6})\,n_3' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_3' + n_3' = -1-\sqrt{6} \\ (1+\sqrt{6})\,m_3' + n_3' = -1 \\ m_3' + (\sqrt{6}-2)\,n_3' = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_3' = 1 \\ m_3' = 1 \\ n_3' = -4{,}4494 \end{cases}$$

Se alege $l_3' = 1$

$$\lambda_3 = \sqrt{l_3'^2 + m_3'^2 + n_3'^2} = 4{,}6688$$

$$\begin{cases} l_3 = \dfrac{l_3'}{\lambda_3} = 0{,}21418 \\ m_3 = \dfrac{m_3'}{\lambda_3} = 0{,}21418 \\ n_3 = \dfrac{n_3'}{\lambda_3} = -0{,}95299 \end{cases}$$

Se calculează direcția lui $\sigma_2 = 0$ $\quad \begin{cases} l_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ m_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ n_2 = 0 \end{cases}$



3) Pentru a reprezenta și starea de tensiune monoaxială pe cubul de latură unitate, ar trebui să determinăm și direcțiile celorlalte tensiuni $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$l_2' + m_2' + n_2' = 0$ este singura ec. care rezultă.

Se alege $l_2' = 1 \Rightarrow m_2' + n_2' = -1 \Rightarrow$ o infinitate de soluții pentru m_2 și n_2.

Ridicăm nedeterminarea dînd o valoare arbitrară lui m_2'.

$m_2' = 1 \Rightarrow n_2' = -2$

$$\lambda_2 = \sqrt{1+1+(-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\begin{cases} l_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ m_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ n_2 = -\dfrac{2}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

Pentru direcția lui σ_3 avem relațiile care țin seama că cele 3 direcții sînt ortogonale.

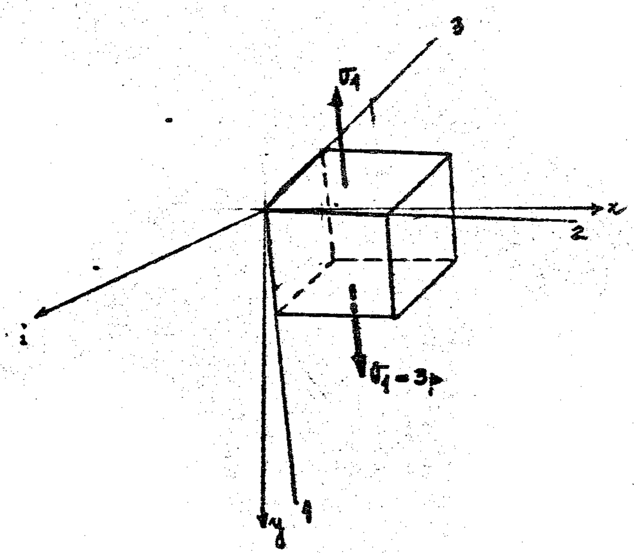
$$\begin{cases} l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0 \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{l_3}{\sqrt{3}} + \dfrac{m_3}{\sqrt{3}} + \dfrac{n_3}{\sqrt{3}} = 0 \\ \dfrac{l_3}{\sqrt{6}} + \dfrac{m_3}{\sqrt{6}} - \dfrac{2n_3}{\sqrt{6}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_3 + m_3 + n_3 = 0 \\ l_3 + m_3 - 2n_3 = 0 \end{cases}$$

sistem posibil numai dacă $n_3 = 0$
$l_3 = -m_3$

Se poate alege o valoare arbitrară pentru l_3.

$$\begin{cases} l_3 = 1 \\ m_3 = -1 \\ n_3 = 0 \end{cases}$$



3. Se dau: $\sigma_x = 14p$, $\sigma_y = 11p$, $\sigma_z = \alpha p$, $\tau_{xy} = -2p$, $\tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$, $p>0$.
Să se determine tensiunile principale și direcțiile principale, tensiunile tangențiale maxime și direcțiile lor și să se prezinte pe cubul de latură unitate pentru cazurile: 1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha = -9$.
Să se interpreteze τ_{max} în ambele cazuri.

<u>Rezolvare</u>:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 14p & -2p & 0 \\ -2p & 11p & 0 \\ 0 & 0 & \alpha p \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (14p-\sigma) & -2p & 0 \\ -2p & (11p-\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha p-\sigma) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\alpha p-\sigma)\left[(14p-\sigma)(11p-\sigma)-4p^2\right] = 0$$

$$(\alpha p-\sigma)(\sigma^2 - 25p\sigma + 150p^2) = 0$$

Rezultă: $\begin{cases} \sigma_1 = 15p \\ \sigma_2 = 10p \\ \sigma_3 = \alpha p \end{cases}$

1) $\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 15p \\ \sigma_2 = 10p \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \tau' = \dfrac{\sigma_2-\sigma_3}{2} = 5p \\ \tau'' = \dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = 7{,}5p \\ \tau''' = \dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = 2{,}5p \end{cases}$

Se calculează direcțiile tensiunilor principale:

$\sigma_1 = 15p$: $\begin{cases} p(14-15)l_1' - 2p\,m_1' = 0 \\ -2p\,l_1' + p(11-15)m_1' = 0 \\ -15p\,m_1' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1' = 1 \\ m_1' = -0{,}5 \\ n_1' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = \dfrac{l_1'}{\lambda_1} = 0{,}8944 \\ m_1 = \dfrac{m_1'}{\lambda_1} = -0{,}4472 \\ n_1 = \dfrac{n_1'}{\lambda_1} = 0 \end{cases}$

Alegem $l_1' = 1$ $\qquad \lambda_1 = \sqrt{l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2} = \sqrt{1{,}25}$

$\sigma_2 = 10p$: $\begin{cases} p(14-10)l_2' - 2p\,m_2' = 0 \\ -2p\,l_2' + p(11-10)m_2' = 0 \\ -10p\,n_2' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_2' = 1 \\ m_2' = 2 \\ n_2' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_2 = \dfrac{l_2'}{\lambda_2} = 0{,}4472 \\ m_2 = \dfrac{m_2'}{\lambda_2} = 0{,}8944 \\ n_2 = \dfrac{n_2'}{\lambda_2} = 0 \end{cases}$

alegem $l_2' = 1$

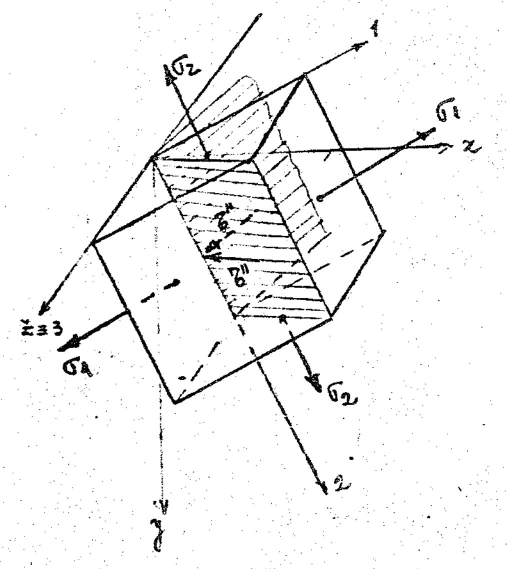
$\lambda_2 = \sqrt{l_2'^2 + m_2'^2 + n_2'^2} = \sqrt{5}$

$\sigma_3 = 0$: $\begin{cases} 14p\,l_3' - 2p\,m_3' = 0 \\ -2p\,l_3' + 11p\,m_3' = 0 \\ 0 \cdot n_3' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_3' = 1 \\ m_3' = 7 \to \text{din prima ecuație} \\ m_3' = \frac{2}{11} \to \text{din a doua ecuație.} \end{cases}$

alegem $l_3' = 1$

<u>Obs</u>: Cele două ecuații sînt verificate numai de $l_3' = m_3' = 0$ iar n_3' poate lua orice valoare.

Deci: $\begin{cases} l_3 = 0 \\ m_3 = 0 \\ n_3 = 1 \end{cases} \to$ este chiar axa Oz.



$\tau'' = 7{,}5p$ care este tensiunea tangențială maximă, acționează în perechea de planuri care conține direcția lui σ_2 și bisectează direcțiile lui σ_1 și σ_3.
Dacă s-ar elimina valoarea $\sigma_3 = 0$, s-ar obține o singură valoare pentru tensiunile tangențiale (τ'') pierzîndu-se valoarea maximă a tensiunii tangențiale în punctul considerat care este τ''.

4. *Se dă tensorul:* $T_\sigma = \begin{pmatrix} p & -p & p \\ -p & p & \alpha p \\ p & \alpha p & \beta p \end{pmatrix}$ *şi se cere:*

1) – valoarea lui α şi β pentru ca T_σ să reprezinte o stare de tensiune monoaxială.

2) – α şi β astfel încât T_σ să reprezinte o forfecare pură şi planul în care are loc.

Rezolvare:

$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$

$I_1 = p(\beta+2)$

$I_2 = p^2(2\beta-\alpha^2-1)$

$I_3 = -p^3(\alpha+1)^2$

1) Pentru a avea o stare de tensiune monoaxială trebuie îndeplinită condiţia:

$$\begin{cases} I_3 = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \\ I_2 = 0 \Rightarrow \beta = 1 \end{cases}$$

Rezultă: $I_1 = 3p \Rightarrow \sigma_1 = 3p\ ;\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

2) – Pentru a avea o stare de tensiune de forfecare pură trebuie îndeplinită condiţia:

$$\begin{cases} I_3 = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \\ I_1 = 0 \Rightarrow \beta = -2 \end{cases}$$

Rezultă: $I_2 = -6p^2 \Rightarrow \sigma^3 - 6p^2\sigma = 0 \qquad \sigma = 0\ ,\ \sigma_{1,2} = \pm p\sqrt{6}$

$$\begin{cases} \sigma_1 = p\sqrt{6} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -p\sqrt{6} \end{cases} \qquad T_\sigma = \begin{pmatrix} p & -p & p \\ -p & p & -p \\ p & -p & -2p \end{pmatrix}$$

Se calculează direcţiile tensiunilor principale:

$$\sigma_1 = p\sqrt{6}: \quad \begin{cases} p(1-\sqrt{6})\,l_1' - p m_1' + p n_1' = 0 \\ -p l_1' + p(1-\sqrt{6}) m_1' - p n_1' = 0 \\ p l_1' - p m_1' - (2+\sqrt{6}) p n_1' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1' - n_1' = 1-\sqrt{6} \\ (1-\sqrt{6}) m_1' - n_1' = 1 \\ m_1' + (2+\sqrt{6}) n_1' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1' = 1 \\ m_1' = -1 \\ n_1' = 0,44948 \end{cases}$$

alegem $l_1' = 1$

$\lambda_1 = \sqrt{l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2} = 1,4839$

$$\begin{cases} l_1 = \dfrac{l_1'}{\lambda_1} = 0,67388 \\ m_1 = \dfrac{m_1'}{\lambda_1} = -0,67388 \\ n_1 = \dfrac{n_1'}{\lambda_1} = 0,30289 \end{cases}$$

$$\sigma_3 = -p\sqrt{6}: \quad \begin{cases} p(1+\sqrt{6})\,l_3' - p m_3' + p n_3' = 0 \\ -p l_3' + p(1+\sqrt{6}) m_3' - p n_3' = 0 \\ p l_3' - p m_3' + p(-2+\sqrt{6}) n_3' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_3' - n_3' = 1+\sqrt{6} \\ (1+\sqrt{6}) m_3' - n_3' = 1 \\ m_3' + (2-\sqrt{6}) n_3' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_3' = 1 \\ m_3' = -1 \\ n_3' = -4,44948 \end{cases}$$

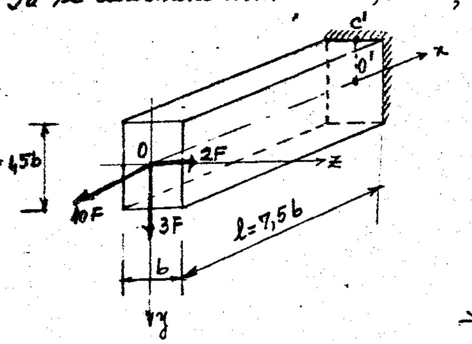
alegem $l_3' = 1$

$\lambda_3 = \sqrt{l_3'^2 + m_3'^2 + n_3'^2} = 4,6688$

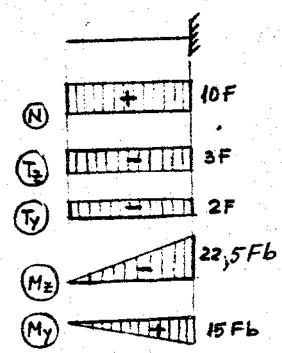
$$\begin{cases} l_3 = \dfrac{l_3'}{\lambda_3} = 0,21418 \\ m_3 = \dfrac{m_3'}{\lambda_3} = -0,21418 \\ n_3 = \dfrac{n_3'}{\lambda_3} = -0,953 \end{cases}$$

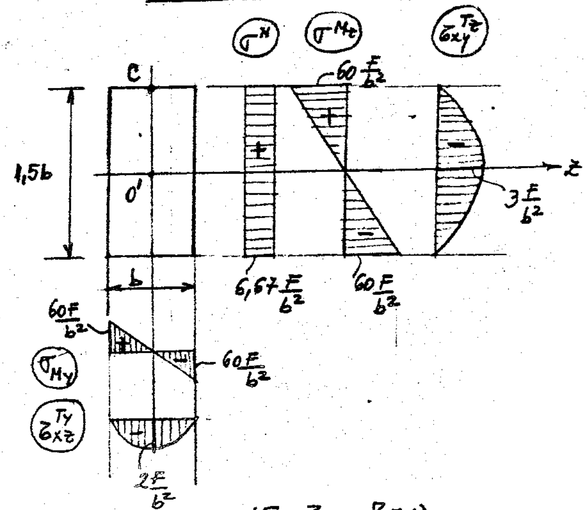
Planul de forfecare este definit de direcţiile lui σ_1 şi σ_3.

5. Să se exprime tensorul de tensiune și apoi să se determine tensiunile principale și direcțiile principale de tensiune în punctele O' și C.
Să se determine tensorul deformațiilor specifice pentru punctul O'.



Rezolvare:





$M_z^{O'} = -3F \cdot 7,5b = -22,5Fb$

$M_y^{O'} = 2F \cdot 7,5b = 15Fb$

$$\begin{cases} \sigma_x^N = \dfrac{N}{A} = \dfrac{10F}{1,5b^2} = 6,67\dfrac{F}{b^2} \\[2ex] \sigma_x^{M_z} = \dfrac{M_z}{W_z} = \dfrac{22,5\,Fb}{\dfrac{b\cdot(1,5b)^2}{6}} = 60\dfrac{F}{b^2} \\[2ex] \sigma_x^{M_y} = \dfrac{M_y}{W_y} = \dfrac{15\,Fb}{\dfrac{1,5b\cdot b^2}{6}} = 60\dfrac{F}{b^2} \\[2ex] \tau_{xy}^{T_z} = \dfrac{3}{2}\dfrac{T_z}{A} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3F}{1,5b^2} = 3\dfrac{F}{b^2} \\[2ex] \tau_{xz}^{T_y} = \dfrac{3}{2}\dfrac{T_y}{A} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2F}{1,5b^2} = 2\dfrac{F}{b^2} \end{cases}$$

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$T_\sigma^{O'} = \begin{pmatrix} 6,67 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{F}{b^2}$$

$$T_\sigma^{C} = \begin{pmatrix} 66,67 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{F}{b^2}$$

Punctul O'

$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 6,67\frac{F}{b^2}$

$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = -13\frac{F^2}{b^4}$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0$$

$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$

$\sigma^3 - 6,67\frac{F}{b^2}\sigma^2 - 13\frac{F^2}{b^4}\sigma = 0 \implies \sigma\left(\sigma^2 - 6,67\frac{F}{b^2}\sigma - 13\frac{F^2}{b^4}\right) = 0$

$\sigma = 0$; $\sigma_{1,2} = \dfrac{6,67 \pm \sqrt{6,67^2 + 52}}{2}\,\dfrac{F}{b^2} = \dfrac{6,67 \pm 9,82}{2}\,\dfrac{F}{b^2} = \begin{cases} 16,49\frac{F}{b^2} \\ -3,15\frac{F}{b^2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 16,49\dfrac{F}{b^2} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -3,15\dfrac{F}{b^2} \end{cases}$$

$\sigma_1 = 16,49\frac{F}{b^2}$:
$$\begin{cases} (6,67-16,49)\frac{F}{b^2}\,l_1' - 3\frac{F}{b^2}\,m_1' - 2\frac{F}{b^2}\,n_1' = 0 \\ -3\frac{F}{b^2}\,l_1' + (0-16,49)\frac{F}{b^2}\,m_1' = 0 \\ -2\frac{F}{b^2}\,l_1' + (0-16,49)\frac{F}{b^2}\,n_1' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1' = 1 \\ m_1' = -0,1819 \\ n_1' = -0,1212 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \sqrt{l_1'^2 + m_1'^2 + n_1}$ $\quad 1,0236$

$$\begin{cases} l_1 = \dfrac{l_1'}{\lambda_1} = 0,977 \\[1ex] m_1 = \dfrac{m_1'}{\lambda_1} = -0,1777 \\[1ex] n_1 = \dfrac{n_1'}{\lambda_1} = -0,1184 \end{cases}$$
→ cosinușii directori ai direcției lui σ_1.

$\sigma_2 = 0$
$$\begin{cases} 6,67\frac{F}{b^2}\,l_2' - 3\frac{F}{b^2}\,m_2' - 2\frac{F}{b^2}\,n_2' = 0 \\ -3\frac{F}{b^2}\,l_2' = 0 \\ -2\frac{F}{b^2}\,l_2' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_2' = 0 \\ m_2' = 1 \\ n_2' = -1,5 \end{cases}$$

$\lambda_2 = \sqrt{1 + 1,5^2} = 1,8027$

$$\begin{cases} l_2 = 0 \\ m_2 = 0,5547 \\ n_2 = -0,8323 \end{cases}$$

alegem pentru m_2' valoarea 1.

$\sigma_3 = -3,15\frac{F}{b^2}$:
$$\begin{cases} (6,67+3,15)\,l_3' - 3\,m_3' - 2\,n_3' = 0 \\ -3\,l_3' + 3,15\,m_3' = 0 \\ -2\,l_3' + 3,15\,n_3' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_3' = 1 \\ m_3' = 0,9523 \\ n_3' = 0,6349 \end{cases} \implies \begin{cases} l_3 = 0,6579 \\ m_3 = 0,6265 \\ n_3 = 0,4177 \end{cases}$$

alegem $l_3' = 1$

$\lambda_3 = 1,5199$

Punctul C

$$\begin{cases} I_1 = 66{,}67 \dfrac{F}{b^2} \\ I_2 = -4 \dfrac{F}{b^2} \\ I_3 = 0 \end{cases}$$

Se observă că T_σ^C reprezintă o stare de tensiune pla

$\sigma_x = 66{,}67 \dfrac{F}{b^2}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx} = -2 \dfrac{F}{b^2}$

$\sigma_y = \sigma_z = 0$ $\quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$

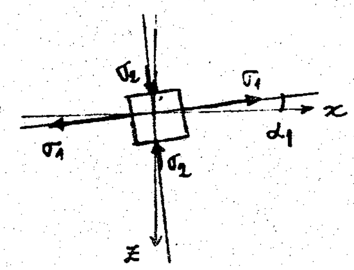
Deci se calculează tensiunile principale cu formula:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} = \begin{cases} 66{,}725 \dfrac{F}{b^2} \\ -0{,}055 \dfrac{F}{b^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 66{,}725 \dfrac{F}{b^2} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -0{,}055 \end{cases}$$

$tg 2\alpha = \dfrac{2\tau}{\sigma_x} = -0{,}059997$ $\quad 2\alpha = -3{,}43$ $\quad \alpha = -1{,}716 = \alpha_1$

$\alpha + 90 = 88{,}284 = \alpha_2$



σ_2 are direcția axei Oy.

Tensorul deformațiilor specifice în punctul O': $\quad T_\varepsilon^{O'} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$

$\gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} = -\dfrac{3}{G}\dfrac{F}{b^2}$

$\gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} = -\dfrac{2}{G}\dfrac{F}{b^2}$

$\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} = \dfrac{6{,}67}{E}\dfrac{F}{b^2}$

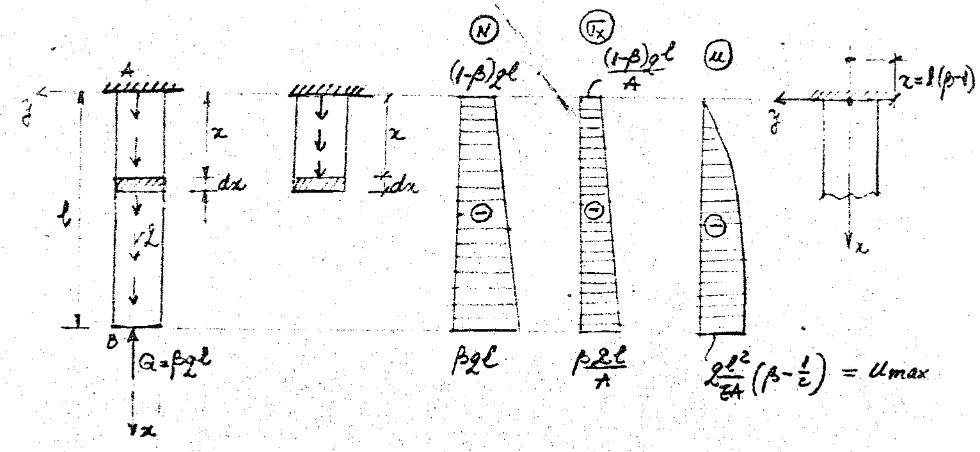
$$T_\varepsilon^{O'} = \begin{pmatrix} \frac{6{,}67}{E} & -\frac{3}{2G} & -\frac{1}{G} \\ -\frac{3}{2G} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{G} & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{F}{b^2}$$

6. O bară de oțel cu secțiune constantă suspendată ca în figură are greutatea q daN/m. La capătul inferior bara este comprimată axial cu forța $Q = \beta q l$ ($\beta > 1$). Să se determine:

1)- variația lui σ_x și ε pe lungimea barei;

2)- variația deplasărilor verticale ale tuturor punctelor barei;

3)- deplasarea verticală maximă și secțiunea unde are loc.



$N_x = q(l-x) - \beta q l = ql(1-\beta) - qx$

$\sigma_x = \dfrac{N_x}{A} = \dfrac{ql(1-\beta) - qx}{A}$

pentru: $x = l \quad \sigma_B = \dfrac{ql(1-\beta) - ql}{A} = -\dfrac{\beta q l}{A}$

$x = 0 \quad \sigma_A = \dfrac{ql(1-\beta)}{A} < 0$ deoarece $\beta > 1$

$\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$ $\rightarrow$ are aceeași variație ca și σ_x, în lungul barei

$\varepsilon_x = \dfrac{\Delta dx}{dx} \Rightarrow \Delta dx = \varepsilon_x dx = \dfrac{\sigma_x}{E} dx$

$$u_x = \int_0^x \Delta dx = \int_0^x \frac{\sigma_x}{E} dx = \int_0^x \frac{1}{E} \cdot \frac{(ql(1-\beta) - qx)}{A} = \frac{q}{EA}\int_0^x [l(1-\beta) - x]\,dx =$$

$$= \frac{q}{EA}\left[l(1-\beta)x - \frac{x^2}{2}\right]$$

pentru $x = 0 \quad u = 0$

$x = l \quad u = -\dfrac{ql^2}{EA}\left(\beta - \dfrac{1}{2}\right)$, $\beta - \dfrac{1}{2} > 0$

Pentru a studia maximul funcției $u(x)$ se calculează $\frac{du}{dx}$

$\dfrac{du}{dx} = 0 \Rightarrow l(1-\beta) - x = 0 \Rightarrow x = l(1-\beta) = -l(\beta - 1)$, $\beta - 1 > 0$

Rezultă că secțiunea unde se anulează prima derivată a lui "u" nu este pe grindă, deci $u_{max} = u_B$.

7. O platbandă de oțel 550 x 20 mm, lungă de 20 m, așezată orizontal pe sol, este trasă la o extremitate cu forța N. Coeficientul de frecare $\mu = 0,5$.

Se cere:

1) – valoarea limită a forței N până la care platbanda nu se mișcă;

2) – deformația piesei datorită acestei forțe.

3) – variația tensiunilor în lungul piesei.

Rezolvare:

1) Datorită greutății piesei, solul dezvoltă reacțiuni uniform repartizate:

$$p = 0,55 \times 0,2 \times 7800 = 85,8 \ daN/m$$

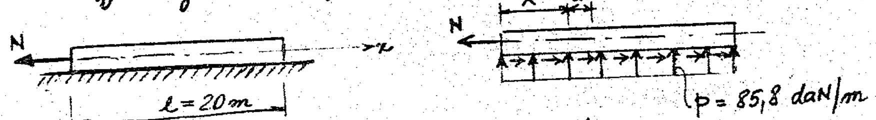
La o tendință de mișcare acestea produc o serie de forțe de frecare. Pe o lungime dx forța de frecare elementară este dF:

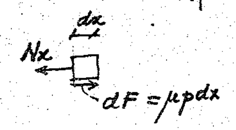
$$dF = \mu p \, dx$$

unde $p\,dx$ este reacțiunea solului.

Pentru ca platbanda să nu se miște trebuie ca forța N să fie egală cu forța de frecare (F).

$$N = \int_0^l dF = \int_0^l \mu p \, dx = \mu p \int_0^l dx = \mu p l = 0,45 \cdot 85,8 \cdot 20 = 772,2 \ daN.$$





2) Alungirea unui element infinit mic dx este:

$$\Delta dx = \varepsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx$$

$$N_x = \mu p x \ ; \quad \sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{\mu p x}{A} \ ; \quad \Delta dx = \frac{\mu p x}{EA} dx$$

Deformația totală este:

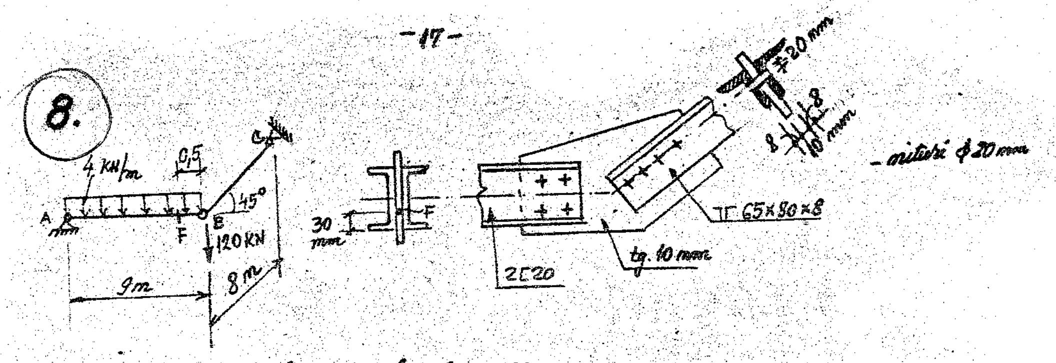
$$\Delta l = \int_0^l \Delta dx = \int_0^l \frac{\mu p x}{EA} dx = \frac{\mu p}{EA} \int_0^l x \, dx = \frac{\mu p x^2}{2EA}\Big|_0^l = \frac{\mu p l^2}{2EA} = \frac{Nl}{2EA}$$

$$\Delta l = \frac{772,2 \cdot 20 \cdot 10^2}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 55} = 0,0034 \ cm$$

3) – Tensiunile variază liniar cu x, fiind zero când x=0 și având valoarea maximă pentru x = l.

$$\sigma_{max} = \frac{\mu p l}{A} = \frac{N}{A} = \frac{772,2}{2 \cdot 55} = 7,02 \ daN/cm^2$$

8.



Pentru sistemul de bare din figură se cere:

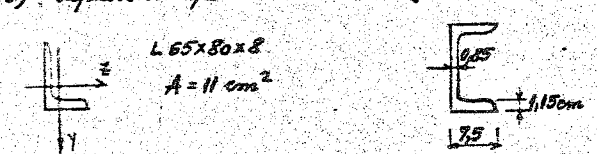
1) – diagramele de eforturi;

2) – să se verifice secțiunea barelor AB și BC și îmbinarea din nodul B;

3) – tensiunile principale și direcțiile principale de tensiune în punctul F ∈ secț. F

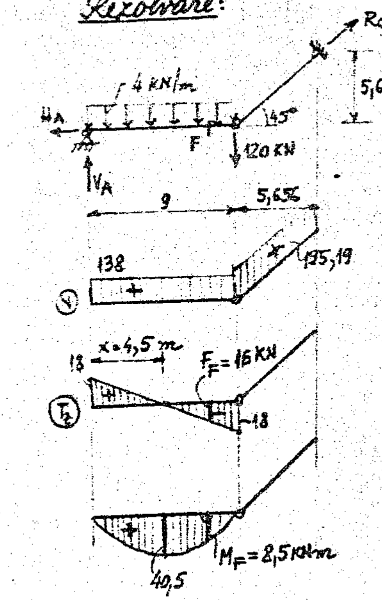
4) – deplasarea totală a punctului B;

5) – deplasarea pe verticală a mijlocului barei AB.



[20 $\begin{cases} A = 32,2 \ cm^2 \\ W_z = 191 \ cm^3 \\ I_z = 1910 \ cm^4 \end{cases}$

Rezolvare:



1)
$\Sigma M_B = 0 \quad V_A \cdot 9 - 4 \cdot 9 \cdot 4,5 = 0 \qquad V_A = 18 \ KN$

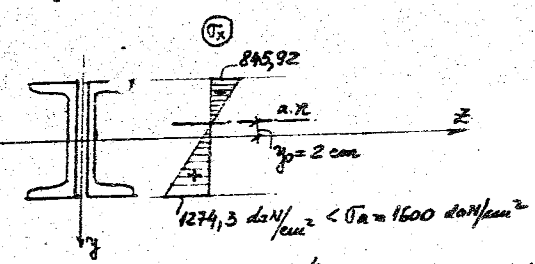
$\Sigma M_C = 0 \quad 18 \cdot 14,656 - 36 \cdot 10,156 - 120 \cdot 5,656 + H_A \cdot 5,656 = 0$

$H_A = 138 \ KN$

$\Sigma X = 0 \quad 138 - R_C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad R_C = 195,19 \ KN$

2) Bara AB este solicitată la încovoiere simplă cu forță axială, secțiunea periculoasă fiind la jumătatea barei AB.

$$\begin{cases} N = 138 \ KN \\ M_z = 40,5 \ KNm \end{cases}$$



$$I_z = 2 I_{z_1} = 2 \cdot 1910 = 3820 \ cm^4 \ ; \quad A = 2 \cdot 32,2 = 64,4 \ cm^2$$

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{e} = -\frac{I_z}{A} \cdot \frac{N}{M_z} = -\frac{3820}{2 \cdot 32,2} \cdot \frac{138 \cdot 10^2}{40,5 \cdot 10^4} = -2 \ cm$$

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_{max} = \frac{138 \cdot 10^2}{64,4} + \frac{40,5 \cdot 10^4}{3820} 10 = 1274,3 \ daN/cm^2$$

$$\sigma_{min} = \frac{138 \cdot 10^2}{64,4} + \frac{40,5 \cdot 10^4}{3820}(-10) = -845,92 \ daN/cm^2$$

Bara BC este solicitată la întindere, secțiunea periculoasă fiind în dreptul primului nit.

$$A_{netă} = 2\,(11 - 0{,}8\cdot 2) = 18{,}8\ cm^2$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A_{netă}} = \frac{195{,}19\cdot 10^2}{18{,}8} = 1038{,}24\ daN/cm^2 < \sigma_a = 1600\ daN/cm^2$$

Îmbinarea barei AB cu bara BC: (se calculează rezistența unui nit).

$$R_f = 2\,\frac{\pi d^2}{4}\,\tau_{af} = 2\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{4}\,1300 = 8164\ daN$$

$$R_{pta} = d\,(\Sigma t)_{min}\,\sigma_{pta} = 2\cdot 1\cdot 3200 = 6400\ daN$$

$$R_{nit} = \min\,[R_f;\ R_{pta}] = 6400\ daN = 64\ KN$$

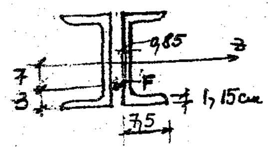
(AB) $R_{cap.nituri} = 4\cdot 64 = 256\ KN > N_{AB} = 138\ KN$

(BC) $R_{cap.nituri} = 4\cdot 64 = 256\ KN > N_{BC} = 195{,}19\ KN$

Rezultă că îmbinările rezistă la forțele axiale care le solicită.

3) În secțiunea F eforturile globale sînt:

$$F\begin{cases} T_z = 18 - 4\cdot 8{,}5 = -16\ KN \\ M_z = 18\cdot 8{,}5 - 4\cdot\dfrac{8{,}5^2}{2} = 8{,}5\ KNm \\ N = 138\ KN \end{cases}$$

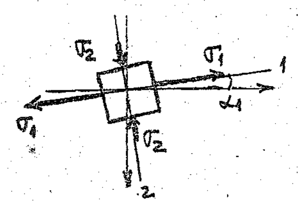


$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{M_z}{I_z}\,y_F + \dfrac{N}{A} = \dfrac{8{,}5\cdot 10^4}{3820}\cdot 7 + \dfrac{138\cdot 10^2}{64{,}4} = 370\ daN/cm^2 \\ \tau_{xy} = \dfrac{T_z S_z}{b I_z} = \dfrac{-16\cdot 10^2\,(2\cdot 7{,}5\cdot 1{,}15\cdot 9{,}425 + 2\cdot 4{,}85\cdot 0{,}85\cdot 7{,}925)}{2\cdot 0{,}85\cdot 3820} = -46{,}2\ \dfrac{daN}{cm^2} \end{cases}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{370}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{370^2 + 4\cdot 46{,}2^2} = \begin{cases} \sigma_1 = 375{,}68\ daN/cm^2 \\ \sigma_2 = -5{,}68\ daN/cm^2 \end{cases}$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x} = \frac{-2\cdot 46{,}2}{370} = -0{,}249 \Rightarrow 2\alpha = -14^\circ \rightarrow \begin{cases} \alpha = -7^\circ = \alpha_1 \\ \alpha + 90 = 83^\circ = \alpha_2 \end{cases}$$

$$\frac{tg\,\alpha_1}{\tau_{xy}} > 0$$

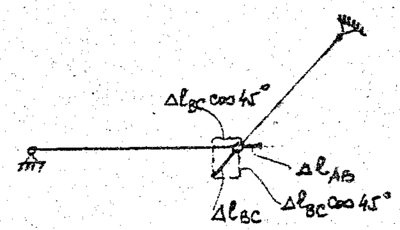


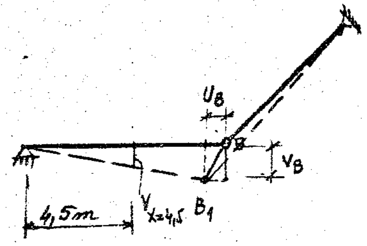
4) Pentru calculul deplasărilor trebuie studiată separat deformația barei produsă de forțele axiale și separat cea produsă de momentul încovoietor.

Sub acțiunea forței axiale fiecare bară se lungește cu:

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB}\cdot l_{AB}}{E A_{AB}} = \frac{138\cdot 10^2\cdot 9\cdot 10^2}{2{,}1\cdot 10^6\cdot 64{,}4} = 0{,}0918\ cm$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC}\cdot l_{BC}}{E\cdot A_{BC}} = \frac{195{,}19\cdot 10^2\cdot 8\cdot 10^2}{2{,}1\cdot 10^6\cdot 22} = 0{,}338\ cm.$$





Deplasarea pe orizontală a punctului B:

$$u_B = \Delta l_{AB} - \Delta l_{BC}\cos 45 = 0{,}0918 - 0{,}338\cos 45 = -0{,}147\ cm$$

Deplasarea pe verticală a punctului B din forța axială:

$$V_B = \Delta l_{BC}\cos 45^\circ = 0{,}239\ cm$$

Deplasarea totală în B este

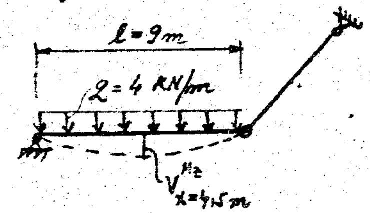
$$BB_1 = \sqrt{u_B^2 + V_B^2} = \sqrt{0{,}147^2 + 0{,}239^2} = 0{,}28\ cm$$

Deplasarea v, la jumătatea barei AB din forța axială este:

$$V_{x=4,5\,m} = 0{,}119\ cm$$

$$\frac{4{,}5\cdot 10^2}{900 - 0{,}147} = \frac{V_{x=4,5}}{0{,}239}$$

5) Deplasarea pe verticală a jumătății grinzii AB este compusă din deplasarea din încovoiere și deplasarea pe verticală din acțiunea forțelor axiale care deformează sistemul de bare ca în figura de mai sus.



$$V^{M_z}_{x=4,5m} = \frac{5 q\,l^4}{384\,E I_z} = \frac{5\cdot 4\cdot 9^4\cdot 10^8}{384\cdot 2{,}1\cdot 10^6\cdot 3820} = 0{,}425\ cm.$$

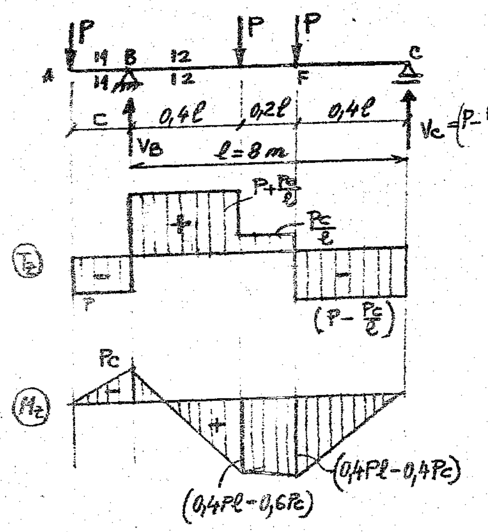
$$V_{x=4,5m} = 0{,}119 + 0{,}425 = 0{,}544\ cm$$

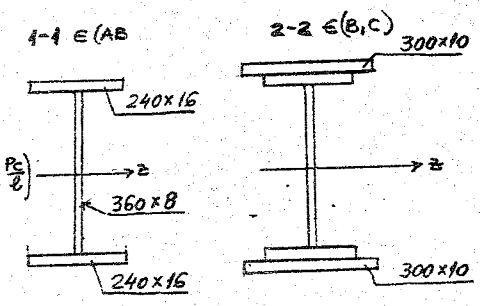
9. Se dă grinda din figură; secțiunea 2-2 din câmpul BC rezultă din secțiunea 1-1 de pe consola AB prin adăugarea câte unei platbande 300×10 mm la fiecare talpă. Se cere:

1)- Să se determine lungimea consolei c, astfel încât σ_{max} pe deschiderea BC și pe consola AB să aibă aceeași valoare.

2)- Cu rezultatul de la punctul 1, să se determine P astfel încât $\sigma_{max} = \sigma_a$, $\sigma_a = 1600$ daN/cm².

3)- Să se traseze diagramele σ și τ în secțiunea F^{dr}. Pentru diagrama τ se va preciza fluxul și valorile importante pe toate elementele secțiunii.





Rezolvare:

$$I_{z1} = 2\left(\frac{24 \cdot 1{,}6^3}{12} + 24 \cdot 1{,}6 \cdot 18{,}8^2\right) + \frac{0{,}8 \cdot 36^3}{12} = 30271 \text{ cm}^4$$

$$I_{z2} = 30271 + 2\left(\frac{30 \cdot}{12} + 30 \cdot 20{,}1^2\right) = 54516{,}6 \text{ cm}^4$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad V_B \cdot \ell - P(\ell + c) - P \cdot 0{,}6\ell - P \cdot 0{,}4\ell = 0 \qquad V_B = 2P + \frac{Pc}{\ell}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad -Pc + 0{,}4P\ell + 0{,}6P\ell - V_c \cdot \ell = 0 \qquad V_c = P - \frac{Pc}{\ell}$$

$$|\sigma_{max}^{AB}| = |\sigma_{max}^{BC}|$$

$$\frac{Pc \cdot 10^4}{30271} \cdot 19{,}6 = \frac{(0{,}4P\ell - 0{,}4Pc) \cdot 10^4}{54516{,}6} \cdot 20{,}6 \qquad (\ell = 8 \text{ m})$$

$$\frac{19{,}6\, c}{30271} = \frac{20{,}6\,(3{,}2 - 0{,}4c)}{54516{,}6}$$

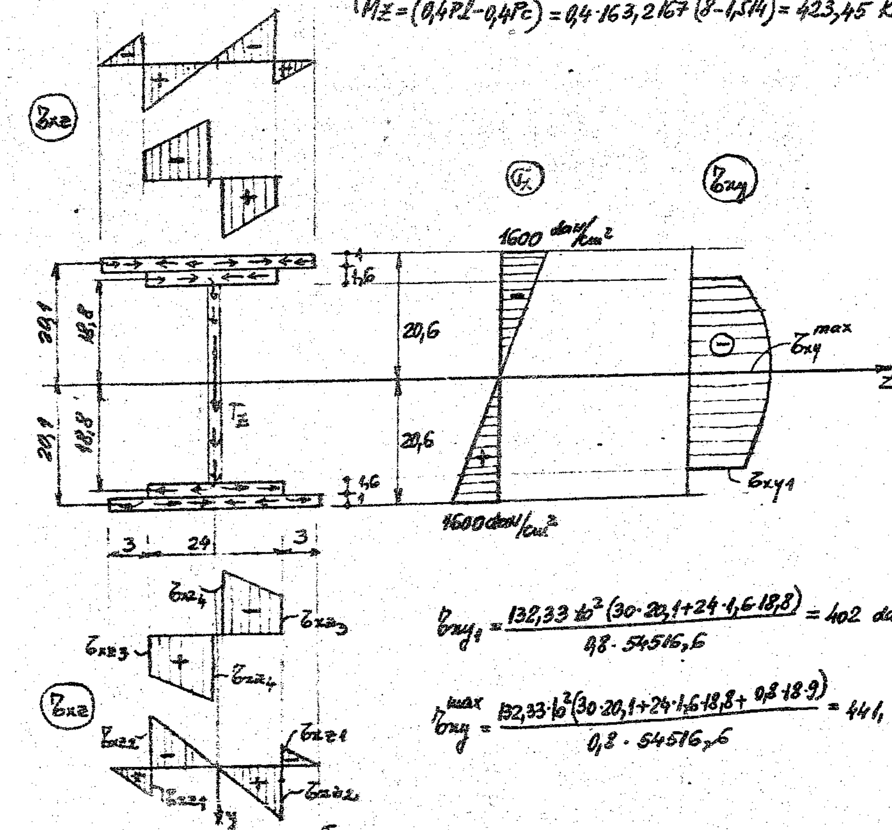
$$\boxed{c = 1{,}514 \text{ m}}$$

2)- $\sigma_{max} = \frac{Pc \cdot 10^4}{I_{z1}} y_1^{max} = 1600$ daN/cm²

$$\frac{P \cdot 1{,}514 \cdot 10^4}{30271} \cdot 19{,}6 = 1600 \implies \boxed{P = 163{,}2167 \text{ KN}}$$

3) În secțiunea F^{dr}:

$$\begin{cases} T_z = -\left(P - \frac{Pc}{\ell}\right) = -163{,}2167\left(1 - \frac{1{,}514}{8}\right) = -132{,}33 \text{ KN} \\ M_z = (0{,}4P\ell - 0{,}4Pc) = 0{,}4 \cdot 163{,}2167\,(8 - 1{,}514) = 423{,}45 \text{ KNm} \end{cases}$$



$$\tau_{xy_1} = \frac{132{,}33 \cdot 10^2\,(30 \cdot 20{,}1 + 24 \cdot 1{,}6 \cdot 18{,}8)}{0{,}8 \cdot 54516{,}6} = 402 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xy}^{max} = \frac{132{,}33 \cdot 10^2\,(30 \cdot 20{,}1 + 24 \cdot 1{,}6 \cdot 18{,}8 + 0{,}8 \cdot 18 \cdot 9)}{0{,}8 \cdot 54516{,}6} = 441{,}32 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xz_1} = \frac{132{,}23 \cdot 10^2\,(3 \cdot 1 \cdot 20{,}1)}{1 \cdot 54516{,}6} = 14{,}63 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xz_2} = \frac{132{,}23 \cdot 10^2\,(12 \cdot 1 \cdot 20{,}1)}{1 \cdot 54516{,}6} = 58{,}52 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xz_3} = \frac{132{,}23 \cdot 10^2\,(15 \cdot 1 \cdot 20{,}1)}{1{,}6 \cdot 54516{,}6} = 45{,}74 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xz_4} = \frac{132{,}23 \cdot 10^2\,(15 \cdot 1 \cdot 20{,}1 + 11{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 18{,}8)}{1{,}6 \cdot 54516{,}6} = 98{,}67 \text{ daN/cm}^2$$

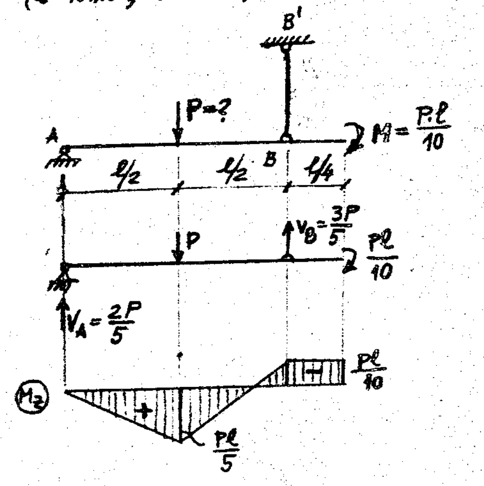
10. Pentru grinda din figură se cere:

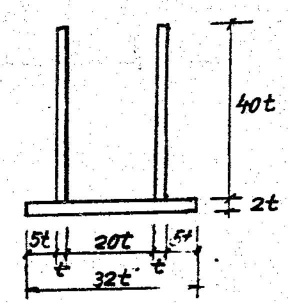
1) determinarea sarcinii capabile (P_{cap}) astfel ca σ_{max} din grindă să fie egal cu 1600 daN/cm²;

2) dimensionarea tirantului din B, A_t, pentru valoarea P_{cap} determinată astfel încât $\sigma_{tir.max} = 3000$ daN/cm²;

3) să se traseze diagrama tensiunilor tangențiale pe secțiunea B^{st} și să se calculeze valoarea τ_{zmax} (pentru P_{cap} determinat).

($l = 10$ m ; $t = 1$ cm)



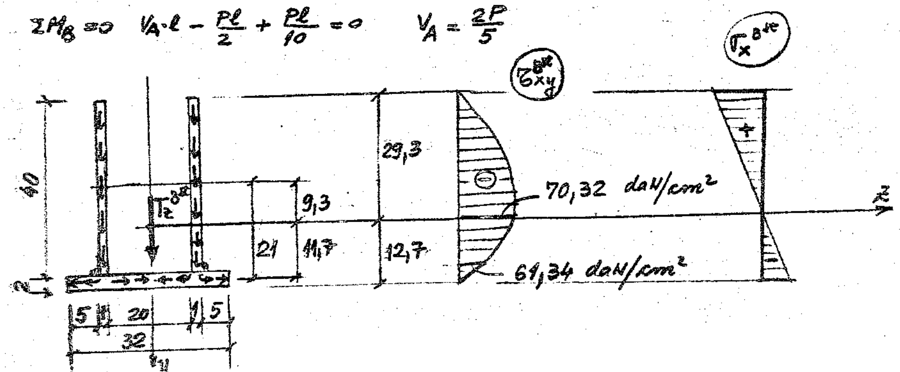


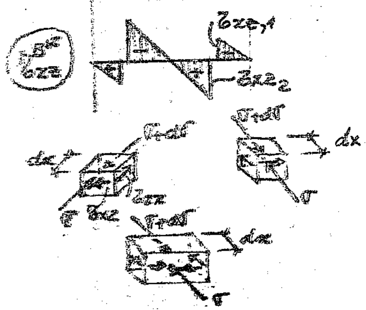
$t = 1$ cm.

<u>Rezolvare</u>:

$\Sigma M_A = 0 \quad \frac{Pl}{2} + \frac{Pl}{10} - V_B \cdot l = 0 \qquad V_B = \frac{3P}{5}$

$\Sigma M_B = 0 \quad V_A \cdot l - \frac{Pl}{2} + \frac{Pl}{10} = 0 \qquad V_A = \frac{2P}{5}$





Se calculează caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale:

$$y_0 = \frac{32 \cdot 2 \cdot 21}{144} = 9{,}3 \text{ cm}$$

$$I_z = 2\left(\frac{40^3}{12} + 40 \cdot 9{,}3^2\right) + \frac{32 \cdot 8}{12} + 32 \cdot 2 \cdot 11{,}7^2 = 26368{,}16 \text{ cm}^4$$

Pentru a determina P_{cap} se pune condiția ca $\sigma_{max} = 1600$ daN/cm²

$$M_{z\,max} = \frac{Pl}{5} = \frac{P \cdot 10}{5} = 2P \text{ kNm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{z\,max}}{I_z} y_{max} = \frac{2P \cdot 10^4}{26368{,}16} \cdot 29{,}3 = 1600 \text{ daN/cm}^2$$

$$\boxed{P_{cap} = 72 \text{ kN}}$$

2) Efortul în tirant este: $N_{tir} = V_B = \frac{3P}{5} = \frac{3 \cdot 72}{5} = 43{,}2$ kN.

$$\sigma_{tir} = \frac{N_{tir}}{A_{tir}} = 3000 \text{ daN/cm}^2$$

$$\frac{43{,}2 \cdot 10^2}{A_{tir}} = 3000 \implies \boxed{A_{tir} = 1{,}44 \text{ cm}^2}$$

3) $T_z^{B^{st}} = -\frac{3P}{5} = -43{,}2$ kN

$$\tau_{xy}^{t} = -\frac{43{,}2 \cdot 10^2 (32 \cdot 2 \cdot 11{,}7)}{2 \cdot 26368{,}16} = -61{,}34 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xy}^{max} = \frac{-43{,}2 \cdot 10^2 \left(2 \cdot 29{,}3 \cdot \frac{29{,}3}{2}\right)}{2 \cdot 26368{,}16} = -70{,}32 \text{ daN/cm}^2$$

Pe secțiunea B^{st} s-a trasat fluxul tensiunilor tangențiale, din acțiunea lui $T_z^{B^{st}}$. Pentru calculul lui τ_{xz} se folosește tot formula lui Juravschi.

$$\tau_{xz} = \frac{T_z \cdot S_z}{t \cdot I_z}$$

$$\tau_{xz,1} = \frac{43{,}2 \cdot 10^2 (5 \cdot 2 \cdot 11{,}7)}{2 \cdot 26368{,}16} = 9{,}584 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xz,2} = \frac{43{,}2 \cdot 10^2 \cdot (10 \cdot 2 \cdot 11{,}7)}{2 \cdot 26368{,}16} = 19{,}168 \text{ daN/cm}^2$$

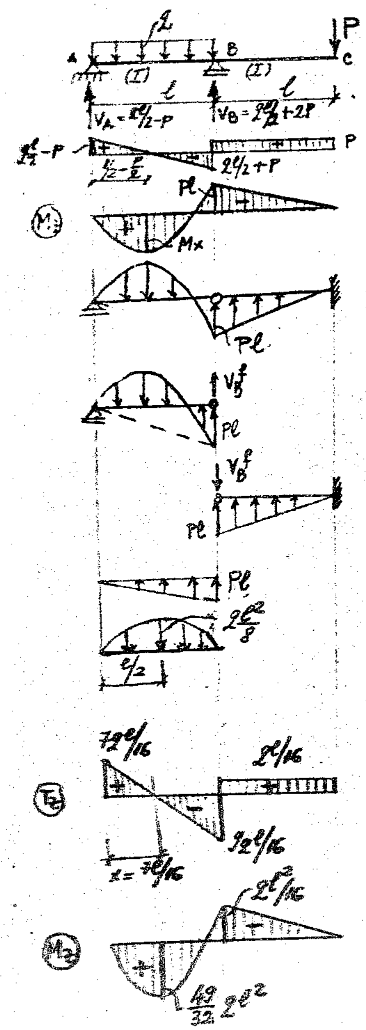
11. Pentru grinda din figură se cere:

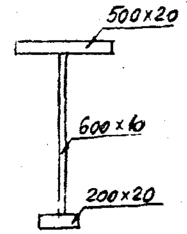
1) - Să se determine P în funcție de q și l astfel încît deplasarea verticală în C să fie nulă și să se traseze diagramele de eforturi.

2) - Pentru $l = 12$ m și secțiunea din figură să se determine $q_{admisibil}$ folosind încărcarea de la punctul 1).

3) - În punctul "i" din secțiunea B^{st} să se determine tensiunile principale și direcțiile principale de tensiune.

($\sigma_a = 1600$ daN/cm²)





Rezolvare:

$\Sigma M_A = 0 \quad q\frac{l^2}{2} + 2Pl - V_B \cdot l = 0 \qquad V_B = \frac{ql}{2} + 2P$

$\Sigma M_B = 0 \quad V_A \cdot l - q\frac{l^2}{2} + P \cdot l = 0 \qquad V_A = q\frac{l}{2} - P$

Pentru calculul săgeții în C se folosește metoda grinzii conjugate.

$$M_x = \left(q\frac{l}{2} - P\right) \cdot \frac{\left(\frac{ql}{2} - P\right)}{q} - q \cdot \frac{\left(q\frac{l}{2} - P\right)^2}{2q^2} =$$

$$= \frac{1}{2q}\left(\frac{ql}{2} - P\right)^2$$

$$\Sigma M_{fA} = 0 \quad \frac{2}{3} l \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} Pl \cdot l \cdot \frac{2}{3} l - V_f^B \cdot l = 0$$

$$V_f^B = \frac{1}{24} ql^3 - \frac{1}{3} Pl^2$$

$$v_C = \frac{M_{fC}}{EI_z} = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{1}{2} Pl \cdot l \cdot \frac{2}{3} l - \frac{1}{24} ql^4 + \frac{1}{3} Pl^3\right) = 0$$

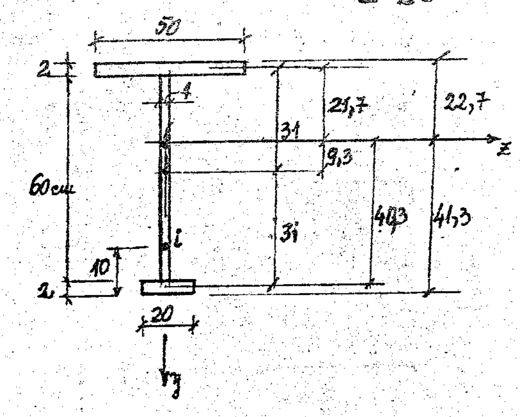
$$\boxed{P = \frac{ql}{16}}$$

Rezultă cu această valoare a lui P:

$$V_A = \frac{7ql}{16} \; ; \quad V_B = \frac{10ql}{16}$$

$$M_{max} = \frac{1}{2q}\left(\frac{ql}{2} - \frac{ql}{16}\right)^2 = \frac{49 ql^2}{512}$$

Pentru a determina încărcarea capabilă se pune condiția ca în secțiunea cea mai solicitată $\sigma_{max} = \sigma_a$.



$$y_G = -\frac{50 \cdot 2 \cdot 31 + 20 \cdot 2 \cdot 31}{200} = -9,3 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{50 \cdot 8}{12} + 100 \cdot 21,7^2 + \frac{60^3}{12} + 60 \cdot 9,3^2 + \frac{20 \cdot 8}{12} + 40 \cdot 40,3^2 = 135288,67 \text{ cm}^4$$

pentru $l = 12$ m $\Rightarrow$ $M_z^{max} = \frac{49 \cdot 12^2 \cdot q}{512} = 13,78125\, q$ KNm

$$\sigma_{max} = \frac{M_z^{max}}{I_z} \cdot y_{max} = \frac{13,78125\, q \cdot 10^4}{135288,67} = 1600$$

$$\boxed{q_{cap} = 38,03 \text{ KN/m}}$$

3) În secțiunea B^{st} eforturile globale sînt:

$$\begin{cases} M_z = -P \cdot l = -q\frac{l^2}{16} = -\frac{38,03 \cdot 12^2}{16} = -342,28294 \text{ KNm} \\ T_z = -\frac{9ql}{16} = -\frac{9 \cdot 38,03 \cdot 12}{16} = -256,7025 \text{ KN} \end{cases}$$

Se calculează tensiunile în punctul "i" $\in B^{st}$

$$\sigma_{xi} = \frac{M_z}{I_z} y_i = \frac{-342,28294 \cdot 10^4}{135288,67} 31,3 = -791,9 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xyi} = \frac{T_z \cdot S_z}{b I_z} = \frac{-256,7025 \cdot 10^2 \left(20 \cdot 2 \cdot 40,3 + 8 \cdot 1 \cdot 35,3\right)}{1 \cdot 135288,67} = -359,45 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} = -\frac{791,9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{791,9^2 + 4 \cdot 359,45^2} =$$

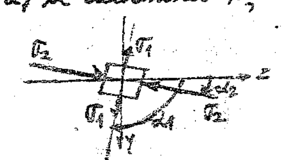
$$= -395,95 \pm 534,76$$

$\sigma_1 = 138,81$ daN/cm² ; $\sigma_2 = -930,71$ daN/cm²

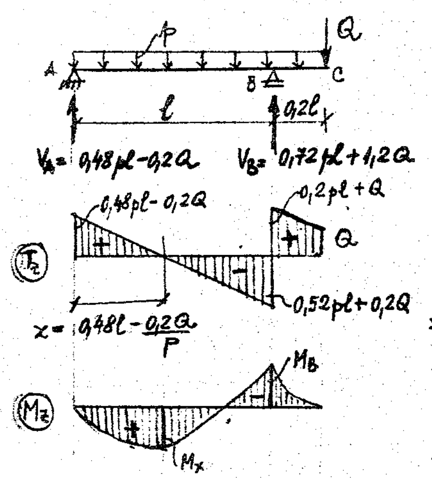
$$tg\, 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x} = \frac{-2 \cdot 359,45}{-791,9} = 0,9078 \rightarrow \quad 2\alpha = 42,23^\circ$$

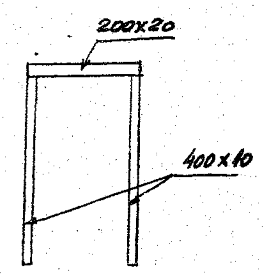
$\alpha = 21,115^\circ$; $\alpha + 90 = 111,115^\circ$

Unghiul α_1 se determină știind că $\frac{\tau_{xy}}{tg\,\alpha_1} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = 111,115^\circ \\ \alpha_2 = 21,115^\circ \end{matrix}$



12 Ce forță trebuie să fie aplicată în capătul liber astfel încât săgeata în această secțiune să fie nulă.
Folosind rezultatele precedente și cunoscând $l = 10\,m$ și forma de secțiune din figură, să se determine p_{cap}.





Rezolvare:

$$\Sigma M_A = 0 \quad p \cdot 1{,}2l \cdot 0{,}6l + Q \cdot 1{,}2l - V_B \cdot l = 0$$

$$V_B = 1{,}2Q + 0{,}72pl$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad V_A \cdot l - p \cdot 1{,}2l \cdot 0{,}4l + Q \cdot 0{,}2l = 0$$

$$V_A = 0{,}48pl - 0{,}2Q$$

$$M_x = (0{,}48pl - 0{,}2Q) \cdot \frac{(0{,}48pl - 0{,}2Q)}{p} - p \cdot \frac{(0{,}48pl - 0{,}2Q)^2}{2p^2} = \frac{(0{,}48pl - 0{,}2Q)^2}{2p}$$

$$M_B = -(0{,}02pl^2 + 0{,}2Ql)$$

Se calculează expresia săgeții cu metoda parametrilor în origine.

$$v(x) = \varphi_0 x - \frac{V_A x^3}{6EI} + \frac{px^4}{24EI} - \frac{V_B (x-l)^3}{6EI}\Big|_{x>l}$$

pentru $x = l$ $\quad v(l) = 0$

$$v(l) = 0 = \varphi_0 l - \frac{V_A l^3}{6EI} + \frac{pl^4}{24EI}$$

$$\varphi_0 = \frac{V_A l^2}{6EI} - \frac{pl^3}{24EI}$$

$$v(x) = \frac{V_A \cdot l^2}{6EI} x - \frac{pl^3}{24EI} x - \frac{V_A x^3}{6EI} + \frac{px^4}{24EI} - \frac{V_B (x-l)^3}{6EI}\Big|_{x>l}$$

pentru $x = 1{,}2l$ $\quad v(1{,}2l) = 0$

$$v(1{,}2l) = 0 = \frac{1{,}2 V_A l^3}{6EI} - \frac{1{,}2 pl^4}{24EI} - \frac{1{,}2^3 \cdot V_A l^3}{6EI} + \frac{1{,}2^4 p l^4}{24EI} - \frac{0{,}2^3 V_B \cdot l^3}{6EI}$$

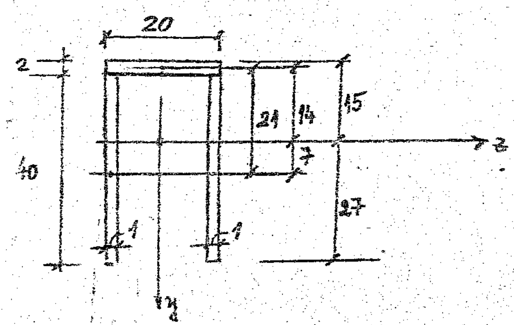
$$-0{,}088 V_A + 0{,}0364 pl - 0{,}0013333 V_B = 0$$

$$-0{,}088(0{,}48pl - 0{,}2Q) + 0{,}0364pl - 0{,}0013333(0{,}72pl + 1{,}2Q) = 0$$

$$0{,}016Q - 0{,}0068pl = 0$$

$$\boxed{Q = 0{,}425pl}$$

Pentru: $l = 10\,m \Rightarrow \begin{cases} Q = 4{,}25p \\ M_x = \dfrac{(4{,}8p - 0{,}2 \cdot 4{,}25p)^2}{2p} = 7{,}80125p \ \text{KNm} \\ M_B = -(2p + 2 \cdot 4{,}25p) = -10{,}5p \ \text{KNm} \end{cases}$



$$y_G = \frac{-40 \cdot 21}{120} = -7\,cm$$

$$I_z = 2\left(\frac{40^3}{12} + 40 \cdot 7^2\right) + \frac{20 \cdot 8}{12} + 40 \cdot 14^2 = 22440\,cm^4$$

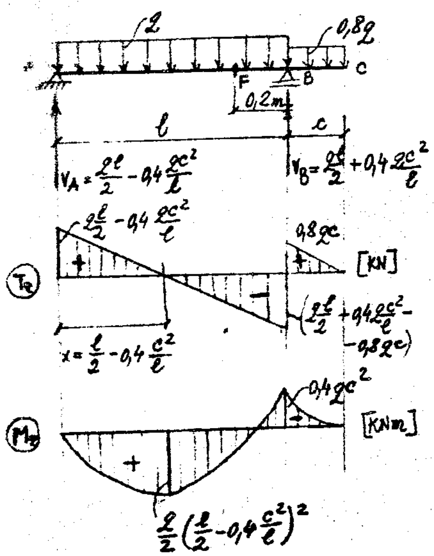
$$\sigma_{max} = \frac{M_z^{max}}{I_z} y_{max} = 1600\ daN/cm^2$$

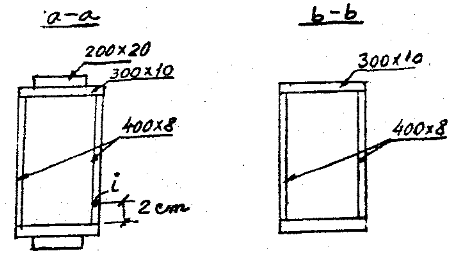
$$\frac{10{,}5p \cdot 10^4}{22440} \cdot 27 = 1600 \Longrightarrow \boxed{p_{cap} = 12{,}6645\ KN/m}$$

13. Se dă grinda din figură cu secțiune a-a pe consolă și b-b în câmp.

Se cere:

1) $c = ?$ pentru ca $\sigma_{max}^{cimp} = \sigma_{max}^{consolă}$;
2) Pentru $l = 6m$, $\sigma_a = 1600$ daN/cm² să se determine încărcarea capabilă (q_a);
3) Diagramele σ_x și τ pe toate elementele secțiunii în câmp și pe consolă;
4) Direcțiile principale de tensiune și tensiuni principale în "i" ∈ secțiunii F.





Rezolvare:

$$\Sigma M_A = 0 \quad q\frac{l^2}{2} + 0,8q\frac{c^2}{2} - V_B \cdot l = 0$$

$$V_B = \frac{ql}{2} + 0,8q\frac{c^2}{2l}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad V_A l - \frac{ql^2}{2} + 0,8\frac{qc^2}{2} = 0$$

$$V_A = \frac{ql}{2} - 0,4\frac{qc^2}{l}$$

$$T_x = 0 \Rightarrow x = \frac{\left(\frac{ql}{2} - 0,4\frac{qc^2}{l}\right)}{q}$$

$$M_x = \frac{\left(\frac{ql}{2} - 0,4\frac{qc^2}{l}\right)^2}{q} - \frac{q\left(\frac{ql}{2} - 0,4\frac{qc^2}{l}\right)^2}{2q^2} = \frac{\left(\frac{ql}{2} - 0,4\frac{qc^2}{l}\right)^2}{2q} = \frac{q}{2}\left(\frac{l}{2} - 0,4\frac{c^2}{l}\right)^2$$

$$I_z^{b-b} = I_z^{consolă} = \frac{30 \times 42^3}{12} - \frac{28,4 \cdot 40^3}{12} = 33753,33 \text{ cm}^4$$

$$I_z^{a-a} = I_z^{cimp} = 33753,33 + 2\left(\frac{20 \cdot 2^3}{12} + 20 \cdot 2 \cdot 22^2\right) = 72500 \text{ cm}^4$$

$$W_z^{consolă} = \frac{33753,33}{21} = 1607,3 \text{ cm}^3$$

$$W_z^{cimp} = \frac{72500}{23} = 3152,17 \text{ cm}^3$$

1) $\left|\sigma_{max}^{cimp}\right| = \left|\sigma_{max}^{consolă}\right|$

$$\frac{\frac{q}{2}\left(\frac{l}{2} - 0,4\frac{c^2}{l}\right)^2}{W_z^{cimp}} = \frac{0,4qc^2}{W_z^{consolă}}$$

$$\frac{\frac{q}{2}\left(\frac{l}{2} - 0,4\frac{c^2}{l}\right)^2}{3152,17} = \frac{0,4qc^2}{1607,3}$$

$$\left(\frac{l}{2} - 0,4\frac{c^2}{l}\right)^2 = 1,5689c^2$$

$$\frac{l}{2} - 0,4\frac{c^2}{l} = \pm 1,2525c$$

* $\frac{l}{2} - 0,4\frac{c^2}{l} = 1,2525c$

$$0,4c^2 + 1,2525lc - 0,5l^2 = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{-1,2525l \pm \sqrt{(1,2525l)^2 + 0,8l^2}}{0,8} = \begin{cases} 0,358l \\ -3,489l \end{cases}$$

$$\frac{l}{2} - 0,4\frac{c^2}{l} = -1,2525c$$

$$0,4c^2 - 1,2525lc - 0,5l = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{1,2525l \pm \sqrt{(1,2525l)^2 + 0,8l^2}}{0,8} = \begin{cases} 3,489l \\ -0,358l \end{cases}$$

"c" este o mărime pozitivă, deci se elimină soluțiile negative obținute pentru c. Din cele două soluții pozitive pentru "c" se reține numai soluția pentru care $c < l$

deci: $\boxed{c = 0,358l}$

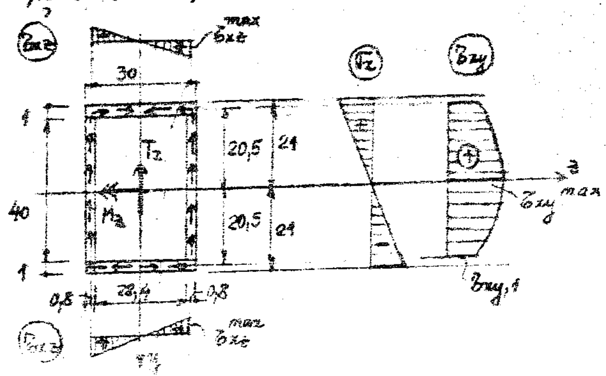
2) Pentru $l = 6m$: $c = 0,358 \cdot 6 = 2,148$ m

Se pune condiția ca $\sigma_{max} = \sigma_a$ pentru a determina încărcarea capabilă. Cum $\sigma_{max}^{cimp} = \sigma_{max}^{consolă}$, este indiferent care relație folosim pentru σ_{max} (câmp sau consolă).

$$\frac{0,4q\,2,148^2 \cdot 10^4}{1607,3} = 1600 \text{ daN/cm}^2$$

$$\boxed{q = 139,344 \text{ KN/m}}$$

3) - Se trasează calitativ diagramele σ și τ pe toate elementele secțiunii transversale, pentru o [illegible] curentă de pe consolă și din câmp.



- secțiune de pe consolă

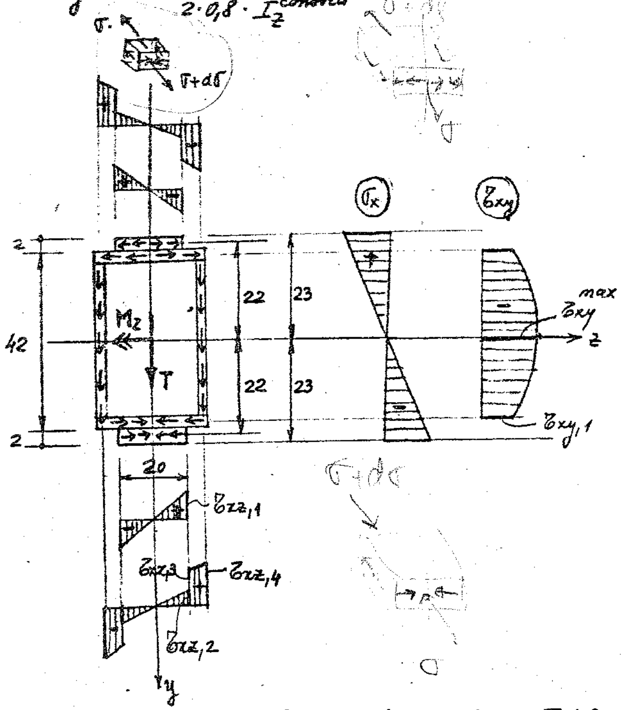
Pentru consolă:

$T>0\ ;\ M<0$

$$\tau_{xz}^{max} = \frac{T_z\cdot(14{,}6\cdot 1\cdot 20{,}5)}{1\cdot I_z^{consol\breve{a}}}$$

$$\tau_{xy,1} = \frac{T_z\,(30\cdot 1\cdot 20{,}5)}{2\cdot 0{,}8\cdot I_z^{consol\breve{a}}}$$

$$\tau_{xy}^{max} = \frac{T_z\,(30\cdot 1\cdot 20{,}5 + 2\cdot 0{,}8\cdot 20\cdot 10)}{2\cdot 0{,}8\cdot I_z^{consol\breve{a}}}$$



– secțiune în cîmp.

Pentru cîmp, considerăm secțiunea F: $T<0,\ M<0$

$$\tau_{xz,1} = \frac{T_z\,(10\cdot 2\cdot 22)}{2\cdot I_z^{c\hat{\imath}mp}}$$

$$\tau_{xz,2} = \frac{T_z\,(10\cdot 1\cdot 20{,}5)}{1\cdot I_z^{c\hat{\imath}mp}}$$

$$\tau_{xz,3} = \frac{T_z\,(10\cdot 1\cdot 20{,}5 + 10\cdot 2\cdot 22)}{1\cdot I_z^{c\hat{\imath}mp}}$$

$$\tau_{xz,4} = \frac{T_z\,(14{,}2\cdot 1\cdot 20{,}5 + 10\cdot 2\cdot 22)}{1\cdot I_z^{c\hat{\imath}mp}}$$

$$\tau_{xy,1} = \frac{T_z\,(20\cdot 2\cdot 22 + 30\cdot 1\cdot 20{,}5)}{2\cdot 0{,}8\cdot I_z^{c\hat{\imath}mp}}$$

$$\tau_{xy}^{max} = \frac{T_z\,(20\cdot 2\cdot 22 + 30\cdot 1\cdot 20{,}5 + 2\cdot 0{,}8\cdot 20\cdot 10)}{2\cdot 0{,}8\cdot I_z^{c\hat{\imath}mp}}$$

4) În secțiunea F:

$$\begin{cases} T_z^F = 0{,}2q + 0{,}8qc - V_B = 139{,}344\,(0{,}2+0{,}8\cdot 2{,}148) - \cancel{460{,}893} = -193{,}575\ kN \\ M_z = V_B\cdot 0{,}2 - q\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 - 0{,}8qc\left(\frac{c}{2}+0{,}2\right) = 460{,}893\cdot 0{,}2 - 139{,}344\cdot 0{,}02 - \\ \quad -0{,}8\cdot 139{,}344\cdot 2{,}148\left(\frac{2{,}148}{2}+0{,}2\right) = -215{,}665\ kNm \end{cases}$$

$$V_B = \frac{139{,}344\cdot 6}{2} + \frac{0{,}4\cdot 139{,}344\cdot 2{,}148^2}{6} = 460{,}893\ kN.$$

$$„i": \begin{cases} \sigma_x = -\frac{215{,}665\cdot 10^4}{72500}\cdot 18 = -535{,}44\ daN/cm^2 \\ \tau_{xy} = \frac{-193{,}575\cdot 10^2(20\cdot 2\cdot 22 + 30\cdot 20{,}5 + 2\cdot 0{,}8\cdot 2\cdot 19)}{2\cdot 0{,}8\cdot 72500} = -259{,}62\ daN/cm^2 \end{cases}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau_{xy}^2} = -\frac{535{,}44}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{535{,}44^2+4\cdot 259{,}62^2} =$$

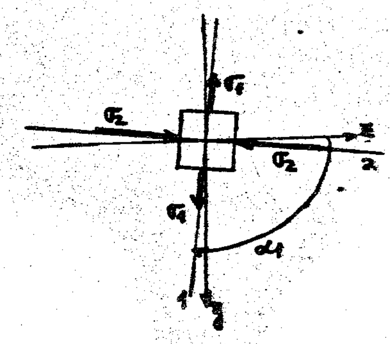
$$= -267{,}72 \pm 372{,}93$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 105{,}21\ daN/cm^2 \\ \sigma_2 = -640{,}65\ daN/cm^2 \end{cases}$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x} = \frac{-2\cdot 259{,}62}{-535{,}44} = 0{,}9697 \implies 2\alpha = 44{,}12^\circ$$

$$\alpha = 22{,}06^\circ = \alpha_2$$

$$\alpha + 90 = 112{,}06 = \alpha_1 \qquad \left(\frac{tg\,\alpha_1}{\tau_{xy}} > 0\right)$$

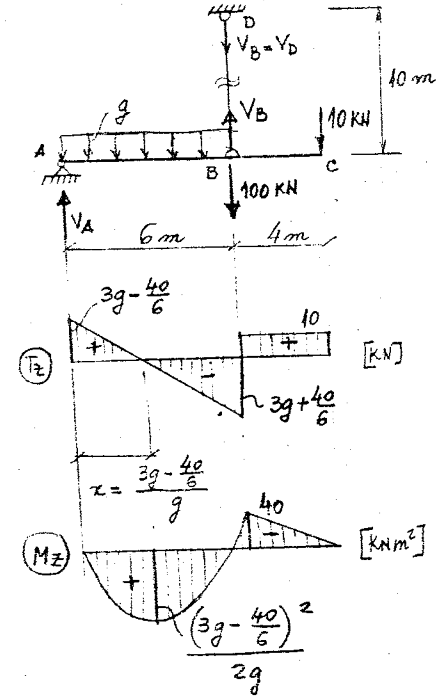


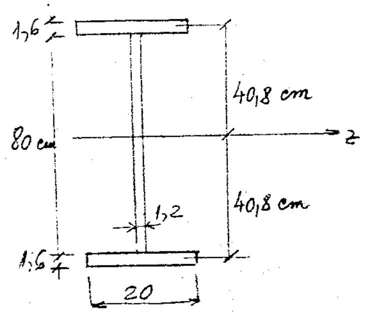
14. Pentru grinda din figură se cere:

1) – $q = ?$ astfel încât $\sigma_{max} = 2000$ daN/cm²;

2) – dimensionarea firului BD, $\sigma_a = 3600$ daN/cm²;

3) – deplasarea pe verticală a capătului "C" al grinzii.





Rezolvare:

$$I_z = 2\left(\frac{20\cdot 1{,}6^3}{12} + 20\cdot 1{,}6\cdot 40{,}8^2\right) + \frac{1{,}2\cdot 80^3}{12} = 157750\ \text{cm}^4$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad q\cdot 6\cdot 3 + 100\cdot 6 + 100 - V_B\cdot 6 = 0$$

$$V_B = \frac{700}{6} + 3q \quad \text{KN}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad V_A\cdot 6 - q\cdot 6\cdot 3 + 40 = 0$$

$$V_A = 3q - \frac{40}{6}$$

Punem condiţia ca $\sigma_{max} = 2000$ daN/cm² şi determinăm "q".

$$\sigma_{max} = \frac{\left(3q - \frac{40}{6}\right)^2\cdot 10^4}{2q}\cdot\frac{41}{157750} = 2000\ \text{daN/cm}^2$$

$$\left(3q - \frac{40}{6}\right)^2 = 1516{,}8269$$

$$3q - \frac{40}{6} = \pm\sqrt{1516{,}8269} = \pm 38{,}946$$

Soluţia cu ⊖ în faţa radicalului nu se ia în considerare, pentru că se obţine valoare negativă pentru "q".

$$3q - \frac{40}{6} = 38{,}946 \Rightarrow \boxed{q = 15{,}2\ \text{KN/m}}$$

$$V_B = \frac{700}{6} + 3\cdot 15{,}2 = 162{,}2666\ \text{KN}$$

2) Firul BD este solicitat la întindere $N_{BD} = V_B = 162{,}2666$ KN.

$$A_{fir} \geq \frac{N_{BD}}{\sigma_a} = \frac{162{,}2666\cdot 10^2}{3600} = 4{,}5\ \text{cm}^2$$

$$\frac{\pi d^2}{4} = 4{,}5 \Rightarrow \boxed{d_{nec} = 2{,}4\ \text{cm}}$$

3) Pentru calculul săgeţii în C se foloseşte metoda grinzii conjugate

$$V_A = 3q - \frac{40}{6} = 3\cdot 15{,}2 - \frac{40}{6} = 38{,}934\ \text{KN}$$

$$v_0 = 0;\quad \varphi_0 = ?$$

$$v(x) = \varphi_0 x - \frac{38{,}934\cdot x^3}{6EI_z} + \frac{15{,}2\cdot[x^4 - (x-6)^4]}{24\,EI_z} - \frac{162{,}2666\,(x-6)^3}{6EI_z}\Big|_{x>6}$$

Pentru a determina pe φ_0 se pune condiţia ca în B,

$v_B = \Delta l_{fir}$

$$\Delta l_{fir} = \frac{N_{BD}\cdot l_{BD}}{E A_{fir}} = \frac{162{,}2666\cdot 10^2\cdot 10^3}{2{,}1\cdot 10^6\cdot 4{,}5} = 1{,}717\ \text{cm}$$

Deci pentru $x = 6$ m $v_B = 1{,}717$ cm

$$v_B = 600\,\varphi_0 - \frac{38{,}934\cdot 6^3\cdot 10^8}{6EI_z} + \frac{15{,}2\cdot 6^4\cdot 10^8}{24\,EI_z} = 1{,}717\ \text{cm}$$

$$EI_z = 2{,}1\cdot 10^6\cdot 157750\ \text{daN cm}^2$$

Rezultă:

$$\varphi_0 = 0{,}00315\ \text{rad}.$$

Pentru $x = 10$ m obţinem v_C:

$$v_C = 0{,}00315\cdot 10^3 - \frac{(38{,}934\cdot 10^3)\cdot 10^8}{6EI_z} + \frac{15{,}2\cdot[10^4 - 4^4]\cdot 10^8}{24\,EI_z} - \frac{62{,}2666\cdot 4^3\cdot 10^8}{6EI_z} =$$

$$= 3{,}07\ \text{cm}$$

$$\boxed{v_C = 3{,}07\ \text{cm}}$$

Observaţie: 10^8 de la numărător a apărut de la transformarea KNm³ în daN cm³

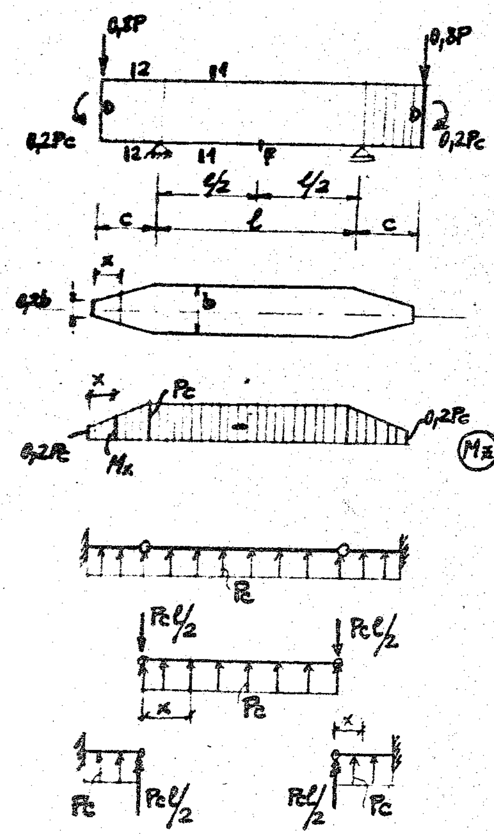
1 KNm³ = 10^8 daN cm³

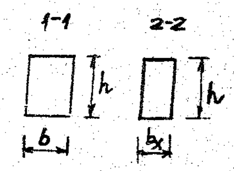
15.

1) - Să se arate că grinda din figură este de egală rezistență la încovoiere.

2) - Să se determine fibra medie deformată a grinzii pe toată lungimea.

3) - Să se determine raportul $\alpha = \frac{c}{\ell}$ astfel încât deplasările de la extremitățile consolei și din mijlocul deschiderii să fie egale și de semn contrar, $v_D = -v_F$.





Rezolvare:

1)

$$\begin{cases} b_x = \dfrac{b\cdot 0{,}2(c+4x)}{c} \\ I_x = \dfrac{b_x h^3}{12} = \dfrac{bh^3}{12}\cdot\dfrac{0{,}2(c+4x)}{c} = \\ \quad = I_0\cdot\dfrac{0{,}2(c+4x)}{c} \\ W_x = \dfrac{I_x}{\frac{h}{2}} = W_0\cdot\dfrac{0{,}2(c+4x)}{c} \end{cases}$$

- pentru cîmp avem:

$$\begin{cases} I_z = \dfrac{bh^3}{12} = I_0 \\ W_0 = \dfrac{bh^2}{6} \end{cases}$$

$$M_x = -(0{,}2Pc + 0{,}8Px) = -P\,0{,}2(c+4x)$$

Pentru ca grinda să fie de egală rezistență la încovoiere trebuie ca $\sigma_{x\,max}$ să fie aceiași în orice secțiune a grinzii.

Deci: $\sigma^{1-1}_{x\,max} = \sigma^{2-2}_{x\,max}$

$$\sigma_x^{1-1} = \frac{P\cdot c}{W_0}$$

$$\sigma_x^{2-2} = \frac{P\cdot 0{,}2(c+4x)}{W_0\cdot\frac{0{,}2(c+4x)}{c}} = \frac{Pc}{W_0}$$

Condiția fiind îndeplinită, grinda este de egală rezistență la încovoiere.

2) Pentru a determina fibra medie deformată a grinzii se alege metoda grinzii conjugate.

Se calculează sarcina elastică $q = EI_0\cdot\frac{M_z}{EI_z}$

consolă: $$q = EI_0\cdot\frac{-P\,0{,}2(c+4x)}{E\cdot I_0\,\frac{0{,}2(c+4x)}{c}} = -Pc$$

cîmp: $$q = EI_0\cdot\frac{-Pc}{EI_0} = -Pc$$

Deci încărcarea fictivă a grinzii conjugate este constantă.

$$v = \frac{M_f(q)}{EI_0}\;;\quad \varphi = \frac{T_f(q)}{EI_0}$$

cîmp: $$v(x) = \frac{1}{EI_0}\left(-\frac{Pc\ell}{2}x + \frac{Pc}{2}x^2\right) \qquad x\in[0;\ell]$$

consolă (dreapta): $$v(x) = \frac{1}{EI_0}\left(\frac{Pc\ell}{2}x + \frac{Pc}{2}x^2\right) \qquad x\in[0;c]$$

3) $v_D = -v_F$

$$v_D = v\big|_{x=c} = \frac{1}{EI_0}\left(\frac{P\ell c^2}{2} + \frac{Pc^3}{2}\right) = \frac{1}{EI_0}\cdot\frac{Pc^2}{2}(\ell+c)$$

$$v_F = v\big|_{x=\ell/2} = \frac{1}{EI_0}\left(-\frac{Pc\ell^2}{4} + \frac{Pc\ell^2}{8}\right) = \frac{1}{EI_0}\left(-\frac{Pc\ell^2}{8}\right)$$

$$\frac{1}{EI_0}\,\frac{Pc^2}{2}(\ell+c) = \frac{1}{EI_0}\,\frac{Pc\ell^2}{8}$$

$$c(\ell+c) = \frac{\ell^2}{4}$$

$$\ell^2 - 4c\ell - 4c^2 = 0 \quad \Big|:(-\ell^2)$$

$$4\left(\frac{c}{\ell}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{\ell}\right) - 1 = 0$$

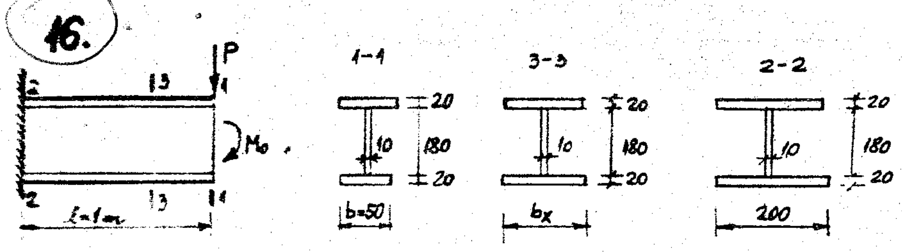
sau $4\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0$, unde $\alpha = \frac{c}{\ell}$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{4} = \frac{-2\pm 2{,}8284}{4} = \begin{cases}\alpha_1 = 0{,}2071 \\ \alpha_2 = -1{,}207\end{cases}$$

Soluția corectă este pentru "α" pozitiv, deci:

$$\boxed{\alpha = \frac{c}{\ell} = 0{,}2071}$$

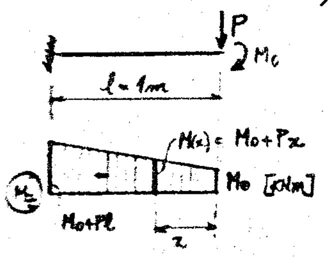
16.



1) Să se determine M_o și P astfel încât în secțiunea 1-1 și 2-2 $\sigma_{max} = 1600\ daN/cm^2$.

2) - Să se determine legea de variație a lățimii $b_x = b(x)$ în secțiunea 3-3 astfel încât grinda să fie de egală rezistență.

Rezolvare:



1)

$$I_{z1} = 2\left(\frac{5\cdot2^3}{12}+10\cdot10^2\right)+\frac{1\cdot18^3}{12} = 2493\ cm^4$$

$$W_{z1} = \frac{2493}{11} = 226{,}6\ cm^3$$

$$\sigma_{max}^{1-1} = \frac{M_0\cdot10^4}{W_{z1}} = 1600\ daN/cm^2$$

$$M_0 = \frac{1600\cdot226{,}6}{10^4} = 36{,}256\ KNm$$

$$I_{z2} = 2\left(\frac{20\cdot2^3}{12}+40\cdot10^2\right)+\frac{1\cdot18^3}{12} = 8513\ cm^4$$

$$W_{z2} = \frac{8513}{11} = 773{,}9\ cm^3$$

$$\sigma_{max}^{2-2} = \frac{(M_0+P\ell)\,10^4}{W_{z2}} = 1600\ daN/cm^2$$

$$\frac{(36{,}256+P)\cdot10^4}{773{,}9} = 1600 \Rightarrow P = 87{,}57\ KN$$

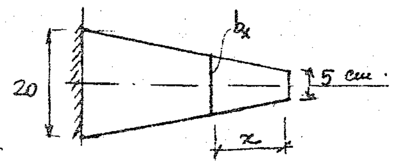
2)

$$W_z(x) = \frac{I_{zx}}{11} = \frac{1}{11}\left[2\left(\frac{b_x\cdot2^3}{12}+2b_x\cdot10^2\right)+\frac{1\cdot18^3}{12}\right] = 36{,}485\,b_x + 44{,}182$$

$$M_x = M_0 + Px = 36{,}256 + 87{,}57\,x \quad [KNm]$$

$$\sigma_{max}^{3-3} = \frac{(36{,}256+87{,}57x)\cdot10^4}{36{,}485\,b_x + 44{,}182} = 1600$$

$\boxed{b_x = 15x+5}$ cm



pt. $x = 0 \Rightarrow b = 5$ cm

$x = 1m \Rightarrow b = 20$ cm

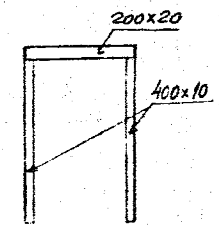
Deci b_x variază liniar în raport cu x.

17. Se dă o bară cu secțiunea din figură și se cere:

1) - să se determine momentul de torsiune liberă capabil al secțiunii știind că $\tau_a = 1000\ daN/cm^2$;

2) - să se determine rotirea relativă a celor două capete ale barei, știind că lungimea ei este $\ell = 4\,m$ $\left(G = \frac{E}{2{,}6}\right)$;

3) - să se determine poziția centrului de lunecare a secțiunii date.



1) - Secțiunea este compusă din dreptunghiuri subțiri $\left(\frac{h}{b}>10\right)$

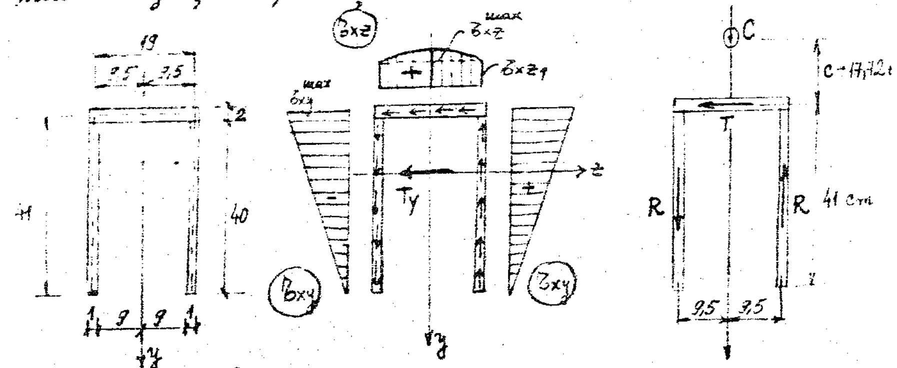
$$I_t = \frac{1}{3}\sum_i(h_i b_i^3) = \frac{1}{3}(2\cdot40+20\cdot2^3) = 80\ cm^4$$

$$W_t = \frac{I_t}{b_{max}} = \frac{80}{2} = 40\ cm^3$$

$$M_{t\,cap} = W_t\cdot\tau_a = 40000\ daNcm$$

2) $$\varphi = \frac{M_t\cdot\ell}{G I_t} = \frac{40000\cdot400}{0{,}81\cdot10^6\cdot80} = 0{,}2469\ rad$$

3) Centrul de lunecare al secțiunii se află pe axa de simetrie. Din acțiunea unei forțe tăietoare T_y, se trasează fluxul tensiunilor tangențiale pe secțiune.



$$I_y = 2\left(\frac{40}{12}+40\cdot9{,}5^2\right)+\frac{2\cdot20^3}{12} = 8560\ cm^4$$

$$\tau_{xy}^{max} = \frac{T_y\cdot S_y}{t\cdot I_y} = \frac{T_y\cdot(41\cdot9{,}5)}{1\cdot8560} = 0{,}0455023\,T_y\ daN/cm^2$$

$$\tau_{xz_1} = \frac{T_y\cdot S_y}{b\,I_y} = \frac{T_y\cdot(41\cdot9{,}5)}{2\cdot8560} = 0{,}0227512\,T_y$$

$$\tau_{xz}^{max} = \frac{T_y\left(41\cdot9{,}5+2\cdot\frac{9{,}5^2}{2}\right)}{2\cdot8560} = 0{,}0280228\,T_y$$

Se calculează rezultanta eforturilor τ_{xy} și τ_{xz}.

$$R_{\tau xz} = \left[0{,}0227512\cdot19+\frac{2}{3}\cdot19\cdot(0{,}0280228-0{,}0227512)\right]\cdot2\cdot T_y = 0{,}9981\,T_y \approx T_y$$

$$R_{\tau xy} = \frac{1}{2}\,41\cdot0{,}0455023\cdot1\cdot T_y = 0{,}932797\,T_y = R$$

Se pune condiția: $\Sigma M_o = 0 \Rightarrow T_y c - R\cdot19 = 0 \Rightarrow \boxed{c = 17{,}72\ cm}$

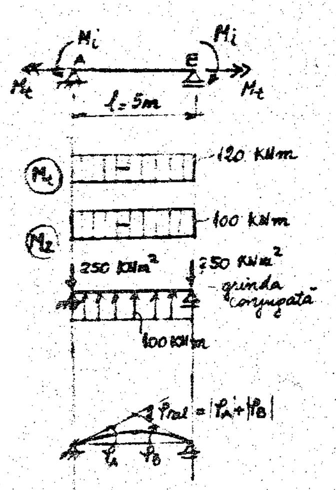
18. Se dă grinda AB din figură și se cere:

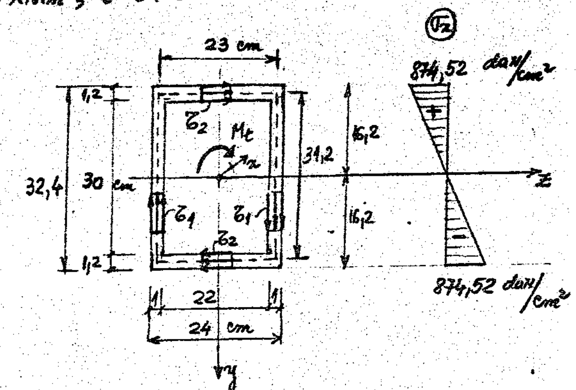
1) - să se determine și să se deseneze diagramele σ și τ într-o secțiune curentă a grinzii;

2) - să se determine rotirile relative ale secțiunii B față de secțiunea A;

3) - presupunând că pe fața superioară a grinzii se desenează un pătrat cu latura "a" înainte de încărcare, se întreabă: ce orientare trebuie să aibă pătratul în raport cu axa grinzii astfel încât după încărcare acesta să se transforme într-un dreptunghi, calculând și lungimile laturilor.

$M_i = 100\ KNm$, $M_t = 120\ KNm$, $l = 5\ m$





1) $I_z = \frac{24\cdot 32{,}4^3}{12} - \frac{22\cdot 30^3}{12} = 18524{,}4\ cm^4$

$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y_{max} = \frac{100\cdot 10^4}{18524{,}4}\cdot 16{,}2 = 874{,}52\ daN/cm^2$

$I_t^* = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{s}{t}} = \frac{4(23\cdot 31{,}2)^2}{2\left(\frac{31{,}2}{1} + \frac{23}{1{,}2}\right)} = 20448\ cm^4$

$\tau_1 = \frac{M_t}{2\Omega t_1} = \frac{120\cdot 10^4}{2\cdot 23\cdot 31{,}2\cdot 1} = 836{,}12\ daN/cm^2$

$\tau_2 = \frac{M_t}{2\Omega t_2} = \frac{120\cdot 10^4}{2\cdot 23\cdot 31{,}2\cdot 1{,}2} = 696{,}767\ daN/cm^2$

2) - Din încovoiere rotirea relativă între A și B este $\varphi_{AB} = |\varphi_A| + |\varphi_B|$

$|\varphi_A| = |\varphi_B| = \frac{T_{zA}}{EI_z} = \frac{250\cdot 10^6}{2{,}1\cdot 10^6\cdot 18524{,}4} = 0{,}00642\ rad$

$\varphi_{rel\,AB} = 2\cdot 0{,}00642 = 0{,}01284\ rad.$

- Din răsucire rotirea relativă între A și B este: $\varphi_{AB} = \frac{M_t\cdot l}{GI_t^*}$

$\varphi_{AB} = \frac{120\cdot 10^4\cdot 500}{0{,}81\cdot 10^6\cdot 20448} = 0{,}0362\ rad.$

3) - Pentru ca pătratul desenat pe fața superioară a grinzii să se transforme în dreptunghi după încărcarea grinzii, trebuie ca pe fețele pătratului să nu acționeze eforturi unitare tangențiale (care ar produce modificarea unghiurilor de 90°). Pot acționa însă eforturi unitare normale (σ) care nu modifică unghiurile. Această stare de tensiune ($\sigma \neq 0$, $\tau = 0$) se întâlnește pe planele principale de tensiune. Rezultă că laturile pătratului trebuie să fie paralele cu direcțiile principale de tensiune.

Starea de tensiune pe fața superioară a grinzii este:

$$\begin{cases} \sigma_x = 874{,}52\ daN/cm^2 \\ \tau = -696{,}767\ daN/cm^2 \end{cases}$$

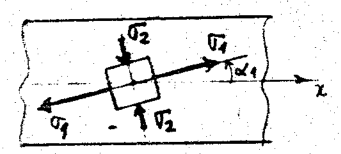
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} = \frac{874{,}52}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{874{,}52 + 4\cdot 696{,}767^2} =$$

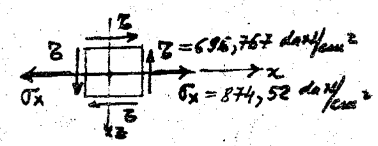
$$= 437{,}26 \pm 822{,}605$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1259{,}866\ daN/cm^2 \\ \sigma_2 = -385{,}346\ daN/cm^2 \end{cases}$$

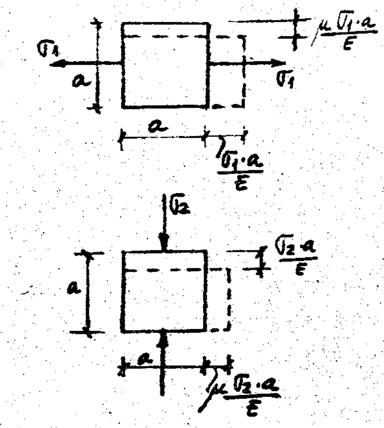
$$tg\,2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x} = \frac{-2\cdot 696{,}767}{874{,}52} = -1{,}5934 \Rightarrow 2\alpha = -57{,}88^\circ$$

$$\begin{cases} \alpha = -28{,}94^\circ = \alpha_1 \\ \alpha + 90 = 61{,}06^\circ = \alpha_2 \end{cases} \qquad \left(\frac{tg\,\alpha_1}{\tau} > 0\right)$$





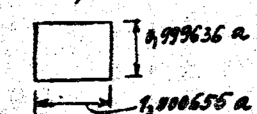
Pentru a calcula lungimile laturilor dreptunghiului se încarcă pe rând pătratul cu σ_1 și σ_2.



Din acțiunea lui σ_1 latura paralelă cu σ_1 se lungește cu $\Delta a = \varepsilon a = \frac{\sigma_1 a}{E}$, iar latura perpendiculară pe σ_1 se scurtează cu $\Delta a_1 = \mu \Delta a = \mu\frac{\sigma_1 a}{E}$

Din acțiunea lui σ_2 latura paralelă cu σ_2 se scurtează cu $\Delta a_1' = \frac{\sigma_2\cdot a}{E}$, iar latura perpendiculară pe σ_2 se lungește cu $\Delta a = \mu\frac{\sigma_2\cdot a}{E}$

Deci lungimile laturilor dreptunghiului vor fi:



$a + \frac{\sigma_1 a}{E} + \mu\frac{\sigma_2\cdot a}{E} = a\left(1 + \frac{1259{,}866 + 0{,}3\cdot 385{,}346}{2{,}1\cdot 10^6}\right) = 1{,}000655\ a$

$a - \mu\frac{\sigma_1 a}{E} - \frac{\sigma_2 a}{E} = a\left(1 - \frac{0{,}3\cdot 1259{,}866 + 385{,}346}{2{,}1\cdot 10^6}\right) = 0{,}999636\ a$

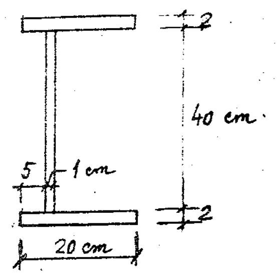
19. Pentru secțiunea din figură se cere:

1) - determinarea momentului de torsiune capabil, cunoscând $\tau_a = 150\ daN/cm^2$ și $\theta_a = \frac{1}{3}\ ^\circ/m$; $G = 8{,}1\cdot10^5\ daN/cm^2$;

2) - trasarea diagramelor tensiunilor tangențiale τ;

3) - cît din momentul de torsiune preia inima?

4) - poziția centrului de încovoiere-torsiune.



Rezolvare:

1) $\tau = \frac{M_t}{W_t} \le \tau_a$

$M_{tcap} = W_t\cdot\tau_a = 60\cdot150 = 9000\ daNcm$

$\theta = \frac{M_t}{G I_t} \le \theta_a$

$\theta_a = \frac{1}{3}\ ^\circ/m = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{100} = 5{,}81\cdot10^{-5}\ rad/cm$

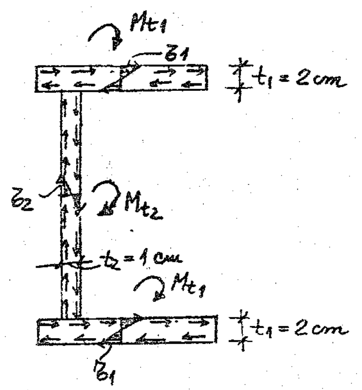
$I_t = \frac{1}{3}(2\cdot20\cdot2^3+40) = 120\ cm^4$

$W_t = \frac{I_t}{b_{max}} = \frac{120}{2} = 60\ cm^3$

$M_{tcap} = \theta G I_t = 5{,}81\cdot10^{-5}\cdot8{,}1\cdot10^5\cdot120 = 5647{,}32\ daNcm$

$M_{tcap} = \min[M_{tcap}^{CR}; M_{tcap}^{CD}] = 5647{,}32\ daNcm$

2)



$\tau_1 = \frac{M_t}{I_t} t_1 = \frac{5647{,}32}{120}\cdot2 = 94{,}122\ daN/cm^2$

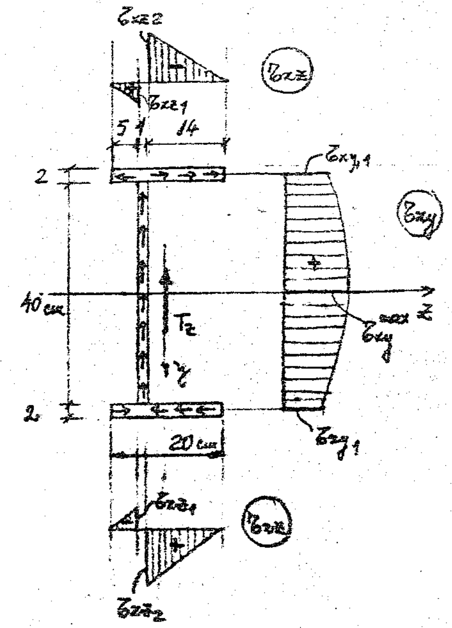
$\tau_2 = \frac{M_t}{I_t} t_2 = \frac{5647{,}32}{120}\cdot1 = 47{,}061\ daN/cm^2$

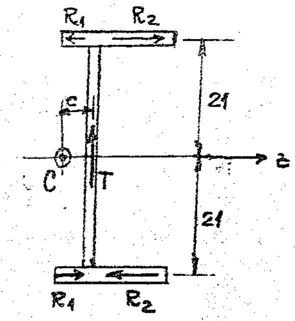
3) Momentul de inerție la torsiune al inimii este:

$I_{t_2} = \frac{1}{3}(40\cdot1^3) = \frac{40}{3}\ cm^4$

$M_{t_2} = \frac{M_t}{I_t}\cdot I_{t_2} = \frac{5647{,}32}{120}\cdot\frac{40}{3} = 627{,}48\ daNcm$

$\boxed{M_{t_2} = 627{,}48\ daNcm}$ → este momentul de torsiune preluat de inimă.





Pentru calculul centrului de încovoiere-torsiune se trasează mai întîi fluxul tensiunilor tangențiale pe secțiune, din acțiunea unei forțe tăietoare T_z. Centrul de încovoiere-torsiune se află pe axa de simetrie a secțiunii.

Se înlocuiesc eforturile unitare distribuite cu rezultantele lor și se pune condiția ca momentul de răsucire al acestor rezultante față de centrul de încovoiere-torsiune să fie nul, determinîndu-se poziția centrului de încovoiere-torsiune.

$I_z = 2\left(\frac{20\cdot2^3}{12} + 20\cdot2\cdot21^2\right) + \frac{40^3}{12} = 40640\ cm^4$

$\tau_{zx_1} = \frac{T_z\cdot(5\cdot2\cdot21)}{2\cdot I_z} = \frac{105\ T_z}{40640} =$

$\tau_{zx_2} = \frac{T_z(14\cdot2\cdot21)}{2\cdot I_z} = \frac{294\ T_z}{40640}$

$R_1 = \frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{105\ T_z}{40640}\cdot2 = \frac{525\ T_z}{40640}$

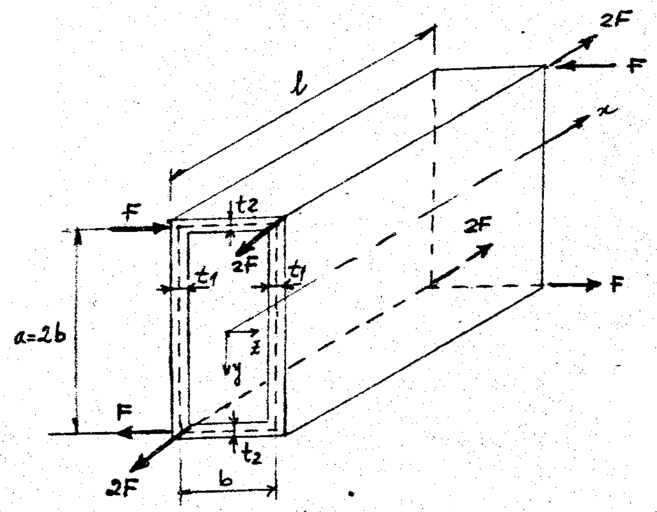
$R_2 = \frac{1}{2}\cdot14\cdot\frac{294\ T_z}{40640}\cdot2 = \frac{4116\ T_z}{40640}$

Diagrama τ_{zy} are suprafața egală cu valoarea forței tăietoare.

$\Sigma M_c = 0 \quad \frac{4116\ T_z}{40640}\cdot42 - \frac{525\ T_z\cdot42}{40640} - T\cdot c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 3{,}71\ cm}$

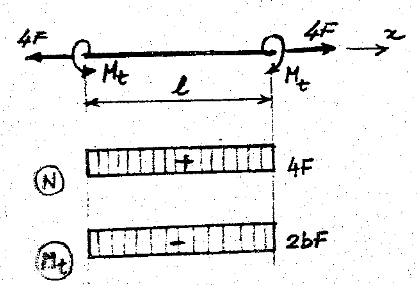
20. Se dă bara tubulară cu secțiunea din figură (în care cotele sînt date pe linia mediană a grosimilor) și se cere:

1) - diagramele σ și τ într-o secțiune curentă pe conturul liniei mediane
2) - tensiunile și direcțiile principale pe fețele laterale $\{\sigma_{1,2}, \alpha_{1,2}\}$;
3) - deplasările și rotirile relative între secțiunile de la extremități.



$t_1 = 1{,}5t$; $t_2 = t$

Rezolvare:



1) Tubul este supus la întindere și răsucire

$$\begin{cases} N = +4F \\ M_t = 2bF \end{cases}$$

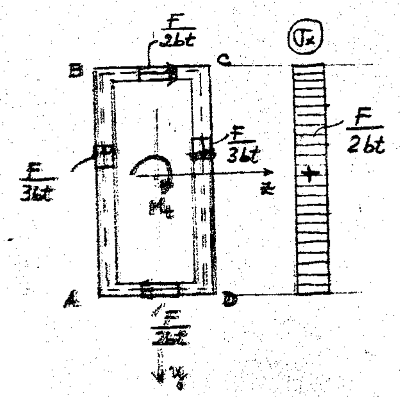
$$A = (b+1{,}5t)(2b+t) - (b-1{,}5t)(2b-t) = 8bt$$

$$\Omega = 2b \cdot b = 2b^2$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{4F}{8bt} = \frac{F}{2bt}$$

$$\tau_1 = \frac{M_t}{2\Omega t_1} = \frac{2bF}{2\cdot 2b^2 \cdot 1{,}5t} = \frac{F}{3bt}$$

$$\tau_2 = \frac{M_t}{2\Omega t_2} = \frac{2bF}{2\cdot 2b^2 \cdot t} = \frac{F}{2bt}$$



2) Fața A-B:

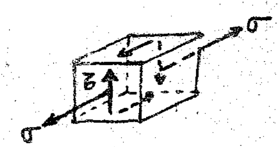
$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{F}{2bt} \\ \tau_{xy} = \dfrac{F}{3bt} \end{cases}$$

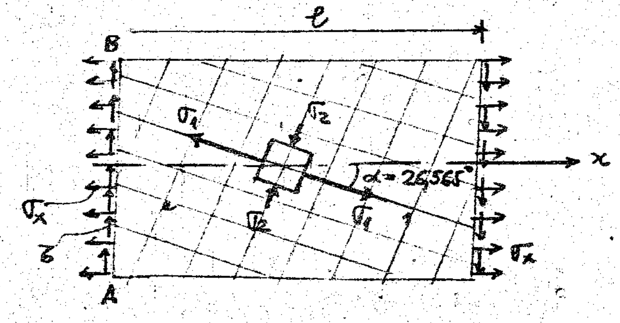
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} = \frac{F}{4bt} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F^2}{4b^2t^2} + 4\frac{F^2}{9b^2t^2}} = \frac{F}{4bt} \pm \frac{5F}{12bt}$$

$$\sigma_1 = \frac{2}{3}\frac{F}{bt} \quad ; \quad \sigma_2 = -\frac{1}{6}\frac{F}{bt}$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{2\frac{F}{3bt}}{\frac{F}{2bt}} = \frac{4}{3} \rightarrow 2\alpha = 53{,}13^\circ \quad \alpha = 26{,}565^\circ = \alpha_1 \qquad \left(\frac{tg\,\alpha_1}{\tau} > 0\right)$$

$$\alpha + 90 = 116{,}565^\circ = \alpha_2$$





Fața BC

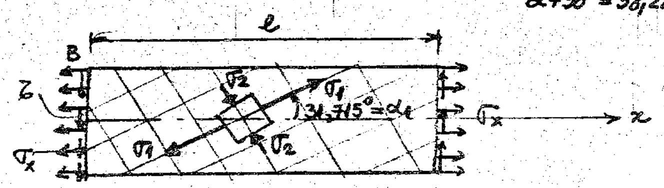
$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{F}{2bt} \\ \tau_{xz} = -\dfrac{F}{2bt} \end{cases}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} = \frac{F}{4bt} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F^2}{4b^2t^2} + 4\cdot\frac{F^2}{4b^2t^2}} = \frac{F}{4bt}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$$

$$\sigma_1 = 0{,}809\frac{F}{bt} \quad ; \quad \sigma_2 = -0{,}309\frac{F}{bt}$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma} = -2 \Longrightarrow 2\alpha = -63{,}43^\circ \quad \alpha = -31{,}715^\circ = \alpha_1$$

$$\alpha + 90 = 58{,}285^\circ = \alpha_2$$



3) Deplasarea relativă între extremitățile tubului este:

$$\Delta l = \frac{N\cdot l}{EA} = \frac{4Fl}{E\cdot 8bt} \quad [cm]$$

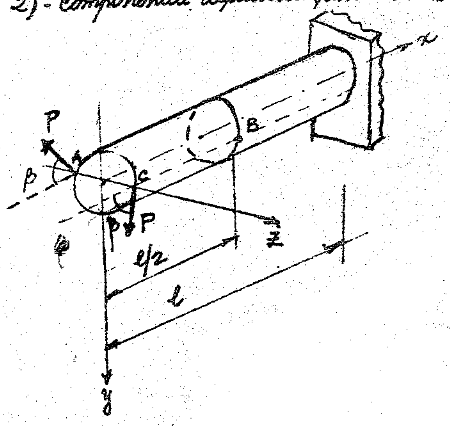
Rotirea relativă între extremitățile tubului: $\left(I_t^* = \frac{4\Omega^2}{\oint\frac{s}{t}} = \frac{4\cdot 4b^4}{2\left(\frac{b}{t} + \frac{2b}{1{,}5t}\right)} = \frac{24b^3t}{7}\right)$

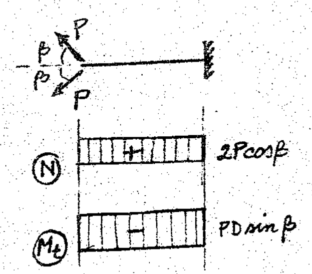
$$\varphi = \frac{M_t\cdot l}{GI_t^*} = \frac{2bF\cdot l\cdot 7}{G\cdot 24b^3t} = \frac{7Fl}{12Gb^2t} \quad [rad]$$

21. Pentru bara circulară de diametru D, solicitată de forțele P situate în planul vertical și înclinate cu β față de axa Ox se cere:

1) - traiectoriile tensiunilor principale într-un punct de pe suprafața laterală;

2) - componentele deplasării punctului B din secțiunea $x = \frac{l}{2}$ de la capătul barei.





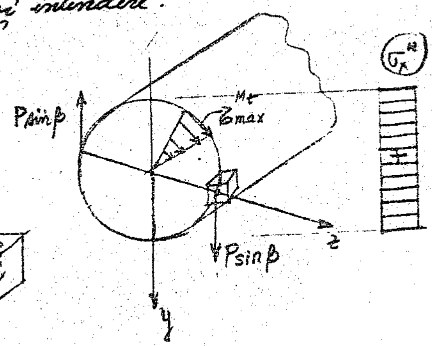
$tg\beta = 0,5$;

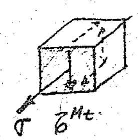
Rezolvare

Bara este solicitată la torsiune și întindere:

$$\begin{cases} N = 2P\cos\beta \\ M_t = P\cdot D\sin\beta \end{cases} \qquad A = \frac{\pi D^2}{4} \qquad W_p = \frac{\pi D^3}{16}$$

$$\begin{cases} \sigma_x^N = \dfrac{N}{A} = \dfrac{8P\cos\beta}{\pi D^2} \\ \tau = \dfrac{M_t}{W_p} = \dfrac{16P\sin\beta}{\pi D^2} \end{cases}$$





Se calculează traiectoriile tensiunilor principale în punctul C de pe suprafața laterală a barei.

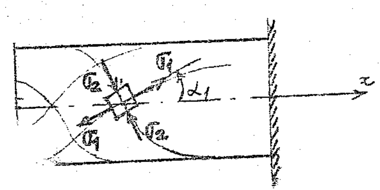
$$C \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{8P\cos\beta}{\pi D^2} \\ \tau = -\dfrac{16P\sin\beta}{\pi D^2} \end{cases}$$

$$tg2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x} = -\frac{\frac{32P\sin\beta}{\pi D^2}}{\frac{8P\cos\beta}{\pi D^2}} = -4\,tg\beta = -4\cdot 0,5 = -2$$

$2\alpha = -63,4°$;

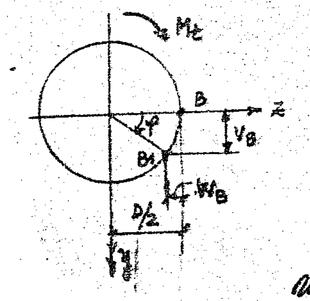
$\alpha = -31,7° = \alpha_1 \qquad \left(\frac{tg\alpha_1}{\tau} > 0\right)$

$\alpha + 90 = 58,3° = \alpha_2$



2) Punctul B se deplasează datorită acțiunii forței axiale și a momentului de torsiune în secțiune.

$$u_B = \frac{N\cdot\frac{l}{2}}{E\cdot A} = \frac{2P\cos\beta\cdot\frac{l}{2}}{E\cdot\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4Pl\cos\beta}{E\pi D^2}.$$



$$\varphi = \theta\cdot\frac{l}{2} = \frac{M_t\cdot\frac{l}{2}}{GI_p} = \frac{PD\sin\beta\cdot\frac{l}{2}}{G\cdot\frac{\pi D^4}{32}} = \frac{16Pl\sin\beta}{G\pi D^3}$$

$$v_B = \frac{D}{2}\sin\varphi \approx \frac{D}{2}\varphi = \frac{8Pl\sin\beta}{G\pi D^2}$$

$$w_B = \frac{D}{2} - \frac{D}{2}\cos\varphi = \frac{D}{2}(1-\cos\varphi)$$

Unghiul "φ" fiind foarte mic se poate considera că: $\sin\varphi \approx \varphi$

$(1-\cos\varphi)$ este o valoare foarte mică în raport cu unitatea, astfel încât $w_B \approx 0$.

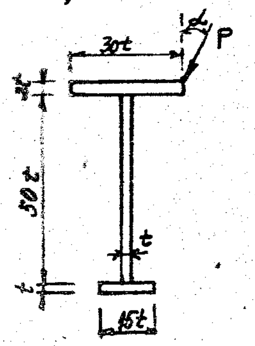
22. Pentru grinda consolă din figură acționată de forța concentrată P în planul transversal al capătului liber și înclinată cu unghiul α față de planul inimii. Se cere:

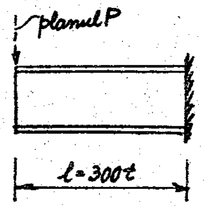
1) Valoarea unghiului α pentru ca grinda să nu fie solicitată la torsiune;

2) Rotirea secțiunii transversale a capătului liber din acțiunea componentei orizontale a forței P a cărei direcție a fost stabilită la 1).

3) Care este momentul de torsiune liberă pe care-l poate suporta bara liberă de lungime $l = 3m$ astfel încât să fie respectată condiția $\tau_{max} = 800$ daN/cm², $\theta_a = 1°/m$

4) Care este procentual momentul de torsiune preluat de talpa superioară în raport cu momentul de torsiune al secțiunii întregi.



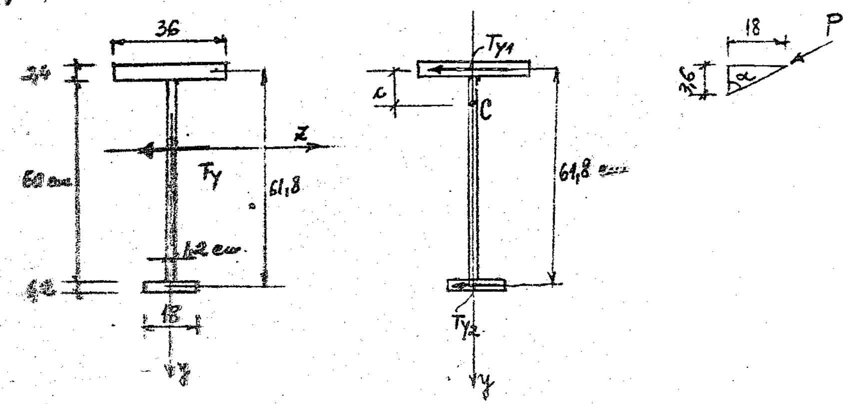


$t = 1,2$ cm

$P = 2400$ daN

Rezolvare:

1) Pentru ca grinda să fie solicitată numai la încovoiere ~~trebuie ca~~ forța P să treacă prin centrul de încovoiere-torsiune.



Centrele de greutate ale celor trei platbande și centrul de greutate al întregii secțiuni aflându-se pe aceeași verticală se pune condiția:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \frac{M_{y1}}{EI_{y1}} = \frac{M_{y2}}{EI_{y2}} = \frac{M_y}{EI_y} \Rightarrow \frac{T_{y1}}{EI_{y1}} = \frac{T_{y2}}{EI_{y2}} = \frac{T_y}{EI_y}$$

$T_{y1} = T_y \cdot \frac{I_{y1}}{I_y}$; $T_{y2} = T_y \cdot \frac{I_{y2}}{I_y}$ → sînt forțele tăietoare preluate de fiecare talpă în parte.

Pentru determinarea centrului de încovoiere-torsiune se pune condiția ca momentul de torsiune în raport cu C să fie nul.

$$M_C = 0 \qquad T_{y1}\cdot c - T_{y2}(61,8 - c) = 0$$

$$(T_{y1} + T_{y2})\, c - T_{y2}\cdot 61,8 = 0$$

$$c = \frac{T_{y2}}{T_y} 61,8 = \frac{I_{y2}}{I_y} 61,8 = \frac{583,2 \cdot 61,8}{9923} = 3,6 \text{ cm}$$

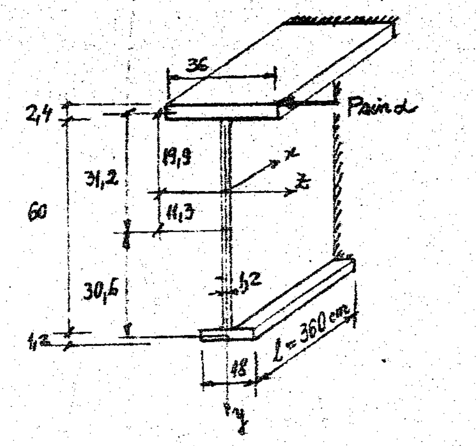
$$I_{y2} = \frac{1,2\cdot 18^3}{12} = 583,2 \text{ cm}^4$$

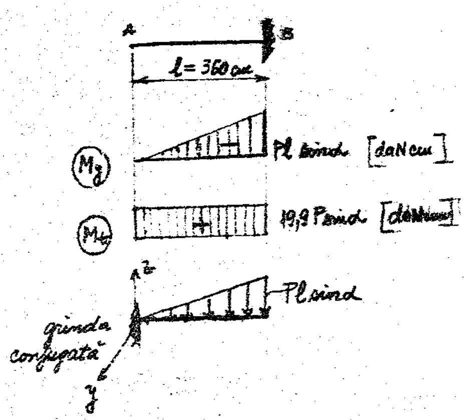
$$I_y = \frac{1,2\cdot 18^3}{12} + \frac{60\cdot 1,2^3}{12} + \frac{2,4\cdot 36^3}{12} = 9923 \text{ cm}^4$$

Unghiul forței P cu axa Oy este:

$$tg\,\alpha = \frac{18}{3,6} = 5 \Rightarrow \alpha = 78,69°$$

2)





Din acțiunea componentei orizontale a forței P, grinda este solicitată la încovoiere și răsucire.

Rotirea secțiunii capătului liber din M_y.

$$\varphi_A = -\frac{T_f}{EI_y} = -\frac{1}{EI_y}\left(\frac{1}{2}Pl^2 \sin\alpha\right) = -\frac{1}{2,1\cdot 10^6 \cdot 9923}\cdot \frac{1}{2}\, 2400 \cdot 360^2 \cdot \sin 78,69° =$$

$$= -7,31\cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Rotirea secțiunii capătului liber din M_t.

$$\varphi_{AB} = \frac{M_t \cdot l}{GI_t} = \frac{19,9\cdot 2400\cdot \sin 78,69° \cdot 360}{8,1\cdot 10^5 \cdot 210,8} = 9,87\cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

$$I_t = \frac{1}{3}\left(36\cdot 2,4^3 + 60\cdot 1,2^3 + 18\cdot 1,2^3\right) = 210,8 \text{ cm}^4$$

3) $M_t = W_t \cdot \tau_a = \frac{I_t}{b_{max}} \cdot \tau_a = \frac{210{,}8}{2{,}4} 800 = 70266{,}66$ daNcm

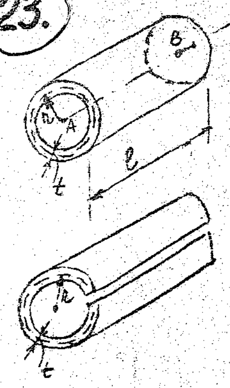
$M_t = G I_t \theta_a = 8{,}1 \cdot 10^5 \cdot 210{,}8 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{100} = 29786{,}04$ daNcm

$M_{t\,cap} = 29786{,}04$ daNcm

4) $M_t^{talpă\ sup} = \frac{M_t}{I_t} I_t^{talpă\ sup} = \frac{29786{,}04}{210{,}8} \left(\frac{1}{3} 2{,}4^3 \cdot 36\right) = 4120{,}3$ daNcm.

$\frac{M_t^{t\,sup}}{M_t} \cdot 100 = \frac{4120{,}3}{29786{,}04} = 13{,}83\%$

23.



1) Să se determine $M_{t\,cap}$ și φ_{AB} corespunzător pentru o țeavă circulară cilindrică de rază medie r și grosimea peretelui t $(t \ll r)$ supusă la torsiune;

2) Să se determine $M_{t\,cap}$ și φ_{AB} corespunzător pentru aceeași țeavă care însă este tăiată de-a lungul unei generatoare.

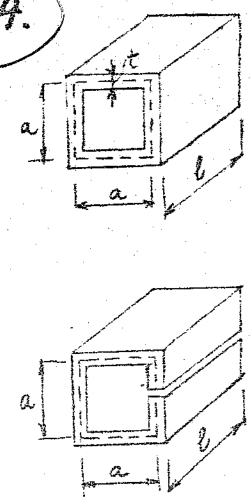
3) Să se discute rapoartele $\frac{M_{cap}^{(2)}}{M_{cap}^{(1)}}$; $\frac{\varphi_{AB}^{(2)}}{\varphi_{AB}^{(1)}}$

1) $\begin{cases} M_t = 2\Omega t \cdot \tau_a = 2(\pi r^2) t \cdot \tau_a \\ \varphi = \frac{M_t \cdot l}{G I_t^*} = \frac{2\pi r^2 t \tau_a \cdot l}{G \cdot \frac{4(\pi r^2)^2 t}{2\pi r}} = \frac{\tau_a \cdot l}{G r} \end{cases}$

2) $\begin{cases} M_t = W_t \cdot \tau_a = \frac{1}{3} 2\pi r \cdot t^2 \tau_a = \frac{2}{3}\pi r t^2 \tau_a \\ \varphi = \frac{M_t \cdot l}{G I_t} = \frac{\frac{2}{3}\pi r t^2 \tau_a}{G \frac{1}{3} 2\pi r \cdot t^3} = \frac{\tau_a \cdot l}{G t} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{M_t^{(2)}}{M_t^{(1)}} = \frac{\frac{2}{3}\pi r t^2 \tau_a}{2\pi r^2 t \tau_a} = \frac{t}{3r} & t \ll r \Rightarrow M_t^{(2)} \ll M_{t1}^{(1)} \\ \frac{\varphi_{AB}^{(2)}}{\varphi_{AB}^{(1)}} = \frac{\frac{\tau l}{G t}}{\frac{\tau_a \cdot l}{G r}} = \frac{r}{t} & t \ll r \Rightarrow \varphi_{AB}^{(2)} \gg \varphi_{AB}^{(1)} \end{cases}$

24.



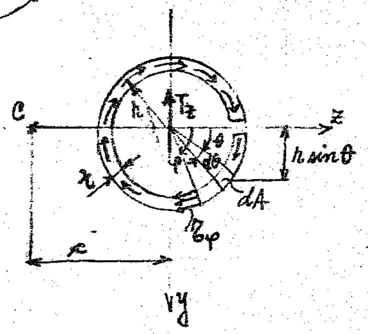
Să se determine pentru cele două tuburi momentele de torsiune capabile și rotirile totale. Să se discute rapoartele $\frac{M_t^{(2)}}{M_t^{(1)}}$; $\frac{\varphi^{(2)}}{\varphi^{(1)}}$. $(t \ll a)$

$\begin{cases} M_{t1} = 2\Omega t \tau_a = 2a^2 t \cdot \tau_a \\ \varphi_1 = \frac{M_t l}{G I_t^*} = \frac{2a^2 t \tau_a \cdot l \cdot 4a}{G \cdot 4a^4 t} = \frac{2\tau_a \cdot l}{G a} \end{cases}$

$\begin{cases} M_{t2} = W_t \cdot \tau_a = \frac{1}{3} 4a t^2 \cdot \tau_a = \frac{4}{3} a t^2 \tau_a \\ \varphi_2 = \frac{M_t \cdot l}{G I_t} = \frac{\frac{4}{3} a t^2 \tau_a \cdot l}{G \cdot \frac{4}{3} a t^3} = \frac{\tau_a \cdot l}{G t} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{M_{t2}}{M_{t1}} = \frac{\frac{4}{3} a t^2 \tau_a}{2a^2 t \cdot \tau_a} = \frac{2t}{3a} & t \ll a \Rightarrow M_{t2} \ll M_{t1} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{a}{2t} & \varphi_2 \gg \varphi_1 \end{cases}$

25. Să se determine centrul de încovoiere - torsiune pentru secțiunea din figură.



r = raza liniei mediane

$dA = t\,r\,d\theta$

$\tau_\varphi = \dfrac{T_z \cdot S_{z\varphi}}{t \cdot I_z}$ → tensiunea într-o secțiune curentă.

$$S_{z\varphi} = \int_0^\varphi dA \cdot r\sin\theta = \int_0^\varphi t r^2 \sin\theta\, d\theta = t r^2(-\cos\theta)\Big|_0^\varphi = t r^2(1-\cos\varphi)$$

$$I_z = \int_0^{2\pi} dA\,(r\sin\theta)^2 = \int_0^{2\pi} t r^3 \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{t r^3}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi t r^3$$

Forța elementară F are expresia.

$$dF = \tau_\varphi\, dA = \frac{T_z\cdot(1-\cos\varphi)}{\pi\cdot t\cdot r}\cdot t\cdot r\, d\varphi = \frac{T_z\,(1-\cos\varphi)}{\pi}\, d\varphi$$

$$\tau_\varphi = \frac{T_z\cdot t r^2(1-\cos\varphi)}{t\cdot \pi t r^3} = \frac{T_z\cdot(1-\cos\varphi)}{\pi t r}$$

Momentul de torsiune elementar este:

$$dM = dF\cdot r = \frac{T_z\cdot r\,(1-\cos\varphi)}{\pi}\, d\varphi$$

Poziția centrului de încovoiere - torsiune se obține din condiția ca momentul de răsucire în raport cu C să fie nul.

$M_C = 0 \qquad M_O - T\cdot c = 0$

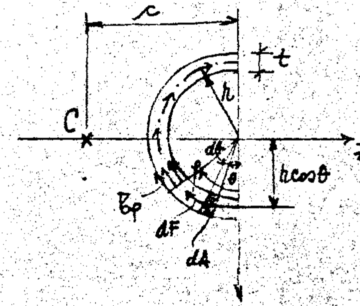
$$M_O = \int_0^{2\pi} dM = \int_0^{2\pi} \frac{T_z\cdot r\,(1-\cos\varphi)}{\pi}\, d\varphi = \frac{T_z r}{\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{T_z\cdot r}{\pi}\left[\varphi - \sin\varphi\right]\Big|_0^{2\pi} = 2T_z\cdot r$$

$M_C = 0 \qquad 2T_z\cdot r - T_z\cdot c = 0$

$$\boxed{c = 2r}$$

26. Să se determine centrul de încovoiere - torsiune pentru secțiunea din figură.



$dA = r\,t\,d\theta$

$$\tau_\varphi = \frac{T_z\cdot S_{z\varphi}}{t\cdot I_z}$$

$$S_{z\varphi} = \int_0^\varphi t r\, d\theta\cdot r\cos\theta = \int_0^\varphi t r^2\cos\theta\, d\theta = + t r^2 \sin\theta\Big|_0^\varphi = + t r^2 \sin\varphi$$

$$I_z = \int_0^\pi dA\cdot y^2 = \int_0^\pi t r\, d\theta\cdot(r\cos\theta)^2 = t r^3\int_0^\pi \cos^2\theta\, d\theta = t r^3\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{t r^3}{2}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{\pi t r^3}{2}$$

$$\tau_\varphi = \frac{T_z\cdot t r^2 \sin\varphi}{t\cdot\dfrac{\pi t r^3}{2}} = \frac{2T_z\cdot\sin\varphi}{\pi t r}$$

$$dM_O = \tau_\varphi\, dA\cdot r = \frac{2T_z\cdot\sin\varphi}{\pi t r}\cdot t r\, d\varphi\cdot r = \frac{2T_z\cdot r}{\pi}\sin\varphi\, d\varphi$$

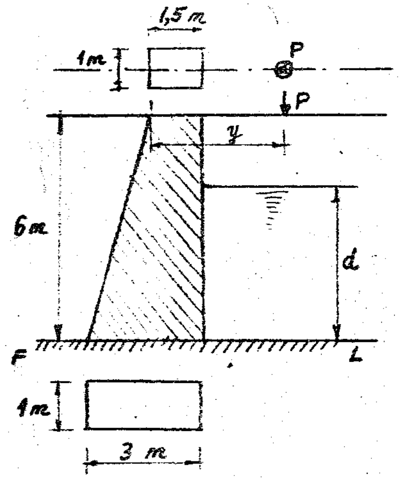
$$M_O = \int_0^\pi dM_O = \frac{2T_z r}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{2T_z\cdot r}{\pi}\cos\varphi\Big|_0^\pi = -\frac{2T_z r}{\pi}(-1-1) = \frac{4T_z\cdot r}{\pi}$$

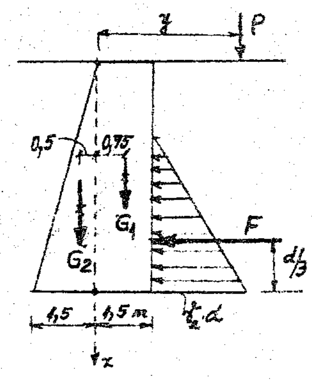
$$M_C = 0 \Rightarrow M_O - T_z\cdot c = 0$$

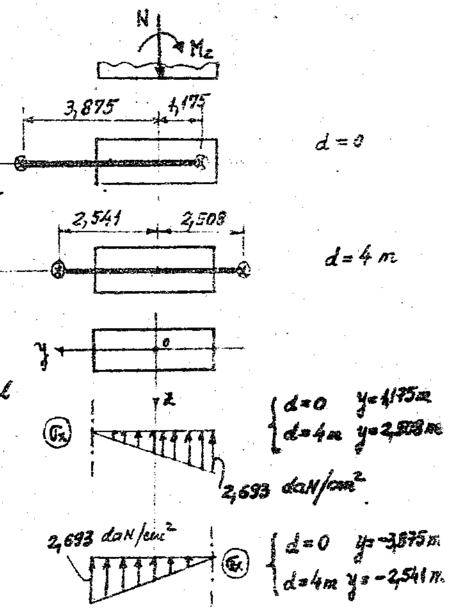
$$c = \frac{M_O}{T_z} = \frac{4r}{\pi}$$

27. Se dă barajul din beton deasupra căruia se află o grindă fără greutate în axul lui. Presupunînd că apa se poate ridica pînă la o înălțime $d = 4\,m$ ($d \in [0; 4m]$), se cere să se determine intervalul definit de variabila "y" pe care se poate deplasa forța $P = 8$ tf. astfel încît în secțiunea FL să nu apară întinderi. Se vor desena și diagramele σ în secțiunea FL în situațiile de poziții limită ale forței P.

($\gamma_{beton} = 2{,}4\ t/m^3$, $\gamma_{apă} = 1\ tf/m^3$)







<u>Rezolvare:</u>

$\gamma_b = 24\ KN/m^3$; $\gamma_a = 10\ KN/m^3$; $P = 80\ KN$

Se calculează greutatea barajului din beton și F = forța rezultantă a împingerii apei.

$$G_1 = 1{,}5 \times 1 \times 6 \times 24 = 216\ KN$$
$$G_2 = 0{,}5\, G_1 = 108\ KN$$
$$F = \frac{1}{2}\gamma_a \cdot d \cdot d \cdot 1 = 5d^2\ KN$$

Se calculează eforturile globale în centrul de greutate al secțiunii de la baza barajului.

$$\begin{cases} N = -(G_1 + G_2 + P) = -404\ [KN] \\ M_z = 216 \cdot 0{,}75 - 108 \cdot 0{,}5 - 5d^2 \cdot \frac{d}{3} + 80\,y = \end{cases}$$
$$= 108 - \frac{5}{3}d^3 + 80\,y \quad [KNm]$$

Solicitarea este încovoiere simplă cu forță axială. Pentru ca în secțiunea de la bază să nu apară întinderi, trebuie ca:

$$|e| = \left|\frac{M_z}{N}\right| \le \frac{h}{6} = \frac{3}{6} = 0{,}5\ m$$

$$-0{,}5 \le \frac{M_z}{N} \le 0{,}5$$

$$-0{,}5 \le \frac{108 - \frac{5}{3}d^3 + 80y}{-404} \le 0{,}5$$

$$\frac{108 - \frac{5}{3}d^3 + 80y}{-404} \le 0{,}5 \ \Big|\cdot(-404)$$
$$108 - \frac{5}{3}d^3 + 80y \ge -202$$
$$y \ge -3{,}875 + \frac{1}{48}d^3$$

Pentru:

$d = 0$ $\quad y \ge -3{,}875\ m$

$\quad y \in [0; -3{,}875]\ m$

$d = 4m$ $\quad y \ge -2{,}541\ m$

$\quad y \in [0; -2{,}541]\ m$

$$\frac{108 - \frac{5}{3}d^3 + 80y}{-404} \ge -0{,}5 \ \Big|\cdot(-404)$$
$$108 - \frac{5}{3}d^3 + 80y \le 202$$
$$y \le 1{,}175 + \frac{1}{48}d^3$$

Pentru:

$d = 0$ $\quad y \le 1{,}175\ m$

$\quad y \in [0; 1{,}175]\ m$

$d = 4m$ $\quad y \le 2{,}508\ m$

$\quad y \in [0; 2{,}508]\ m$

S-a considerat y pozitiv spre dreapta și negativ spre stînga, măsurat de la centrul de greutate al secțiunii de la bază.

Intervalele de pe axa y-y pe care se poate deplasa forța P, cînd $d = 0$ și $d = 4\,m$ sînt reprezentate în figură.

Se calc..ează valorile lui σ_{max} pentru situațiile de poziții ..imită ale forței P.

$$d = 0 \Rightarrow \begin{cases} M_z = 108 + 80\,y \quad KNm \\ N = -404\ KN \end{cases}$$

$y = 1{,}175\ m \Rightarrow M_z = 202\ KNm \qquad \sigma_{max} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{W_z}$

$$\sigma_{max} = -\frac{404 \cdot 10^2}{100 \cdot 300} - \frac{202 \cdot 10^4}{\frac{100 \cdot 300^2}{6}} = -2{,}693\ daN/cm^2$$

$e = \frac{M_z}{N} = -0{,}5\,m \Longrightarrow y_0 = +\frac{h}{2} = 1{,}5\,m$

(axa neutră este tangentă la contur pentru că forța excentrică echivalentă este pe conturul sîmburelui central)

$y = -3{,}875\ m \rightarrow M_z = -202\ KNm$

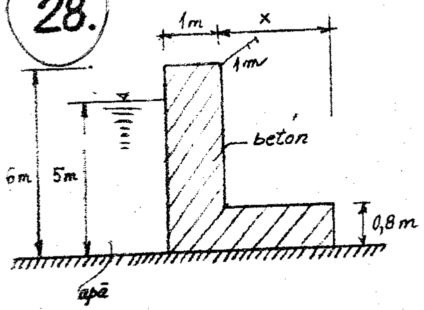
$\sigma_{max} = -2{,}693\ daN/cm^2$

$e = \frac{M_z}{N} = \frac{-202}{-404} = 0{,}5\ m \Longrightarrow y_0 = -\frac{h}{2} = -1{,}5\,m$

$$d = 4\,m \Rightarrow \begin{cases} M_z = 1{,}333 + 80\,y \quad KNm \\ N = -404\ KN. \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2{,}508\ m & M_z = 202\ KNm \\ y = -2{,}541\ m & M_z = -202\ KNm \end{cases}$$

Pentru $d = 4\,m$ se regăsesc cele două cazuri limită pentru $d = 0$.

28.

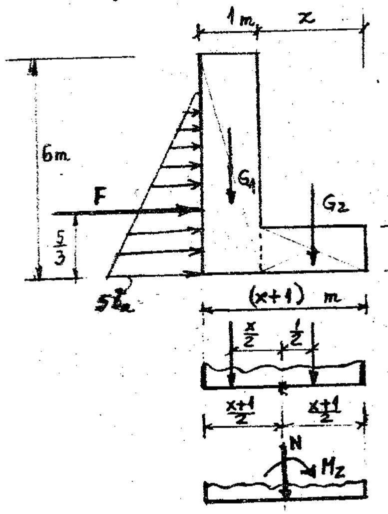


Se dă barajul din figură.

1) - Să se determine x astfel încît în secțiunea de la bază să nu apară întinderi. Să se calculeze σ_{max} în acest caz.

2) - Presupunînd că se admite un $\sigma'_{max} = 1,2\,\sigma_{max}$ să se arate pentru x determinat mai sus cît poate crește apa peste nivelul precedent și în acest caz să se arate care este zona activă a fundației.

($\gamma_{apă} = 10\ KN/m^3$, $\gamma_{beton} = 25\ KN/m^3$)



Rezolvare:

Se calculează greutatea barajului și F, rezultanta presiunii apei.

$G_1 = 1\cdot 6\cdot 1\cdot 25 = 150\ KN$

$G_2 = 0,8\cdot 1\cdot x\cdot 25 = 20x\ KN$

$F = \frac{10\cdot 5\cdot 5}{2} = 125\ KN$

Se calculează eforturile globale în centrul de greutate al secțiunii de la bază.

$$\begin{cases} N = -(G_1+G_2) = -(150+20x)\ [KN] \\ M_z = 125\cdot\frac{5}{3} + 20x\cdot\frac{1}{2} - 150\cdot\frac{x}{2} = 208,33 - 65x\ [KNm] \end{cases}$$

Solicitarea este încovoiere simplă cu forță axială. Pentru ca în secțiunea de la bază să nu apară întinderi trebuie ca:

$$|e| = \left|\frac{M_z}{N}\right| \le \frac{h}{6} = \frac{x+1}{6}\ m$$

Deci:

$$-\left(\frac{x+1}{6}\right) \le \frac{M_z}{N} \le \left(\frac{x+1}{6}\right)$$

$$\frac{M_z}{N} \ge -\left(\frac{x+1}{6}\right)$$

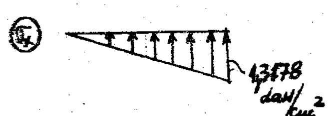
$$\frac{208,33-65x}{-(150+20x)} \le +\frac{(x+1)}{6} \rightarrow \text{rezultă rădăcini complexe}$$

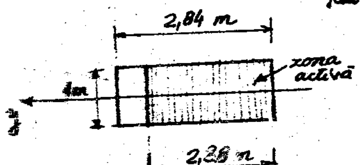
$$\frac{M_z}{N} \le \frac{x+1}{6}$$

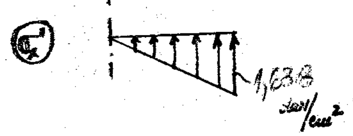
$$\frac{208,33-65x}{-(150+20x)} \ge -\left(\frac{x+1}{6}\right)$$

$$x^2 + 28x - 55 \le 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 \le 1,84\ m \\ x_2 \ge -29,84\ m. \end{cases}$$

"x" este o valoare pozitivă, deci soluția corectă este $x \le 1,84\ m$







$$\sigma_{max} = \frac{-(150+20\cdot 1,84)\cdot 10^2}{2,84\cdot 10^4} - \frac{(208,333-65\cdot 1,84)\cdot 10^4}{1,3442\cdot 10^6} = -1,3178\ daN/cm^2$$

$A = 1\cdot(x+1) = 2,84\ m^2$

$W_z = \frac{1(x+1)^2}{6} = 1,3442\ m^3$

Pentru că $e = \frac{M_z}{N} = \frac{2,84}{6} = 0,473\ m$ este limita sîmburelui central, axa neutră este tangentă la contur și ecuația axei neutre este:

$$y_0 = -\frac{h}{2} = -\frac{2,84}{2} = -1,42\ m.$$

2) Se presupune că tensiunea maximă este:

$$\sigma'_{max} = 1,2\,\sigma_{max} = 1,2\cdot(-1,3178) = -1,5814\ daN/cm^2$$

$$\begin{cases} N = -(150+20\cdot 1,84) = -186,8\ KN \\ M'_z = \frac{5}{3}h^3 - 65\cdot 1,84 = \left(\frac{5}{3}h^3 - 119,6\right)\ KNm \end{cases}$$

unde pentru F s-a folosit expresia: $F = \frac{\gamma_a h\cdot h}{2}\cdot 1 = \frac{\gamma_a h^2}{2} = \frac{10}{2}h^2 = 5h^2\ KN$

Se pune condiția: $|\sigma_{max}| = |\sigma'_{max}|$

$$\left|\frac{N}{A}\right| + \left|\frac{M_z}{W_z}\right| = 1,5814\ daN/cm^2$$

$$\frac{186,8}{2,84\cdot 10^4} + \frac{\left(\frac{5}{3}h^3 - 119,6\right)\cdot 10^4}{1,3442\cdot 10^6} = 1,5814$$

$$h = 5,268\ m$$

Deci apa se poate ridica deasupra nivelului inițial cu 0,268 m.

Pentru a calcula înălțimea zonei active se calculează excentricitatea forței echivalente din secțiune:

$$e = \frac{M_z}{N} = \frac{\frac{5}{3}\cdot 5,268^3 - 119,4}{-186,8} = -0,66\ m$$

$$|e| = 0,66\ m > \frac{h}{6} = \frac{2,84}{6} = 0,47\ m,$$

adică forța echivalentă nu are punctul de aplicație în interiorul sîmburelui central și axa neutră taie secțiunea. Pentru că materialul nu preia întinderi se calculează zona activă:

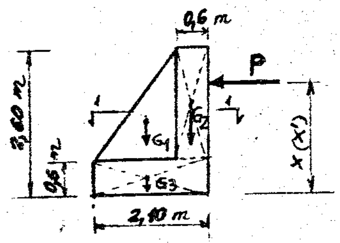
$$h_{z.a} = 3\left(\frac{h}{2} - |e|\right) = 3\left(\frac{2,84}{2} - 0,66\right) = 3\cdot 0,76 = 2,28\ m$$

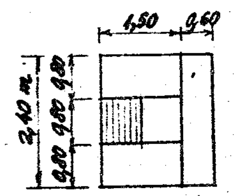
$$\sigma_{max\,z.a} = \frac{2N}{A_{z.a}} = -\frac{2\cdot 186,8\cdot 10^2}{100\cdot 228} = -1,638\ daN/cm^2$$

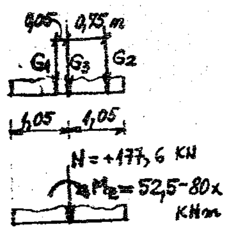
29. Se dă zidul de sprijin din beton armat care reazemă pe pământ ($\gamma_{beton} = 25\ KN/m^3$). Se cere:

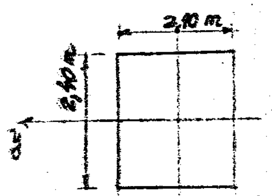
1) - până la ce înălțime poate fi aplicată forța $P = 80\ KN$ astfel încât pe toată suprafața de contact dintre fundație și teren să apară numai compresiune; care este valoarea lui σ_{max}?

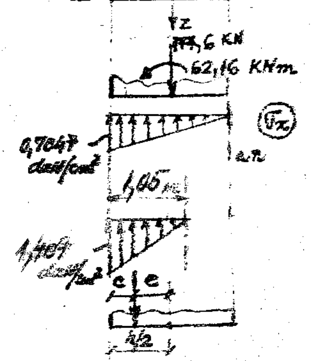
2) - până la ce înălțime x' poate fi aplicat forța $P = 80\ KN$ astfel încât $\sigma'_{max} = 1{,}5\,\sigma_{max}$, ținând seama că terenul de fundație nu preia întinderi; care este zona activă în acest caz.











Rezolvare:

Se calculează greutatea zidului:

$$G_1 = 25\cdot\frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot 2\cdot 0{,}8 = 30\ KN$$

$$G_2 = 25\cdot 2\cdot 0{,}6\cdot 2{,}4 = 72\ KN$$

$$G_3 = 25\cdot 2{,}1\cdot 0{,}6\cdot 2{,}4 = 75{,}6\ KN$$

Se reduc forțele în raport cu centrul de greutate al secțiunii de la bază.

$$\begin{cases} N = -(G_1 + G_2 + G_3) = -177{,}6\ KN \\ M_z = 72\cdot 0{,}75 - 30\cdot 0{,}05 - 80\cdot x = (52{,}5 - 80x)\ KNm \end{cases}$$

Solicitarea în secțiunea de la baza zidului de sprijin este încovoiere simplă cu forță axială. Pentru ca în această secțiune să nu apară întinderi, trebuie ca forța excentrică echivalentă să se afle în interiorul sâmburelui central, ale cărui limite pe axa Oy sînt $\pm\frac{h}{6} = \pm\frac{2{,}1}{6} = \pm 0{,}35\ m$.

Deci excentalcitatea forței echivalente va fi:

$$e = \left|\frac{M}{N}\right| \le \frac{h}{6} = 0{,}35\ m.$$

$$-0{,}35 \le \frac{M}{N} \le 0{,}35\ m$$

$$-0{,}35 \le \frac{52{,}5 - 80x}{-177{,}6} \le 0{,}35\ m$$

$$\frac{52{,}5 - 80x}{-177{,}6} \ge -0{,}35$$

$$52{,}5 - 80x \le 62{,}16$$

$x \ge -0{,}12\ m \rightarrow$ soluția nu este bună pentru că "x" trebuie să fie o valoare pozitivă.

$\frac{52{,}5 - 80x}{-177{,}6} \le 0{,}35$, rezultă x cu valoarea:

$$x \le 1{,}433\ m \Longrightarrow \begin{cases} N = -177{,}6\ KN \\ M_z = 52{,}5 - 80\cdot 1{,}433 = -62{,}16\ KNm \end{cases}$$

$$\sigma_{max} = -\frac{177{,}6\cdot 10^2}{240\times 210} - \frac{62{,}16\cdot 10^4}{\frac{240\cdot 210^2}{6}} = -0{,}7047\ daN/cm^2$$

unde: $A = 240\times 210\ cm^2$; $W_z = \frac{240\times 210^2}{6}\ cm^3$

Dacă $e = \frac{M_z}{N} = \frac{-62{,}16}{-177{,}6} = 0{,}35\ m$ (este limita sâmburelui central) axa neutră este tangentă la contur și $y_0 = -\frac{h}{2} = -\frac{2{,}1}{2} = -1{,}05\ m$

(sau $y_0 = -\frac{i_z^2}{e} = -\frac{I_z\cdot N}{A\cdot M_z} = -\frac{\frac{240\cdot 210^3}{12}(-177{,}6\cdot 10^2)}{240\cdot 210\,(-62{,}16\cdot 10^4)} = -105\ cm = -1{,}05\ m$)

2) Se consideră:

$$\sigma'_{max} = 1{,}5\,\sigma_{max} = 1{,}5\cdot 0{,}7047 = 1{,}057\ daN/cm^2$$

$$\sigma'_{max} = \left|\frac{N}{A}\right| + \left|\frac{M_z}{W_z}\right| = \frac{177{,}6\cdot 10^2}{240\times 210} + \frac{|52{,}5 - 80x'|\cdot 10^4}{\frac{240\cdot 210^2}{6}} = 1{,}057\ daN/cm^2$$

$$|52{,}5 - 80x'| = 124{,}362$$

$$52{,}5 - 80x' = \pm 124{,}362$$

$52{,}5 - 80x' = 124{,}362 \Longrightarrow x' = -0{,}898\ m$ soluție care nu poate fi acceptată pentru că x' este o valoare pozitivă.

$$52{,}5 - 80x' = -124{,}362 \Longrightarrow \boxed{x' = 2{,}21\ m}$$

Pentru această valoare a lui x' rezultă eforturile:

$$\begin{cases} N = -177{,}6\ KN \\ M_z = -124{,}362\ KNm \end{cases}$$

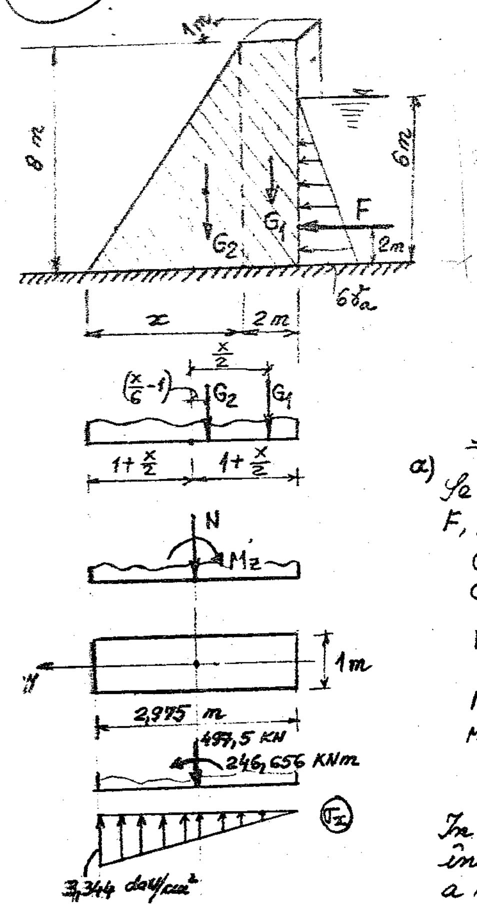
$$e = \frac{M_z}{N} = \frac{-124{,}362}{-177{,}6} = 0{,}7\ m > \frac{h}{6} = \frac{2{,}1}{6} = 0{,}3\ m$$

Pentru că $e > \frac{h}{6}$, axa neutră taie secțiunea și pentru că materialul nu preia întinderi, se lucrează cu zonă activă.

$$h_{za} = 3\left(\frac{h}{2} - |e|\right) = 3\left(\frac{2{,}1}{2} - 0{,}7\right) = 3\cdot 0{,}35 = 1{,}05\ m$$

$$\sigma_{max\,z.a} = \frac{2N}{A_{z.a}} = \frac{-2\cdot 177{,}6\cdot 10^2}{240\times 105} = -1{,}409\ daN/cm^2$$

30.



Pentru barajul din figură se cere

a) - să se determine "x" astfel încât în secțiunea BC să nu apară întinderi; diagrama σ_x în acest caz.

b) Dacă $\sigma'_{x\,max} = 1{,}3\,\sigma_{x\,max}$, la ce înălțime poate urca apa și diagrama σ_x în acest caz, știind că terenul nu preia întinderi.

$$\gamma_{beton} = 25\ KN/m^3$$
$$\gamma_{apă} = 10\ KN/m^3$$

Rezolvare:

a) Se calculează greutatea barajului și F, rezultanta presiunii apei.

$$G_1 = 2\cdot 8\cdot 1\cdot 25 = 400\ KN$$
$$G_2 = \frac{x\cdot 8}{2}\cdot 1\cdot 25 = 100x\ \ KN$$
$$F = \frac{6\cdot 10\cdot 6}{2}\cdot 1 = 180\ KN$$

$$N = -(G_1+G_2) = -(400+100x) = -100(4+x)\ \ KN$$
$$M_z = 400\cdot\frac{x}{2} + 100x\cdot\left(\frac{x}{6}-1\right) - 180\cdot 2 =$$
$$= 100\left(\frac{1}{6}x^2 + x - 3{,}6\right)\ KNm$$

In secțiunea de la bază solicitarea este încovoiere simplă cu forța axială și pentru a nu avea întinderi punctul de aplicație al forței echivalente excentrice trebuie să se găsească pe axa Oy în interiorul sîmburelui central

$$e = \left|\frac{M}{N}\right| \le \frac{h}{6} = \frac{x+2}{6}\ m$$

$$-\frac{x+2}{6} \le \frac{M}{N} \le \frac{x+2}{6}$$

$$-\left(\frac{x+2}{6}\right) \le \frac{\frac{1}{6}x^2+x-3{,}6}{-(4+x)} \le \frac{x+2}{6}$$

$$-\left(\frac{x+2}{6}\right) \le \frac{\frac{1}{6}x^2+x-3{,}6}{-(4+x)} \implies -21{,}6 \le 8$$

$$\frac{\frac{1}{6}x^2+x-3{,}6}{-(4+x)} \le \frac{x+2}{6}$$

$$\frac{1}{6}x^2+x-3{,}6 \ge -(4+x)\,\frac{x+2}{6}$$

$$2x^2+12x-13{,}6 \ge 0$$
$$x^2+6x-6{,}8 \ge 0$$

$$x_{1,2} = -3 \pm\sqrt{9+6{,}8} = \begin{cases} x_1 = -6{,}975\ m \rightarrow \text{nu este soluție a problemei pentru că "x" este o mărime pozitivă;} \\ x_2 = 0{,}975\ m \rightarrow \text{soluția problemei} \end{cases}$$

$$x = 0{,}975\ m \implies \begin{cases} N = -100(4+0{,}975) = -497{,}5\ KN \\ M_z = 100\left(\frac{1}{6}0{,}975^2+0{,}975-3{,}6\right) = -246{,}656\ KNm \end{cases}$$

$$|\sigma_{max}| = \left|\frac{N}{A}\right| + \left|\frac{M_z}{W_z}\right| = \frac{497{,}5\cdot 10^2}{297{,}5\cdot 100} + \frac{246{,}656\cdot 10^4}{147{,}51\cdot 10^4} = 3{,}344\ daN/cm^2$$

unde: $\begin{cases} A = 100\cdot 297{,}5 = 297{,}5\cdot 10^2\ cm^2 \\ W_z = \frac{100\cdot 297{,}5^2}{6} = 147{,}51\cdot 10^4\ cm^3 \end{cases}$

Excentricitatea forței echivalente din secțiune este:

$$e = \frac{M_z}{N} = \frac{-246{,}656}{-497{,}5} = 0{,}4958\ m$$

$$\frac{h}{6} = \frac{2{,}975}{6} = 0{,}4958\ m \rightarrow \text{limita sîmburelui central pe axa Oy.}$$

Pentru că $e = \frac{h}{6}$, forța echivalentă din secțiune acționează pe conturul sîmburelui central, axa neutră este tangentă la conturul secțiunii și are ecuația:

$$y_0 = -\frac{h}{2} = -\frac{2{,}975}{2} = -1{,}4875\ m$$

b) Se consideră că există:

$$\sigma'_{max} = 1{,}3\,\sigma_{max} = 1{,}3\cdot 3{,}344 = 4{,}3472\ daN/cm^2$$

Se notează cu "d" înălțimea pînă la care poate urca apa.

$$F = \frac{10\cdot d\cdot d}{2} = 5d^2\ KN$$

unde F = rezultanta presiunii exercitate de apă.

$$\begin{cases} N = -497{,}5\ KN \\ M_z = 97{,}5\cdot 0{,}8375 + 400\cdot 0{,}4875 - \frac{5}{3}d^3 = 113{,}3 - \frac{5}{3}d^3\ \ KNm \end{cases}$$

unde: $\begin{cases} G_1 = 400\ KN \\ G_2 = 100\cdot 0{,}975 = 97{,}5\ KN \end{cases}$

$$\sigma'_{max} = \left|\frac{N}{A}\right| + \left|\frac{M_z}{W_z}\right| = 4,3472 \ daN/cm^2$$

$$\frac{497,5 \cdot 10^2}{100 \cdot 297,5} + \frac{\left|113,3 - \frac{5}{3} d^3\right| \cdot 10^4}{\frac{100 \cdot 297,5^2}{6}} = 4,3472$$

$$\left|113,3 - \frac{5}{3} d^3\right| = 394,58$$

$$113,3 - \frac{5}{3} d^3 = \pm 394,58$$

$$113,3 - \frac{5}{3} d^3 = 394,58 \implies d < 0 \rightarrow \text{nu este soluţia problemei}$$

$$113,3 - \frac{5}{3} d^3 = -394,58 \implies \boxed{d = 6,729 \ m}$$

Pentru valoarea $d = 6,729$ m rezultă eforturile:

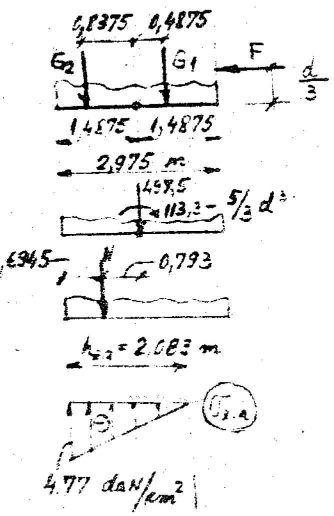
$$\begin{cases} N = -497,5 \ KN \\ M_z = -394,58 \ KNm \end{cases}$$

$$e = \frac{M_z}{N} = \frac{-394,58}{-497,5} = 0,793 \ m > \frac{h}{6} = 0,495 \ m \implies$$ axa neutră taie secţiunea

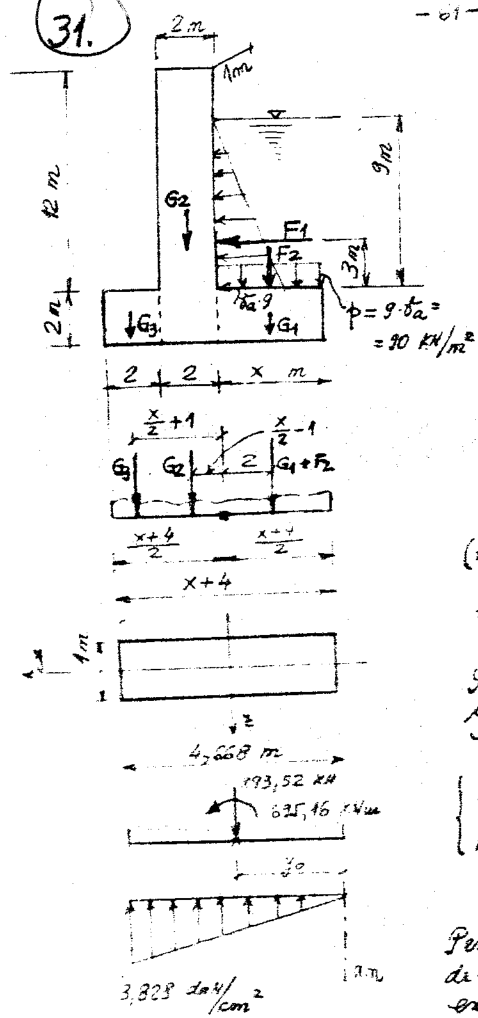
Se calculează înălţimea zonei active:

$$h_{za} = 3\left(\frac{h}{2} - |e|\right) = 3\left(\frac{2,975}{2} - 0,793\right) = 3 \cdot 0,6945 = 2,083 \ m$$

$$\sigma_{max\ z.a} = \frac{2N}{A_{activă}} = \frac{-2 \cdot 497,5 \cdot 10^2}{100 \cdot 208,3} = -4,77 \ daN/cm^2$$



31.



Se dă barajul din figură şi se cere să se determine limitele lui "x" astfel încât la bază să nu apară întinderi.

$\gamma_{beton} = 25 \ KN/m^3$

$\gamma_{apă} = 10 \ KN/m^3$

Rezolvare:

$G_1 = 2 \cdot 1 \cdot x \cdot 25 = 50x$ KN

$G_2 = 2 \cdot 1 \cdot 14 \cdot 25 = 700$ KN

$G_3 = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 25 = 100$ KN

$F_1 = \frac{9 \cdot 10 \cdot 9}{2} \cdot 1 = 405$ KN

$F_2 = 90 \cdot x \cdot 1 = 90x$ KN

(F_1 = rezultanta presiunii apei pe zona verticală a barajului;
F_2 = rezultanta presiunii apei pe talpa barajului de lungime x).

Se calculează eforturile globale în centrul de greutate al secţiunii de la baza barajului.

$$\begin{cases} N = -(G_1 + G_2 + G_3 + F_2) = -(800 + 140x) \ KN \\ M_z = 140x \cdot 2 - 700\left(\frac{x}{2} - 1\right) - 100\left(\frac{x}{2} + 1\right) - 405 \cdot 3 = \\ \quad = -(120x + 615) \ KNm \end{cases}$$

Pentru a nu avea întinderi în secţiunea de la bază, punctul de aplicaţie al forţei excentrice echivalente trebuie să se afle pe conturul sâmburelui central (solicitarea este încovoiere simplă cu forţă axială)

$$|e| = \left|\frac{M}{N}\right| \leq \frac{h}{6} = \frac{x+4}{6}$$

$$-\frac{x+4}{6} \leq \frac{-(120x+615)}{-(800+140x)} \leq \frac{x+4}{6}$$

$$-\frac{x+4}{6} \leq \frac{120x+615}{140x+800}$$

$$-(x+4)(140x+800) \leq 6(120x+615)$$

$$140x^2 + 2080x + 6890 \geq 0$$

Rezultă: $x_1 = -4,9875$ m şi $x_2 = -9,8718$ m care nu sînt soluţiile căutate pentru că "x" este o mărime pozitivă.

$$\frac{120x+615}{140x+800} \le \frac{x+4}{6}$$

$$6(120x+615) \le (140x+800)(x+4)$$

$$140x^2+640x-490 \ge 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-320 \pm \sqrt{320^2+140\cdot 490}}{140} = \frac{-320 \pm 413{,}5214}{140}.$$

$\boxed{x_1 = 0{,}668\ m}$ - soluția corectă

$x_2 = -5{,}239\ m$

Pentru $x = 0{,}668\,m$ se obține:

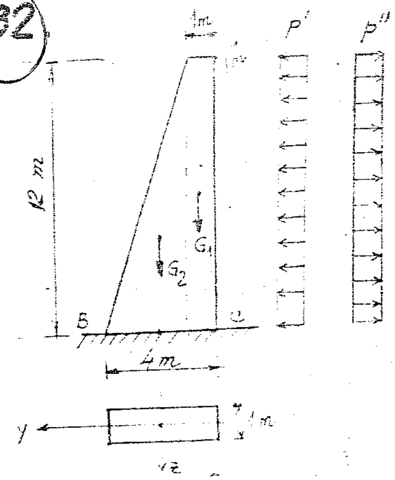
$$\begin{cases} N = -893{,}52\ KN \\ M_z = -695{,}16\ KN \end{cases}$$

$e = \frac{M_z}{N} = 0{,}778\ m$ (care este și limita sîmburelui central pe Oy)

Ecuația axei neutre: $y_0 = -\frac{h}{2} = -\frac{4{,}668}{2} = -2{,}334\ m$, deoarece cînd forța excentrică este pe conturul sîmburelui central, axa neutră este tangentă la contur. Se putea calcula y_0 și cu formula cunoscută: $y_0 = -\frac{i_z^2}{e} = -\frac{I_z N}{A M_z}$

$$|\sigma_{max}| = \left|\frac{N}{A}\right| + \left|\frac{M_z}{W_z}\right| = \frac{893{,}52\cdot 10^2}{100\times 466{,}8} + \frac{695{,}16\cdot 10^4}{100\cdot 466{,}8^2} = 3{,}828\ daN/cm^2$$

32



Pentru zidul de beton din figură considerat infinit lung se cere să se determine:

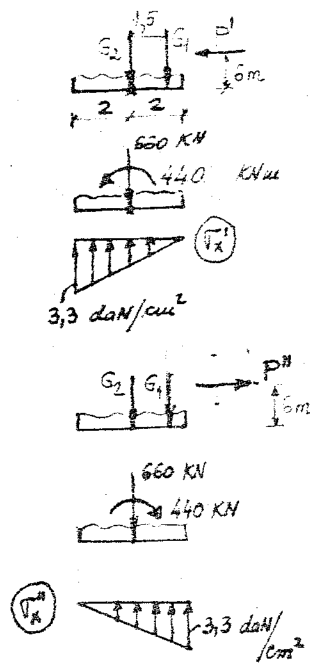
1) - încărcarea "p'" acționînd de la dreapta la stînga, astfel încît pe suprafața de contact cu terenul B-C să nu apară întinderi;

2) - încărcarea "p''" acționînd de la stînga la dreapta astfel încît pe suprafața de contact cu terenul B-C să nu apară întinderi

$\gamma_{beton} = 22\ KN/m^3$

$p' = const$; $p'' = const$.

Obs. Vor fi trasate și diagramele de presiuni pe teren în ambele cazuri.



Rezolvare:

1) $G_1 = 12\cdot 22 = 264\ KN$

$G_2 = \frac{3\cdot 12}{2}\cdot 22 = 396\ KN$

$P' = 12p'\ KN$

Se calculează N și M în centrul de greutate al secțiunii de la baza zidului.

$$\begin{cases} N = -(G_1+G_2) = -660\ KN \\ M_z = 264\cdot 1{,}5 - 12p'\cdot 6 = 396 - 72p'\ KNm \end{cases}$$

Pentru a nu avea întinderi în secțiunea de la baza zidului trebuie ca "e", excentricitatea forței echivalente să fie egală cu limita sîmburelui central pe axa Oy.

Deci:

$$|e| = \left|\frac{M_z}{N}\right| \le \frac{h}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\ m$$

$$-\frac{2}{3} \le \frac{M}{N} \le \frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3} \le \frac{396-72p'}{-660} \le \frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3} \le \frac{396-72p'}{-660} \Rightarrow p' \le -0{,}57\ KN/m^2$$

soluție neacceptabilă, pentru că p' este o mărime pozitivă

$$\frac{396-72\,p'}{-660} \le \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p' \geq 11{,}6111\ KN/m^2}$$

Rezultă: $\begin{cases} N = -660\ KN \\ M_z = 396 - 72 \cdot 11{,}6111 = -440{,}00\ KNm \end{cases}$

$$|\sigma_{max}| = \left|\frac{N}{A}\right| + \left|\frac{M_z}{W_z}\right| = \frac{660 \cdot 10^2}{100 \cdot 400} + \frac{440 \cdot 10^4}{\frac{100 \cdot 400^2}{6}} = 3{,}3\ daN/cm^2$$

$e = \frac{M}{N} = \frac{2}{3}\ m$ (limita sîmburelui central) $\Longrightarrow y_0 = -\frac{h}{2} = -\frac{4}{2} = -2m$ $\left(y_0 = -\frac{i_z^2}{e}\right)$, adică axa neutră este tangentă la contur cînd forța excentrică echivalentă este pe conturul sîmburelui central.

b) $\begin{cases} N = -660\ KN \\ M_z = 396 + 72\,p''\ KNm \end{cases}$

$$|e| = \left|\frac{M_z}{N}\right| \le \frac{h}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\ m$$

$$-\frac{2}{3} \le \frac{396+72\,p''}{-660} \le \frac{2}{3}\ m$$

$$-\frac{2}{3} \le \frac{396+72\,p''}{-660} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p'' \geq 0{,}611\ KN/m^2}$$

$$\frac{396+72\,p''}{-660} \le \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad p'' \le -11{,}61\ KN/m^2$$

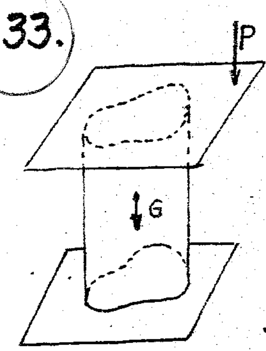
soluție neacceptabilă pentru că p'' este mărime pozitivă

Rezultă: $\begin{cases} N = -660\ KN \\ M_z = 440\ KNm \end{cases}$

$$e = \frac{M}{N} = -\frac{2}{3}\ m \quad \Longrightarrow \quad y_0 = +\frac{h}{2} = 2\ m$$

$$|\sigma''_{max}| = \left|\frac{N}{A}\right| + \left|\frac{M_z}{W}\right| = \frac{660 \cdot 10^2}{100 \times 400} + \frac{440 \cdot 10^4}{\frac{100 \cdot 400^2}{6}} = 3{,}3\ daN/cm^2$$

33.

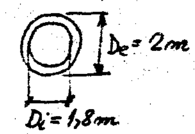


O coloană cilindrică de secțiune (A) și înălțime l are greutatea G și este încastrată la bază.

Pe fața superioară liberă a coloanei se găsește o placă plană, perpendiculară pe axa coloanei (placă fără greutate). Pe această placă se poate deplasa liber în orice direcție forța verticală P.

1)- Care este zona pe care se poate deplasa forța P, pe planul (F) astfel încît în secțiunea de încastrare a stîlpului să nu apară întinderi.

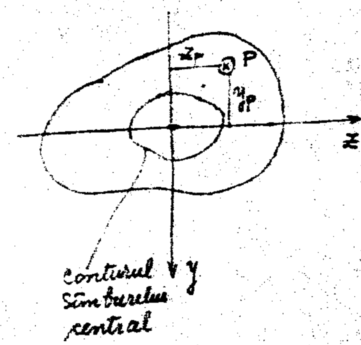
2)- Aplicație numerică pentru secțiunea (A)



$l = 10m$
$P = 50\ KN$
$\gamma = 22\ KN/m$

3) Cum se modifică răspunsul de la punctul (1) dacă greutatea permanentă G nu acționează în centrul de greutate al secțiunii de încastrare "O", ci într-un punct C al acestei secțiuni și în acest caz să se exemplifice pe aplicația precedentă presupunînd $OC = 0{,}5m$.

Rezolvare:



1) $\begin{cases} N = -(P+G) \\ M_z = P y_P \\ M_y = P \cdot z_P \end{cases}$

Pentru a nu avea întinderi trebuie ca forța N să se deplaseze pe conturul sîmburelui central.

Punctul de pe conturul S.C. în care se află forța N are coordonatele (e_y, e_z).

$$|e_y| \geq \left|\frac{M_z}{N}\right| = \frac{P \cdot y_P}{P+G} \qquad |e_z| \geq \left|\frac{M_y}{N}\right| = \frac{P \cdot z_P}{P+G}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_P \le \left(1+\frac{G}{P}\right) e_y \\ z_P \le \left(1+\frac{G}{P}\right) e_z \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} y_P > e_y \\ z_P > e_z \end{matrix}$$

Deci pentru a nu avea întinderi în secțiunea de la încastrare, P se poate deplasa pe o suprafață mărginită de un contur paralel cu conturul sîmburelui central, în exteriorul acestuia.

2) $P = 50\ KN$

$$G = \frac{\pi(D_e^2 - D_i^2)}{4}\, l \cdot \gamma = \frac{\pi(2^2 - 1{,}8^2)}{4} \cdot 10 \cdot 22 = 131{,}252\ KN.$$

$\begin{cases} N = -(P+G) = -181{,}252\ KN \\ M = P \cdot d = 50 \cdot d\ KNm \end{cases}$

Sîmburele central al secțiunii este o suprafață circulară de rază R.

$$i_z^2 = i_y^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\pi(De^4 - Di^4)}{64} \cdot \frac{1}{\frac{\pi(De^2 - Di^2)}{4}} = \frac{De^2 + Di^2}{16} = \frac{2^2 + 1{,}8^2}{16} = 0{,}4525\ cm^2$$

$$e_z = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{0{,}4525}{1} = -0{,}4525\ m$$

y_0 = tăietura axei neutre tangente la contur pe axele de coordonate

$y_0 = 1\ m$

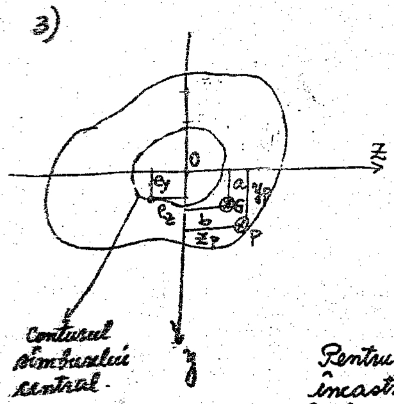
Deci conturul sîmburelui central este un cerc de rază $R = 0{,}4525\ m$

$$|e_z| \geq \left|\frac{M_z}{N}\right|$$

$$\frac{50d}{181{,}252} \leq 0{,}4525 \quad \Rightarrow \quad d \leq 1{,}64\ m$$

Deci P se poate deplasa în interiorul unei suprafețe circulare cu centrul în "0" și rază $R = d = 1{,}64\ m$.

3)



Un punct de pe conturul sîmburelui central este de coordonate (e_y, e_z). Considerăm că G are coordonatele punctului de aplicație (a, b), iar forța $P\ (y_P, z_P)$.

$$\begin{cases} N = -(P+G) \\ M_z = Ga + Py_P \\ M_y = G \cdot b + P \cdot z_P \end{cases}$$

Pentru a nu avea întinderi în secțiunea din încastrare N trebuie să se afle în interiorul sîmburelui central, la limită chiar pe conturul sîmburelui central.

$$|e_y| \geq \left|\frac{M_z}{N}\right| \quad \Rightarrow \quad e_y \geq \frac{Ga + Py_P}{P+G} \quad \Rightarrow \begin{cases} y_P \leq \left(1 + \frac{G}{P}\right)e_y - \frac{G}{P}a \\ z_P \leq \left(1 + \frac{G}{P}\right)e_z - \frac{G}{P}b \end{cases}$$

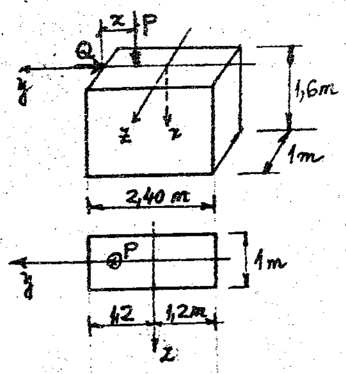
$$|e_z| \geq \left|\frac{M_y}{N}\right| \qquad e_z \geq \frac{Gb + Pz_P}{P+G}$$

$$\begin{cases} y_P \leq e_y + \frac{G}{P}(e_y - a) \\ z_P \leq e_z + \frac{G}{P}(e_z - b) \end{cases}$$

- Dacă G are punctul de aplicație în afara sîmburelui central, $a > e_y$, $b > e_z$, P se deplasează pe o suprafață mărginită de un contur paralel cu conturul sîmburelui central, în interiorul acestuia.
- Dacă G are punctul de aplicație în interiorul sîmburelui central $a < e_y$, $b < e_z$, P se deplasează pe o suprafață mărginită de un contur paralel cu conturul sîmburelui central, în exteriorul acestuia.
- Dacă $a = e_y$, $b = e_z$, P se află pe conturul sîmburelui central.

34. a) Să se determine distanța x astfel ca în secțiunea de la baza fundației să nu apară întinderi ($P = 118$ KN, $Q = 10$ KN, $\gamma = 20$ KN/m^3). Să se traseze diagrama σ_x și să se calculeze σ_{max}.

b) Pentru cazul $x = 0{,}2$ m, să se traseze diagrama tensiunilor și să se calculeze σ_{max}, știind că secțiunea de la bază nu preia întinderi.



Rezolvare:

$G = 20 \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}6 \cdot 1 = 76{,}8$ KN

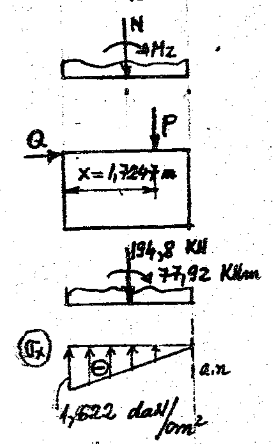
$$\begin{cases} N = -(P+G) = -(76{,}8 + 118) = -194{,}8 \quad KN \\ M_z = 10 \cdot 1{,}6 - 118(1{,}2 - x) = 118x - 125{,}6 \quad KNm \end{cases}$$

Secțiunea de la baza fundației este solicitată la încovoiere simplă cu forță axială. Pentru a nu avea întinderi trebuie ca forța axială N să aibă punctul de aplicație în interiorul sîmburelui central, pe axa Oy. Limita sîmburelui central pe axa Oy este $\pm \frac{h}{6} = \pm \frac{2{,}40}{6} = \pm 0{,}4$ m

Poziția lui N este dată de excentricitatea "e"

$$e = \frac{M_z}{N} \pm 0{,}4 \text{ m}$$

$$\frac{118x - 125{,}6}{-194{,}8} = \pm 0{,}4 \text{ m}$$



$\underline{e = 0{,}4 \text{ m}}$

$x = 1{,}7247$ m

rezultă:

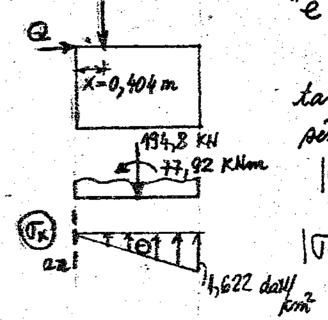
$$\begin{cases} N = -194{,}8 \quad KN \\ M_z = 77{,}92 \quad KNm \end{cases}$$

Intersecția axei neutre pe axa Oy și excentricitatea "e" sînt de o parte și de alta a axei Oz.

$e = 0{,}4 \Rightarrow y_0 = -\frac{h}{2} = -1{,}2$ m (axa neutră este tangentă la contur, cînd forța N este pe conturul sîmburelui central)

$$|\sigma_{max}| = \left|\frac{N}{A}\right| + \left|\frac{M_z}{W_z}\right|$$

$$|\sigma_{max}| = \frac{194{,}8 \cdot 10^2}{100 \cdot 240} + \frac{77{,}92 \cdot 10^4}{\frac{100 \cdot 240^2}{6}} = 1{,}622 \text{ daN/cm}^2$$



$\underline{e = -0{,}4 \text{ m}}$

$x = 0{,}404$ m

rezultă:
$$\begin{cases} N = -194{,}8 \quad KN \\ M_z = -77{,}92 \quad KN \end{cases}$$

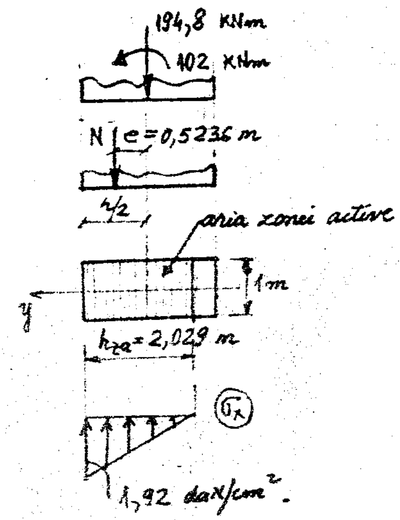
b) $x = 0{,}2$ m

$$\begin{cases} N = -194{,}8 \quad KN \\ M_z = -102 \quad KNm \end{cases}$$

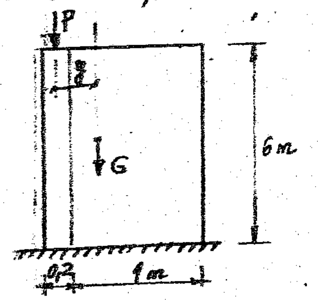
$e = \frac{M_z}{N} = \frac{-102}{-194{,}8} = 0{,}5236$ m $> \frac{h}{6} = 0{,}4$ m $\longrightarrow$ diagrama σ_x are și întinderi (axa neutră taie secțiunea)

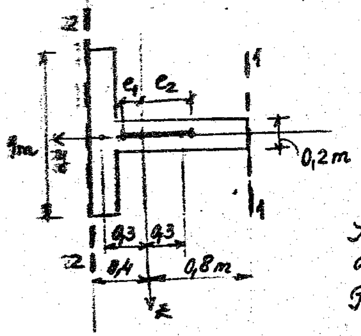
Înălțimea zonei active: $h_{za} = 3\left(\frac{h}{2} - e\right) = 3(1{,}2 - 0{,}5236) = 2{,}029$ m

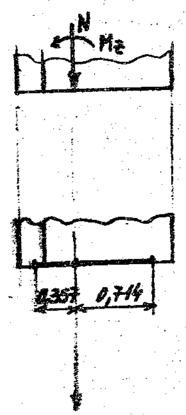
$$\sigma_{max} = \frac{2N}{A_{activă}} = \frac{2N}{b \cdot h_{za}} = \frac{-2 \cdot 194{,}8 \cdot 10^2}{100 \cdot 202{,}9} = -1{,}92 \text{ daN/cm}^2$$



35. Se dă un zid de beton cu $\gamma_b = 24\ KN/m^3$. Forța $P = 50KN$ se poate deplasa pe axa de simetrie y-y. Pe ce zonă se poate deplasa forța P ca la baza zidului să nu apară întinderi.







Rezolvare:

$A = 2\cdot 0{,}2\cdot 1 = 0{,}4\ m^2$

$y_G = \dfrac{+1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}6}{0{,}4} = 0{,}3\ m$

$I_z = \dfrac{0{,}2\cdot 1}{12} + 0{,}2\cdot 0{,}3^2 + \dfrac{1\cdot 0{,}2^3}{12} + 0{,}2\cdot 0{,}3^2 = 0{,}0533\ m^4$

$i_z^2 = \dfrac{I_z}{A} = 0{,}133\ m^2$

$G = \gamma A h = 24\cdot 0{,}4\cdot 6 = 57{,}6\ KN.$

Se reduce forțile în centrul de greutate al secțiunii de la bază:

$$\begin{cases} N = -(P+G) = -107{,}6\ KN \\ M_z = -P\cdot y = -50y\ KNm \end{cases}$$

Se calculează limitele sîmburelui central pe axa Oy:

Pentru axa neutră 1-1: $y_{0_1} = -0{,}8\ m$

$e_1 = -\dfrac{i_z^2}{y_{01}} = -\dfrac{0{,}133}{-0{,}8} = +0{,}166\ m$

Pentru axa neutră 2-2: $y_{0_2} = 0{,}4\ m$

$e_2 = -\dfrac{i_z^2}{y_{02}} = -\dfrac{0{,}133}{0{,}4} = -0{,}332$

Pentru a nu avea întinderi în secțiunea de la bază trebuie ca punctul de aplicație al forței excentrice echivalente să se deplaseze pe intervalul delimitat de e_1, e_2 pe axa Oy, adică punctul de aplicație al forței să fie în interiorul sîmburelui central.

$-0{,}332 \leq e = \dfrac{M_z}{N} \leq 0{,}166$

$-0{,}332 \leq \dfrac{50y}{107{,}6} \leq 0{,}166$

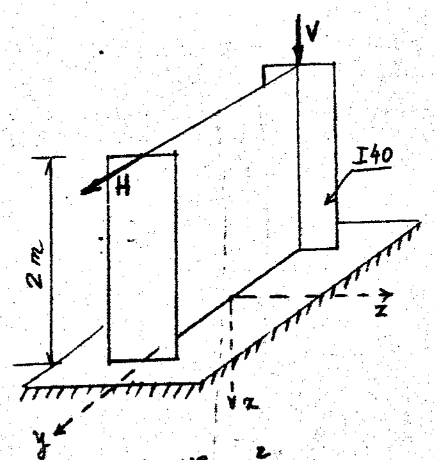
$-0{,}332 \leq \dfrac{50y}{107{,}6} \Rightarrow y \geq -0{,}714\ m$

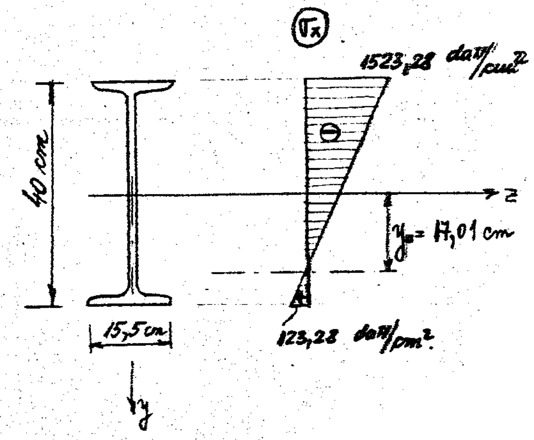
$\dfrac{50y}{107{,}6} \leq 0{,}166 \Rightarrow y \leq 0{,}357\ m$

36. Pentru stîlpul din figură se cere:

1) - Să se determine V și H astfel ca în secțiunea de la bază să nu apară întinderi, iar $\sigma_{max} = 1000\ daN/cm^2$.

2) - Cu H și V de la punctul 1 se modifică V la $V' = 1{,}4V$. Să se traseze diagrama σ_x în secțiunea periculoasă (inclusiv valorile extreme și axa neutră).





$$I40 \begin{cases} A = 118\ cm^2 \\ I_z = 29210\ cm^4 \\ I_y = 1160\ cm^4 \end{cases}$$

Rezolvare:

Se reduce forțele în raport cu centrul de greutate al secțiunii de la bază.

$$\begin{cases} N = -V\ \ KN \\ M_z = (0{,}2V - 2H)\ \ KN\,m \end{cases}$$ $\rightarrow$ solicitare de încovoiere simplă cu forță axială.

Pentru a nu avea întinderi, diagrama σ_x poate fi un trapez, sau la limită un triunghi cu:

$$\begin{cases} \sigma_{max} = 1000\ daN/cm^2 \\ \sigma_{min} = 0 \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{N}{A}\right| + \left|\dfrac{M_z}{W_z}\right| = 1000\ daN/cm^2 \\ \left|\dfrac{N}{A}\right| - \left|\dfrac{M_z}{W_z}\right| = 0 \end{cases}$$

$W_z = \dfrac{29210}{20} = 1460\ cm^3$

$$\begin{cases} \dfrac{V\cdot 10^2}{118} + \dfrac{|0{,}2V - 2H|\cdot 10^4}{1460} = 1000 \\ \dfrac{V\cdot 10^2}{118} - \dfrac{|0{,}2V - 2H|\cdot 10^4}{1460} = 0 \end{cases}$$

Adunînd cele 2 ecuații obținem: $\boxed{V = 590\ KN}$

Scăzînd cele două ecuații obținem:

$$\frac{2\cdot|0{,}2V-2H|\cdot 10^4}{1460}=1000$$

și înlocuind pe V obținem

$$|118-2H|=73$$

$$118-2H=\pm 73$$

$$118-2H=73 \Rightarrow H=22{,}5\ KN$$

$$118-2H=-73 \Rightarrow H=95{,}5\ KN$$

Verificăm cu cele două valori pentru H sistemul de ecuații pentru a alege soluția bună. (Înlocuim în a doua ecuație)

$$H=22{,}5\ KN \Rightarrow \frac{590\cdot 10^2}{118}-\frac{(0{,}2\cdot 590-2\cdot 22{,}5)\cdot 10^4}{1460}\equiv 0$$

$$H=95{,}5\ KN \Rightarrow \frac{590\cdot 10^2}{118}-\frac{(0{,}2\cdot 590-2\cdot 95{,}5)\cdot 10^4}{1460}=1000\neq 0$$

Deci soluția corectă este: $\boxed{H=22{,}5\ KN}$

2) $V'=1{,}4V=1{,}4(590)=826\ KN$

Eforturile globale devin:

$$\begin{cases} N=-V'=-826\ KN \\ M_z=0{,}2\cdot 826-2\cdot 22{,}5=120{,}2\ KNm \end{cases}$$

Ecuația axei neutre:

$$y_0=-\frac{i_z^2}{e}=-\frac{I_z N}{A\cdot M_z}=-\frac{29810\cdot(-826\cdot 10^2)}{118\cdot 120{,}2\cdot 10^4}=17{,}01\ cm$$

$$\sigma_x=\frac{N}{A}\pm\frac{M_z}{W_z}=-\frac{826\cdot 10^2}{118}\pm\frac{120{,}2\cdot 10^4}{1460}=-700\pm 823{,}28$$

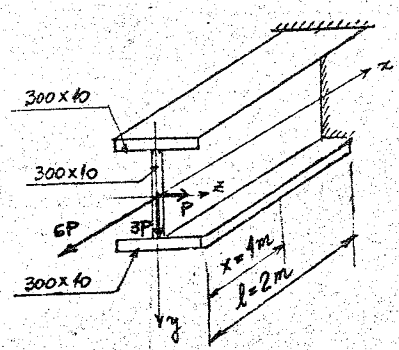
$$\sigma_1=123{,}28\ daN/cm^2$$

$$\sigma_2=-1523{,}28\ daN/cm^2$$

37. Pentru bara încastrată din figură se cere:

1) Să se determine P_{ad} considerînd $\sigma_a=1600\ daN/cm^2$;

2) În secțiunea a-a ($x=1m$) să se determine poziția axei neutre și diagramele de tensiune σ_x și τ



Rezolvare:

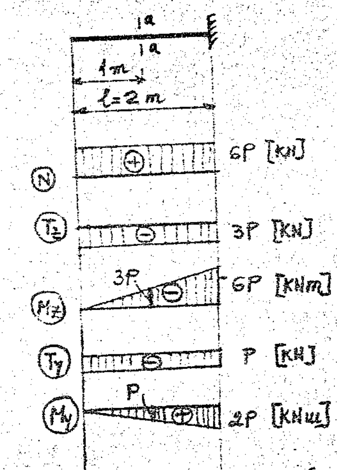
$$I_z=2\left(\frac{30}{12}+30\cdot 15{,}5^2\right)+\frac{30^3}{12}=16670\ cm^4$$

$$I_y=\frac{30^3}{12}\cdot 2+\frac{30}{12}=4500\ cm^4$$

$$A=90\ cm^2$$

$$W_z=\frac{16670}{16}=1041{,}87\ cm^3$$

$$W_y=\frac{4500}{15}=300\ cm^3$$



Grinda este solicitată la încovoiere dublă cu forță axială, secțiunea cea mai solicitată fiind în încastrare. Pentru că secțiunea este înscriptibilă într-un dreptunghi, colțurile dreptunghiului aparținînd secțiunii, σ_{max} este în unul din colțurile secțiunii.

$$|\sigma_{max}|=\left|\frac{N}{A}\right|+\left|\frac{M_z}{W_z}\right|+\left|\frac{M_y}{W_y}\right|=1600\ daN/cm^2$$

$$\frac{6P\cdot 10^2}{90}+\frac{6P\cdot 10^4}{1041{,}87}+\frac{2P\cdot 10^4}{300}=1600$$

$$\boxed{P_{ad}=12{,}22\ KN}$$

2) În secțiunea a-a ($x=1m$) eforturile globale sînt:

$N=6P=73{,}32\ [KN]$

$T_z=-3P=-36{,}66\ [KN]$

$M_z=-3P=-36{,}66\ [KNm]$

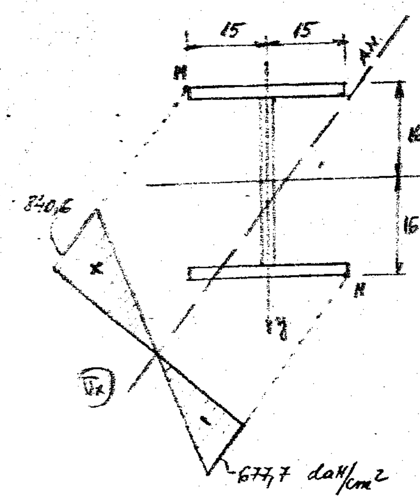
$T_y=-P=-12{,}22\ [KN]$

$M_y=P=12{,}22\ [KNm]$

Tăieturile axei neutre pe axele de coordonate sînt:

$$y_0=-\frac{i_z^2}{e_y}=-\frac{\frac{I_z}{A}}{\frac{M_z}{N}}=-\frac{16670\cdot 73{,}32\cdot 10^2}{90\cdot(-36{,}66)\cdot 10^4}=3{,}7\ cm$$

$$z_0=-\frac{i_y^2}{e_z}=-\frac{\frac{I_y}{A}}{-\frac{M_y}{N}}=\frac{4500\cdot 73{,}32\cdot 10^2}{90\cdot 12{,}22\cdot 10^4}=3{,}03\ cm$$



$$\sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_M - \frac{M_y}{I_y} z_M =$$

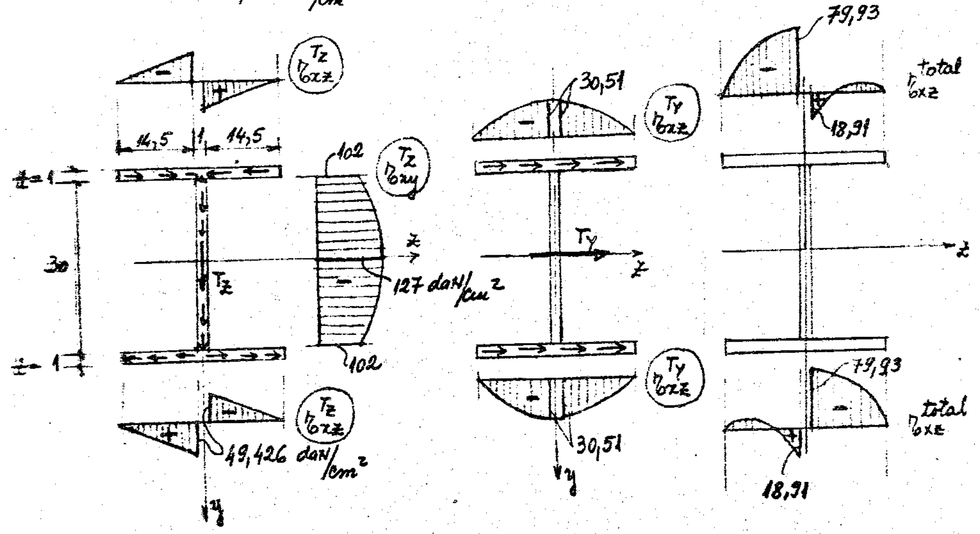
$$= \frac{73{,}32 \cdot 10^2}{90} + \frac{-36{,}66 \cdot 10^4}{16670}(-16) -$$

$$- \frac{12{,}22 \cdot 10^4}{4500}(-15) = 840{,}6 \ daN/cm^2$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_N - \frac{M_y}{I_y} z_N =$$

$$= \frac{73{,}32 \cdot 10^2}{90} + \frac{-36{,}66 \cdot 10^4}{16670} \cdot 16 -$$

$$- \frac{12{,}22 \cdot 10^4}{4500} \cdot 15 = 677{,}7 \ daN/cm^2$$



$T_z = -36{,}66$ KN: $\quad \tau_{xy_1} = \frac{T_z \cdot S_z}{b I_z} = \frac{36{,}66 \cdot 10^2 \cdot (30 \cdot 1 \cdot 15{,}5)}{1 \cdot 16670} = 102 \ daN/cm^2$

$$\tau_{xy}^{max} = \frac{T_z \cdot S_z^{max}}{b \cdot I_z} = \frac{36{,}66 \cdot 10^2 (30 \cdot 1 \cdot 15{,}5 + 15 \cdot 1 \cdot 7{,}5)}{1 \cdot 16670} = 127 \ daN/cm^2$$

$$\tau_{xz}^{max} = \frac{T_z \cdot S_z}{t \cdot I_z} = \frac{36{,}66 \cdot 10^2 (1 \cdot 14{,}5 \cdot 15{,}5)}{1 \cdot 16670} = 49{,}426 \ daN/cm^2$$

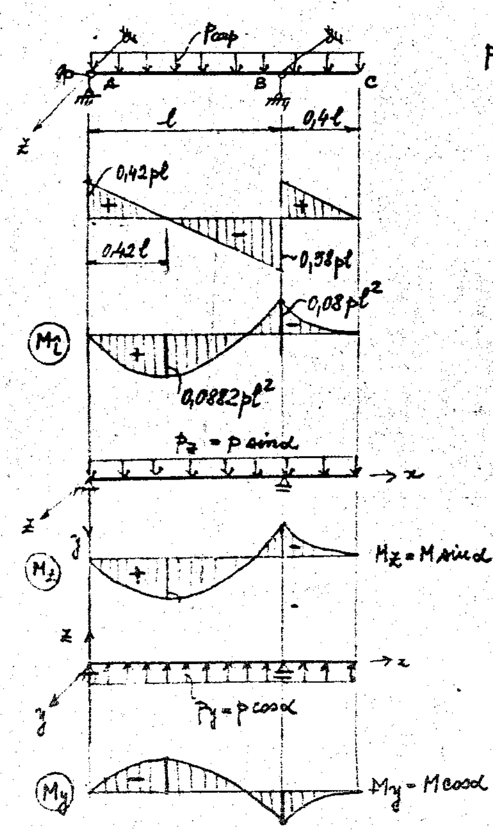
$T_y = -12{,}22$ KN: $\quad \tau_{xz_1} = \frac{T_y \cdot S_y}{t \cdot I_y} = \frac{12{,}22 \cdot 10^2 (1 \cdot 14{,}5 \cdot 7{,}25)}{1 \cdot 4500} = 30{,}51 \ daN/cm^2$

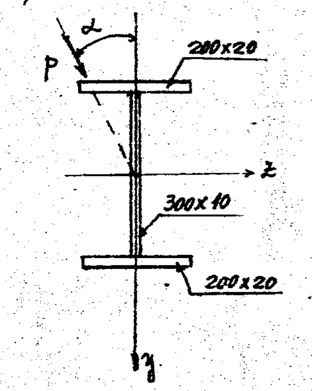
S-a calculat valoarea lui τ_{xz} la marginea inimii.

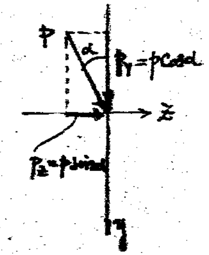
Diagrama finală τ_{xz} este prezentată în figură.

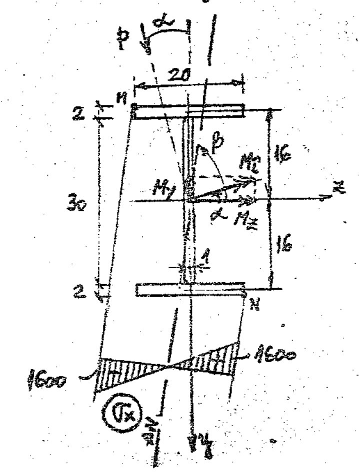
38. Se dă grinda din figură încărcată cu o forță uniform distribuită "p" care face un unghi de 30° cu axa Oy. În punctele B și C sînt aceleași rezemări pe direcțiile y și z. Cunoscînd $\sigma_a = 1600$ daN/cm² și $l = 4$ m se cer:

1)- încărcarea capabilă;
2)- diagrama σ_x în secțiunea cea mai solicitată;
3)- să se arate că fibra medie deformată este o curbă plană și să se determine care este acest plan.









Rezolvare:

Forțele acționînd într-un singur plan, se poate calcula direct diagrama de moment rezultant M_i, care acționează într-un plan perpendicular pe planul forțelor.

Descompunînd încărcarea după cele două axe se pot trasa pe rînd diagramele M_z și M_y.

Este recomandabil să se lucreze direct cu diagrama M_i, pentru economie de timp de lucru.

$$I_z = \left(\frac{20 \cdot 2^3}{12} + 20 \cdot 2 \cdot 16^2\right) 2 + \frac{30^3}{12} =$$

$$= 22757 \ cm^4$$

$$I_y = \frac{2 \cdot 20^3}{12} \cdot 2 + \frac{30}{12} = 2669 \ cm^4$$

Secțiunea periculoasă este la $x = 0{,}42l$ m de reazemul A, iar solicitarea este de încovoiere dublă.

$M_z = M_i^{\circ} \cos\alpha = 0{,}0882\, p l^2 \cos 30^{\circ} = 0{,}0882 \cdot p \cdot 4^2 \cdot \cos 30^{\circ} = 1{,}2221\, p$ kNm

$M_y = -M_i^{\circ} \sin\alpha = -0{,}0882 \cdot p l^2 \sin 30^{\circ} = 0{,}0882 \cdot p \cdot 4^2 \sin 30^{\circ} = -0{,}7056\, p$ kNm

Pentru că secțiunea este înscriptibilă într-un dreptunghi, colțurile dreptunghiului aparținând secțiunii, punctul cel mai solicitat este în unul din colțuri, astfel încât se poate scrie.

$$|\sigma_{max}| = \left|\frac{M_z}{I_z} y_{max}\right| + \left|\frac{M_y}{I_y} z_{max}\right| = 1600 \text{ daN/cm}^2$$

$$\frac{1{,}2221\, p \cdot 10^4}{22757} \cdot 17 + \frac{0{,}7056\, p \cdot 10^4}{2669} \cdot 10 = 1600$$

$$\boxed{p_{cap} = 44{,}986 \text{ KN/m}}$$

2) Axa neutră la încovoiere dublă în secțiunea periculoasă:

$$tg\beta = \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} = \frac{-0{,}7056}{1{,}2221} \cdot \frac{22757}{2669} = -4{,}922 \rightarrow \beta = -78{,}51^{\circ}$$

Chiar dacă semnul lui β nu se calculează analitic, se știe că axa neutră este cuprinsă între vectorul moment încovoietor rezultant și axa principală de inerție de minim.

3) - Pentru a arăta că fibra medie deformată este o curbă plană, este suficient să se arate că unghiul, pe care îl face săgeata "f" în secțiune cu axa Oz, este constant.

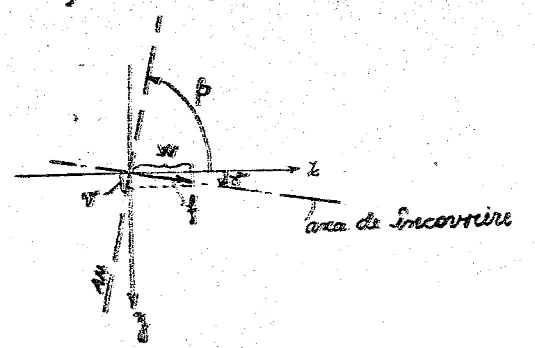
$$f = \sqrt{v^2 + w^2}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} = -\frac{M_i^{\circ} \cos\alpha}{EI_z} \implies v = -\frac{\cos\alpha}{EI_z} \int\left[\int M_i^{\circ} dx\right) dx$$

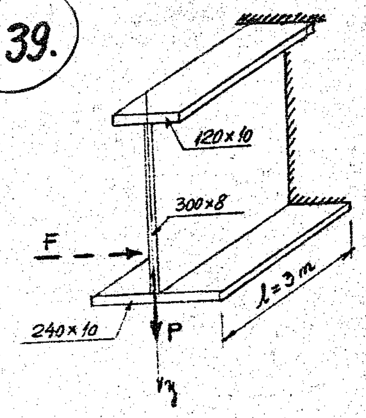
$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_y} = \frac{-M_i^{\circ} \sin\alpha}{EI_y} \implies w = -\frac{\sin\alpha}{EI_z} \int\left[\int M_i^{\circ} dx\right)\Big] dx$$

$$tg\gamma = \frac{v}{w} = \frac{1}{tg\alpha \frac{I_z}{I_y}} = -\frac{1}{tg\beta} = 0{,}2031 \implies \boxed{\gamma = 11{,}49^{\circ}}$$

Deci "f" este perpendiculară pe axa neutră din secțiune.



39.



1) - Pentru $\sigma_{max} = 1000$ daN/cm² să se găsească $P = ?$

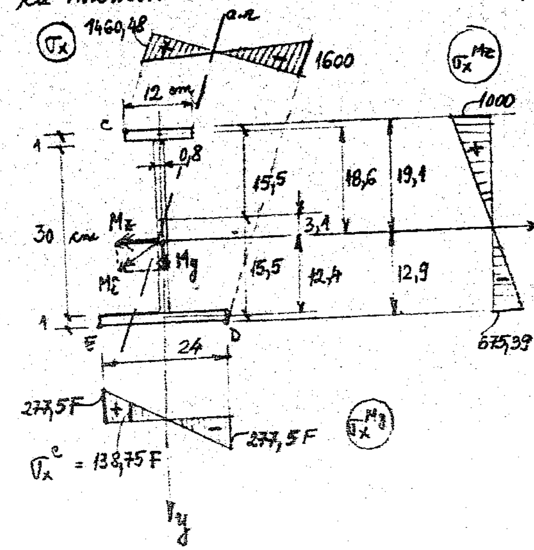
2) - Cu P calculat și cu $\sigma_{max} = 1600$ daN/cm² să se găsească F, poziția axei neutre și diagrama σ_x în secțiunea de verificare;

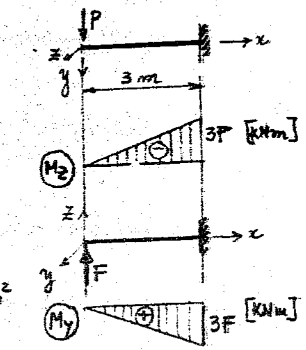
3) - În ce punct al inimii trebuie să acționeze F, pentru ca răspunsul de la punctul 2) să fie corect?

4) - Să se precizeze natura curbei fibrei medii deformate (curbă plană sau curbă strâmbă) fără calcule și direcția vectorului deplasării totale într-un punct curent al axei barei

Rezolvare:

1) Când acționează numai P grinda este solicitată la încovoiere simplă cu momentul maxim în încastrare, $M_z = -Pl = -3P$ KNm.





$$y_G = \frac{-12 \cdot 15{,}5 + 24 \cdot 15{,}5}{12 + 24 + 0{,}8 \cdot 30} = -3{,}1 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{12}{12} + 12 \cdot 18{,}6^2 + \frac{0{,}8 \cdot 30^3}{12} + 0{,}8 \cdot 30 \cdot 3{,}1^2 + \frac{24}{12} + 24 \cdot 12{,}4^2 = 9875 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{12^3}{12} + \frac{30 \cdot 0{,}8^3}{12} + \frac{24^3}{12} = 1297 \text{ cm}^4$$

$$\left|\sigma_{max}^{M_z}\right| = \frac{M_z^{max}}{I_z} y_{max} = \frac{3P \cdot 10^4}{9875} 19{,}1 = 1000 \text{ daN/cm}^2$$

$$\boxed{P = 17{,}234 \text{ KN}}$$

2) Cînd pe grindă acționează pe lîngă P și forța F, paralelă cu axa Oz, grinda este supusă la încovoiere dublă, secțiunea periculoasă fiind în încastrare:

$$\begin{cases} M_z = -3P = -3\cdot 17{,}234 = -54{,}702 \ KNm \\ M_y = 3F \ KN \end{cases}$$

$$\sigma_{x_{max}}^{M_y} = \frac{3F\cdot 10^4}{1297}\cdot 12 = 277{,}5\,F \ daN/cm^2$$

$$\sigma_{x_C}^{M_y} = \frac{3F\cdot 10^2}{1297}\cdot 6 = 138{,}75\,F \ daN/cm^2$$

$$\sigma_{x_D}^{M_z} = \frac{54{,}702\cdot 10^4}{9875}\cdot 12{,}9 = 675{,}39 \ daN/cm^2$$

Vectorul moment încovoietor rezultant M_i este reprezentat în figură. Axa neutră la încovoiere dublă se află între vectorul M_i și axa principală de inerție de minim, deci în secțiunea transversală punctele cele mai depărtate de axa neutră pot fi, în funcție de poziția acesteia, C, D sau E.

$$\sigma_x^C = \sigma_{x\,M_z}^C + \sigma_{x\,M_y}^C = 1000 + 138{,}75\,F \quad daN/cm^2$$

$$\sigma_x^D = \sigma_{x\,M_z}^D + \sigma_{x\,M_y}^D = -675{,}39 - 277{,}5\,F \quad daN/cm^2$$

$$\sigma_x^E = \sigma_{x\,M_z}^E + \sigma_{x\,M_y}^E = -675{,}39 + 138{,}75\,F \quad daN/cm^2$$

$$\sigma_x^C = 1000 + 138{,}75\,F = 1600 \ daN/cm^2 \Rightarrow F = 4{,}324 \ KN$$

$$|\sigma_x^D| = 675{,}39 + 277{,}5\,F = 1600 \ \text{—"—} \Rightarrow F = 3{,}332 \ KN$$

$$\sigma_x^E = -675{,}39 + 138{,}75\,F = 1600 \ \text{—"—} \Rightarrow F = 16{,}399 \ KN$$

$$F_{cap} = \min[F^C, F^D, F^E] = 3{,}332 \ KN$$

$$\boxed{F = 3{,}332 \ KN}$$

Cu F calculat obținem: $\begin{cases} M_z = -54{,}702 \ KNm \\ M_y = 9{,}996 \ KNm \end{cases}$

Ecuația axei neutre la încovoiere dublă:

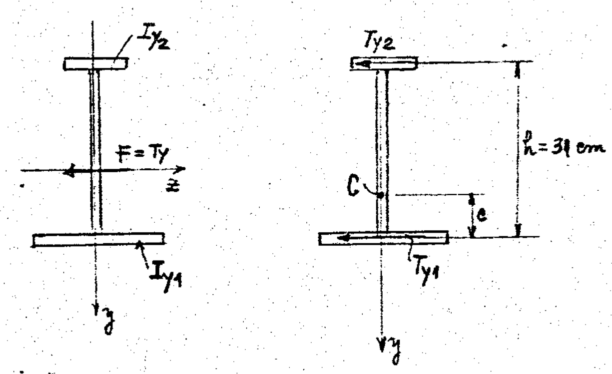
$$|tg\beta| = \frac{M_y}{M_z}\cdot\frac{I_z}{I_y} = \frac{9{,}996\cdot 10^4}{54{,}702\cdot 10^4}\cdot\frac{9875}{1297} = 1{,}39 \rightarrow \beta = 54{,}29^\circ$$

Unghiul β se măsoară de la axa Oz în același sens cu unghiul α pe care-l face M_i cu axa Oz.

Obs. Se putea calcula semnul lui β analitic: $tg\beta = \frac{9{,}996\cdot 10^4}{-54{,}702}\cdot\frac{9875}{1297} = -1{,}39$

$\beta = -54{,}29^\circ$, măsurat de la axa Oz în sens antiorar pentru că este

3) Pentru ca bara să fie solicitată la încovoiere dublă, cu și la răsucire trebuie ca F să treacă prin centrul de încovoiere-torsiune.



Se pune condiția ca razele de curbură să fie egale pentru cele 2 tălpi:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \frac{M_{y1}}{EI_{y1}} = \frac{M_{y2}}{EI_{y2}} = \frac{M_y}{EI_y} \Rightarrow \frac{T_{y1}}{EI_{y1}} = \frac{T_{y2}}{EI_{y2}} = \frac{T_y}{EI_y}$$

$$T_{y1} = \frac{I_{y1}}{I_y}\cdot T_y = \frac{1152}{1297}T_y = 0{,}8882\,T_y$$

$$T_{y2} = \frac{I_{y2}}{I_y}\cdot T_y = \frac{144}{1297}T_y = 0{,}111\,T_y$$

$$I_{y1} = \frac{24^3}{12} = 1152 \ cm^4$$

$$I_{y2} = \frac{12^3}{12} = 144 \ cm^4$$

$$I_y = 1297 \ cm^4$$

T_{y1} și T_{y2} reprezintă rezultantele eforturilor unitare tangențiale τ_{xz} care acționează pe tălpi, produse de acțiunea lui T_y în secțiune. Poziția centrului de încovoiere-torsiune se obține din condiția ca momentul de răsucire în raport cu el să fie nul.

$$\mathcal{M}_C = 0 \quad T_{y1}\cdot c - T_{y2}\cdot(h-c) = 0 \Rightarrow (T_{y1}+T_{y2})\,c - T_{y2}\cdot h = 0$$

$$T_{y1} + T_{y2} \simeq T_y$$

$$c = \frac{T_{y2}}{T_y}h = 0{,}111\cdot 31 = 3{,}44 \ cm$$

4) Într-o secțiune oarecare $M_i = \sqrt{(Px)^2+(Fy)^2} = x\sqrt{P^2+F^2}$. Unghiul pe care îl face M_i cu axa Oz este o constantă $\left(tg\alpha = \frac{M_y}{M_z} = \frac{F}{-P}\right)$, deci M_i se află într-un plan, ceea ce implică pentru fibra medie deformată o curbă plană.

$$tg\beta = tg\alpha\,\frac{I_z}{I_y} = \frac{F}{-P}\cdot\frac{I_z}{I_y} = const \quad (\beta \text{ unghiul dintre } Oz \text{ și axa neutră})$$

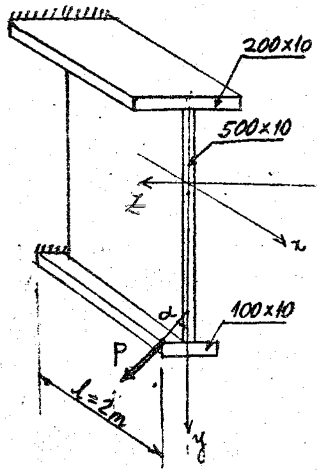
$$tg\gamma = \frac{v}{w} = \frac{P\iint x\,dx\,dx}{EI_z}\cdot\frac{EI_y}{F\iint x\,dx\,dx} = \frac{P}{F}\cdot\frac{I_y}{I_z} = -\frac{1}{tg\beta}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} = \frac{Px}{EI_z}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_y} = \frac{Fx}{EI_y}$$

Deci deplasarea într-un punct curent al grinzii este înclinată cu unghiul γ față de axa Oz și este perpendiculară pe axa neutră.

40. Se dă forța P = 2500 daN care acționează ca în figură și se cere:
1) unghiul α pentru care grinda nu este solicitată la torsiune;
2) σ_{max} și axa neutră în secțiunea cea mai solicitată;
3) componentele deplasării extremității consolei.



Rezolvare:

$$y_G = \frac{-20\cdot 25{,}5 + 10\cdot 25{,}5}{20+10+50} = -3{,}2\,cm$$

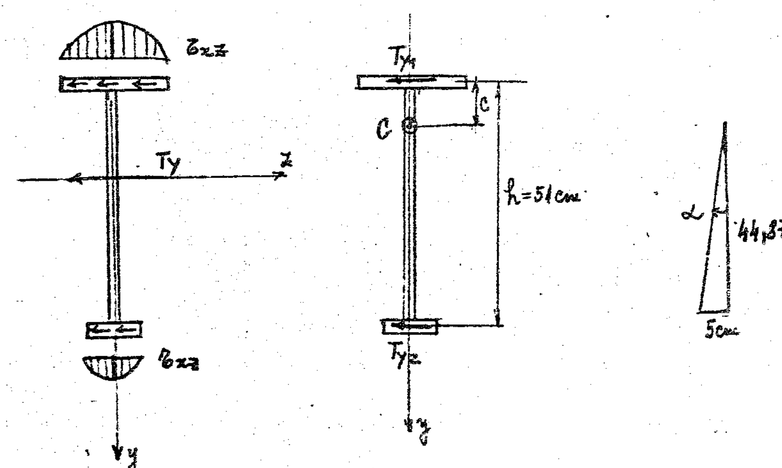
$$I_z = \frac{20}{12} + 20\cdot 22{,}3^2 + \frac{50^3}{12} + 50\cdot 3{,}2^2 + \frac{10}{12} + 10\cdot 28{,}7^2 = 28533{,}5\,cm^4$$

$$I_y = \frac{20^3}{12} + \frac{50}{12} + \frac{10^3}{12} = 754\,cm^4$$

$$I_y^{talpă\,1} = \frac{20^3}{12} = 666{,}67\,cm^4$$

$$I_y^{talpă\,2} = \frac{10^3}{12} = 83{,}33\,cm^4$$

Pentru ca grinda să nu fie solicitată la torsiune trebuie ca forța P să treacă prin centrul de încovoiere-torsiune, care se află pe axa de simetrie a secțiunii.



Se pune condiția ca curburile celor 2 platbande să fie egale:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{M_{y1}}{EI_{y1}} = \frac{M_{y2}}{EI_{y2}} = \frac{M_y}{EI_y} \quad \text{sau} \quad \frac{T_{y1}}{EI_{y1}} = \frac{T_{y2}}{EI_{y2}} = \frac{T_y}{I_y}$$

Rezultă: $T_{y1} = T_y \cdot \frac{I_{y1}}{I_y}$

$T_{y2} = T_y \cdot \frac{I_{y2}}{I_y}$

Pentru a determina centrul de încovoiere-torsiune se pune condiția ca momentul de răsucire al rezultantelor eforturilor unitare tangențiale să fie nul în raport cu C.

$$\mathcal{M}_C = 0$$

$$T_{y1}\cdot c - T_{y2}\cdot(h-c) = 0$$

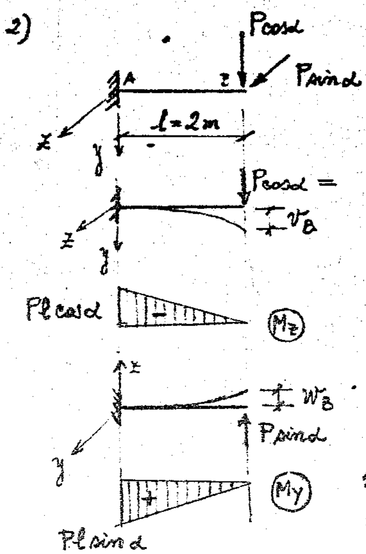
$$(T_{y1}+T_{y2})\cdot c - T_{y2}\cdot h = 0 \qquad T_{y1}+T_{y2} = T_y$$

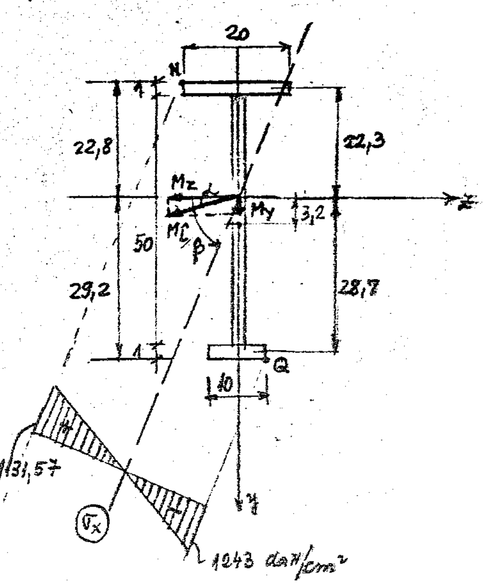
$$c = \frac{T_{y2}\,h}{T_y} = \frac{I_{y2}}{I_y}\cdot h = \frac{83{,}33}{754}\cdot 51 = 5{,}63\,cm$$

$$tg\,\alpha = \frac{5}{44{,}87} = 0{,}1114 \Rightarrow \boxed{\alpha = 6{,}36^\circ}$$

Deci unghiul pe care trebuie să-l facă forța P cu axa Oy pentru ca grinda să nu fie solicitată la răsucire este α = 6,36°.

2)





$M_z = Pl\cos\alpha = 2500\cdot 2\cdot\cos 6{,}36 = 4969{,}2275\ daNm$

$M_y = Pl\sin\alpha = 2500\cdot 2\ \sin 6{,}36 = 553{,}8756\ daNm$

Grinda este solicitată la încovoiere dublă, iar secțiunea periculoasă este secțiunea din încastrare.

Ecuația axei neutre devine:

$$tg\beta = \frac{M_y}{M_z}\cdot\frac{I_z}{I_y} = \frac{Pl\sin\alpha}{Pl\cos\alpha}\cdot\frac{I_z}{I_y} = tg\alpha\frac{I_z}{I_y} = tg\,6{,}36^\circ\cdot\frac{28539{,}5}{754} = 4{,}2188$$

$$\beta = 76{,}66^\circ$$

Unghiul β se află în același cadran al axelor principale de inerție cu unghiul α, β și α măsurîndu-se în același sens de la axa Oz.

Punctele cele mai depărtate de axa neutră care vor fi și cele mai solicitate sînt N și Q.

$$\sigma_x^N = \frac{M_z}{I_z}y_N - \frac{M_y}{I_y}z_N = -\frac{4969{,}2275\cdot10^2}{28539{,}5}\cdot(-22{,}8) - \frac{553{,}8756\cdot10^2}{754}\cdot(-10) =$$

$$= 1131{,}57\ daN/cm^2$$

$$\sigma_x^Q = \frac{M_z}{I_z}y_Q - \frac{M_y}{I_y}z_Q = -\frac{4969{,}2275\cdot10^2}{28539{,}5}\cdot29{,}2 - \frac{553{,}8756\cdot10^2}{754}\cdot10 =$$

$$= -1243\ daN/cm^2$$

3)

$$v_B = \frac{Pl^3\cos\alpha}{3EI_z} = \frac{2500\cdot200^3\cdot\cos6{,}36}{3\cdot2{,}1\cdot10^6\cdot28539{,}5} = 0{,}11\ cm$$

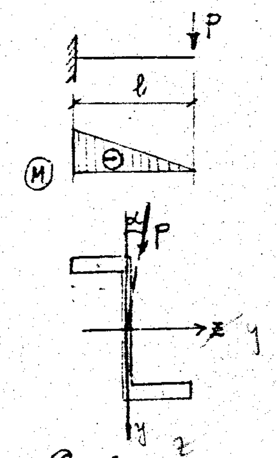
$$w_B = \frac{Pl^3\sin\alpha}{3EI_y} = \frac{2500\cdot200^3\cdot\sin6{,}36}{3\cdot2{,}1\cdot10^6\cdot754} = 0{,}466\ cm$$

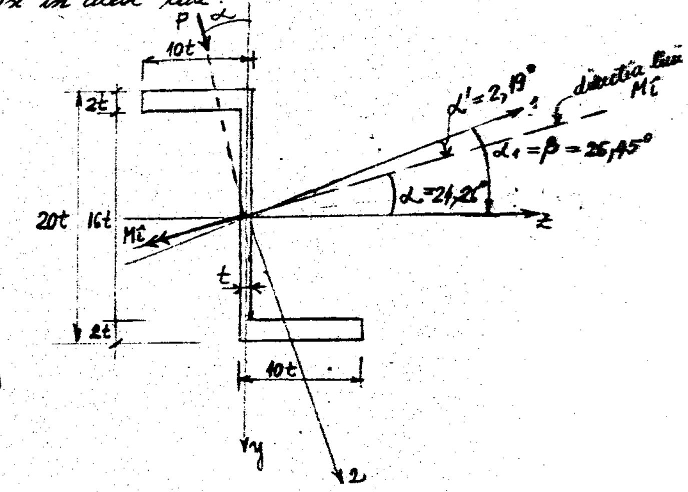
Ambele deplasări, după Oy (v_B) și după Oz (w_B) sînt pozitive

$$f_B = \sqrt{v^2+w^2} = 0{,}479\ cm^2 \rightarrow \text{săgeata rezultantă în B.}$$

41. Se dă o consolă, cu secțiunea transversală din figură, încărcată cu o forță concentrată care face un unghi α cu verticala și se cere:

1) - pentru ce unghi α încovoierea se produce în planul inimii secțiunii;
2) - diagrama σ_x în acest caz.





a)

Rezolvare:

Pentru a avea o încovoiere în planul inimii secțiunii, ceea ce înseamnă că săgeata rezultantă "f" din secțiune este pe verticală, trebuie ca axa neutră la încovoiere dublă să fie orizontală, deci axa neutră să fie chiar axa Oz. Săgeata "f" este perpendiculară pe axa neutră din secțiune.

Se calculează momentele de inerție principale și direcțiile principale de inerție.

$$I_z = 2\left(\frac{10t\cdot(2t)^3}{12} + 20t^2\cdot(9t)^2\right) + \frac{t\cdot(16t)^3}{12} = 3594{,}66\,t^4$$

$$I_y = 2\left(\frac{2t\cdot(10t)^3}{12} + 20t^2(4{,}5t)^2\right) + \frac{16t^4}{12} = 1144{,}66\,t^4$$

$$I_{zy} = (20t^2\cdot9t\cdot4{,}5t)\cdot2 = 1620\,t^4$$

$$I_{1,2} = \frac{I_z+I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_z-I_y)^2+4I_{zy}^2} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 4400{,}68\,t^4 \\ I_2 = 338{,}65\,t^4 \end{cases}$$

$$tg\,2\alpha_0 = -\frac{2I_{zy}}{I_z-I_y} = -1{,}322 \rightarrow 2\alpha_0 = -52{,}9^\circ \rightarrow \begin{array}{l} \alpha_0 = -26{,}45^\circ = \alpha_1 \\ \alpha+90 = 63{,}55^\circ = \alpha_2 \end{array}$$

$$\frac{tg\alpha_{01}}{I_{zy}} < 0$$

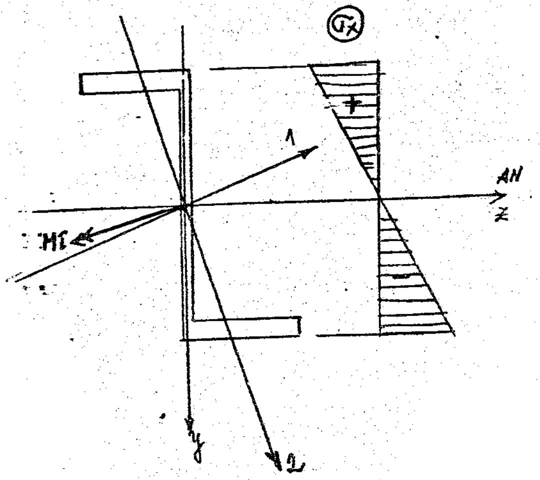
Se notează cu β unghiul dintre axa neutră (axa Oz) și axa principală de inerție $O1$ și cu α' unghiul dintre vectorul M_i și axa $O1$.

$$tg\beta = tg\alpha'\frac{I_1}{I_2} \quad ; \quad \text{dar } \beta = \alpha_1 \Rightarrow tg\alpha_1 = tg\alpha'\frac{I_1}{I_2}$$

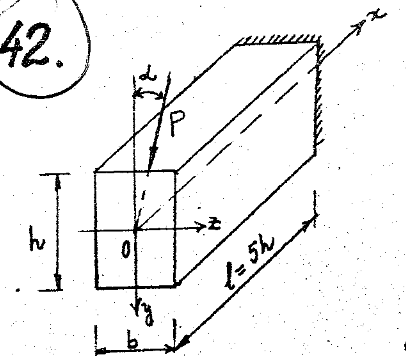
$$tg\alpha' = tg\alpha_1\frac{I_2}{I_1} = tg(-26{,}45^\circ)\cdot\frac{338{,}65\,t^4}{4400{,}68\,t^4} = -0{,}03828 \Rightarrow \alpha' = -2{,}1924$$

Vectorul moment încovoietor rezultant fiind perpendicular pe planul forțelor rezultă pentru P în secțiune direcția din figura a)

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha' = 26{,}45^\circ - 2{,}19^\circ = 24{,}26^\circ$$

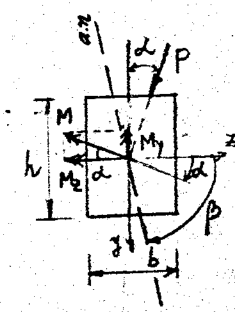


42.



1) - Se cere valoarea unghiului α astfel încât momentul capabil (forța capabilă) să fie minim.
2) - Direcția axei neutre în cazul de la punctul 1.
3) - Deplasarea în punctul 0.

Rezolvare:



Grinda este solicitată la încovoiere dublă

$M_z = M\cos\alpha$; $M_y = M\sin\alpha$

$W_z = \frac{bh^2}{6}$; $W_y = \frac{hb^2}{6}$

$\frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b} = k$ (notație)

$$|\sigma_{max}| = \left|\frac{M_z}{W_z}\right| + \left|\frac{M_y}{W_y}\right| \le \sigma_a$$

$$\frac{M_z}{W_z}(1 + K\,tg\alpha) = \sigma_a \quad , \text{unde } tg\alpha = \frac{M_y}{M_z}$$

$$\frac{M\cos\alpha}{W_z}(1 + K\,tg\alpha) = \sigma_a$$

$$M = \frac{\sigma_a \cdot W_z}{\cos\alpha\,(1 + K\,tg\alpha)} = \frac{\sigma_a \cdot W_z}{(\cos\alpha + K\sin\alpha)}$$

Anulând prima derivată a momentului în raport cu α, obținem unghiul α pentru care momentul are valoare minimă.

$$\frac{dM}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_a W_z\,(\sin\alpha - K\cos\alpha)}{(\cos\alpha + K\sin\alpha)^2} = 0 \Longrightarrow \boxed{tg\alpha = K = \frac{h}{b}}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{h}{b}\right)$$

$$M_{min} = \frac{\sigma_a W_z}{\cos\alpha\,(1 + K\,tg\alpha)} = \frac{\sigma_a W_z}{\cos\alpha\,(1+K^2)} = \frac{\sigma_a W_z}{\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}(1+K^2)} = \frac{\sigma_a W_z}{\frac{1+K^2}{\sqrt{1+K^2}}} = \frac{\sigma_a W_z}{\sqrt{1+K^2}}$$

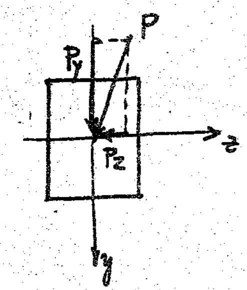
$$M_{min} = \frac{\sigma_a W_z}{\sqrt{1+K^2}} = \frac{\sigma_a W_y \cdot K}{\sqrt{1+K^2}} \qquad (\text{unde } W_z = K W_y)$$

$$M_{min} = P \cdot l$$

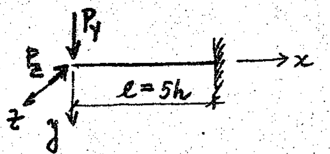
$$P_{min} = \frac{\sigma_a W_z}{l\sqrt{1+K^2}} = \frac{\sigma_a W_y \cdot K}{l\sqrt{1+K^2}}$$

2) Ecuația axei neutre la încovoiere dublă are expresia:

$$tg\beta = tg\alpha\,\frac{I_z}{I_y} = \frac{h}{b}\cdot\frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{hb^3}{12}} = \frac{h^3}{b^3} = K^3$$



3) $P_y = P\cos\alpha$
$P_z = P\sin\alpha$



$$v_0 = \frac{P_y\cdot\ell^3}{3EI_z} = \frac{125\,P\cos\alpha\cdot h^3}{3E\,\frac{bh^3}{12}} = \frac{500\,P\cos\alpha}{Eb}$$

$$w_0 = \frac{-P_z\cdot\ell^3}{3EI_y} = -\frac{125\,P\sin\alpha\,h^3}{3E\,\frac{hb^3}{12}} = \frac{-500\,P\sin\alpha\cdot h^2}{Eb^3}$$

$$f = \sqrt{v_0+w_0} = \frac{500\,P}{Eb}\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cdot\frac{h^2}{b^2}} = \frac{500\,P\cos\alpha}{Eb}\sqrt{1+tg^2\alpha\,\frac{h^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{500\,P\cos\alpha}{Eb}\sqrt{1+\frac{h^4}{b^4}} = \frac{500\,P\cos\alpha}{Eb^3}\sqrt{b^4+h^4}$$

Unghiul pe care săgeata rezultantă "f" îl face cu axa Oz este:

$$tg\gamma = \frac{v_0}{w_0} = \frac{500\,P\cos\alpha}{Eb}\cdot\left(-\frac{Eb^3}{500\,P\sin\alpha\,h^2}\right) = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{b^2}{h^2} =$$

$$= -\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{h^2}{b^2}} = -\frac{1}{\frac{h^3}{b^3}} = -\frac{1}{K^3} = -\frac{1}{tg\beta}$$

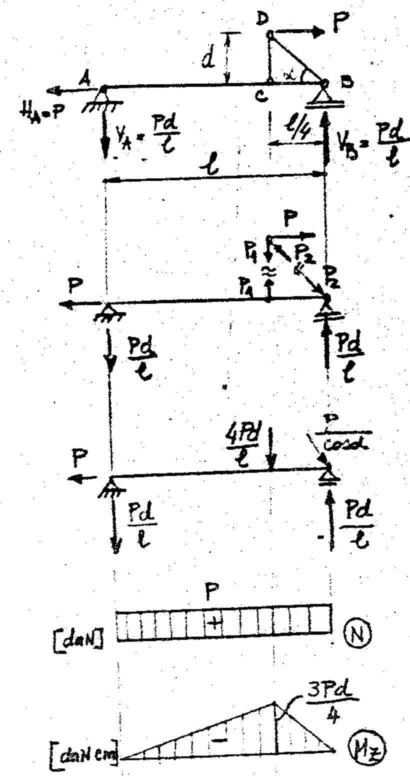
Deci "f" este perpendiculară pe axa neutră.

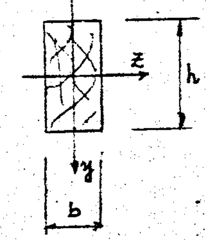
43. 1) Să se determine distanța "d" a forței orizontale P astfel încât în secțiunea cea mai solicitată a grinzii să existe relația:

$|\sigma_{max}\ \text{întindere}| = 1,2\,|\sigma_{max}\ \text{compresiune}|$.

Pentru $\ell = 4\,m$, $b = 15\,cm$, $h = 20\,cm$, $\sigma_a = 100\ daN/cm^2$, să determine P pentru valoarea lui d determinată la punctul 1.

Indicație: toate articulațiile se consideră în axa grinzii.





Rezolvare:

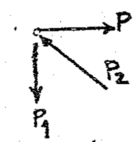
Se calculează reacțiunile:

$\Sigma X = 0 \quad H_A = P$

$\Sigma M_B = 0 \quad P\cdot d - V_A\cdot\ell = 0. \qquad V_A = \frac{Pd}{\ell}$

$\Sigma M_A = 0 \quad Pd - V_B\cdot\ell = 0 \qquad V_B = \frac{P\cdot d}{\ell}$

Secționăm barele articulate, introducem forțele de legătură și studiem echilibrul punctului D.



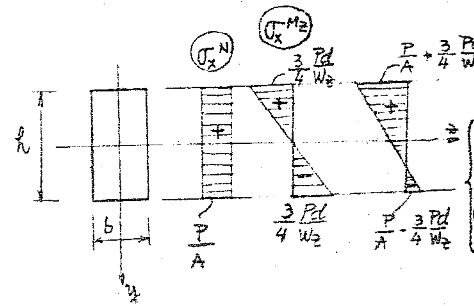
$$tg\alpha = \frac{d}{\frac{\ell}{4}} = \frac{4d}{\ell}$$

$\Sigma X = 0 \quad P - P_2\cos\alpha = 0$

$$P_2 = \frac{P}{\cos\alpha}$$

$\Sigma Y = 0 \quad P_1 - P_2\sin\alpha = 0$

$$P_1 = P\,tg\alpha = P\cdot\frac{4d}{\ell}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x^+ = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{P}{A} + \frac{3}{4}\frac{Pd}{W_z} \\ \sigma_x^- = \frac{P}{A} - \frac{3}{4}\frac{Pd}{W_z} \end{cases}$$

$$|\sigma^{+}_{max}| = 1{,}2\,|\sigma^{-}_{max}|$$

$$\frac{P}{A} + \frac{3}{4}\frac{Pd}{W_z} = 1{,}2\left[-\left(\frac{P}{A} - \frac{3}{4}\frac{Pd}{W_z}\right)\right]$$

$$2{,}2\,\frac{P}{A} = 0{,}15\,\frac{Pd}{W_z}$$

$$d = \frac{2{,}2\,W_z}{0{,}15\,A} = \frac{2{,}2\cdot\frac{bh^2}{6}}{0{,}15\cdot bh} = \frac{2{,}2}{0{,}9}\,h = 2{,}444\,h \qquad d = 48{,}88\ cm$$

2)

$$\sigma_{max} = 100\ daN/cm^2$$

$$\frac{P}{A} + \frac{3}{4}\frac{Pd}{W_z} = 100\ daN/cm^2$$

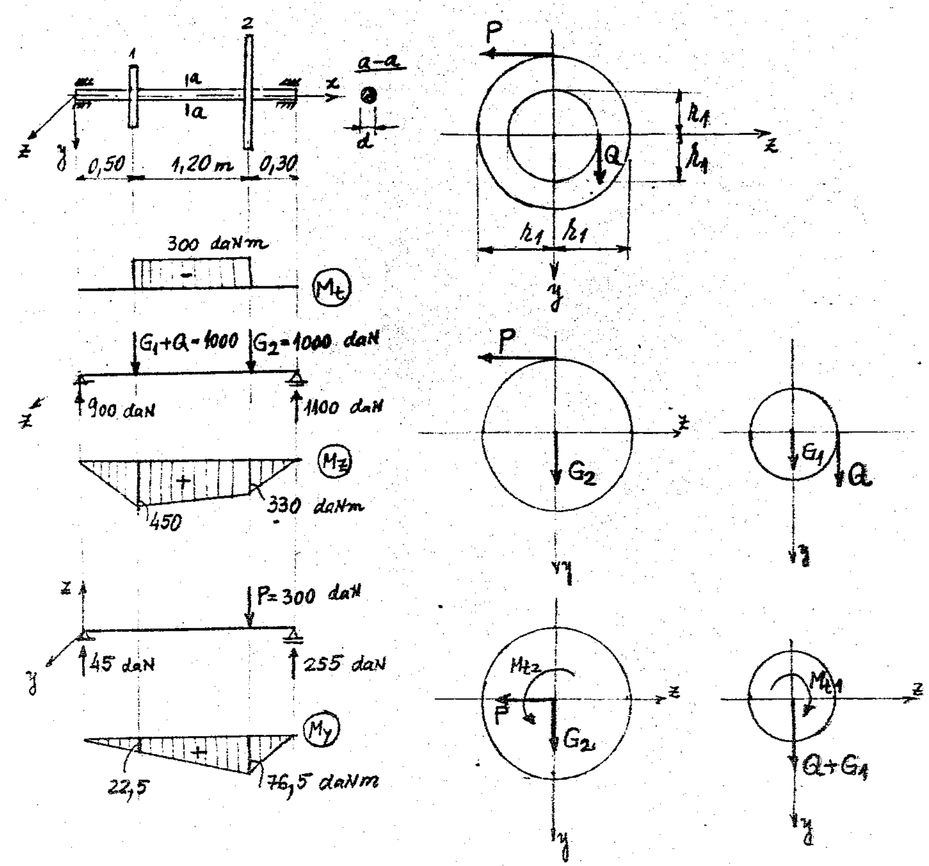
$$\frac{P}{bh} + \frac{3}{4}\cdot\frac{P\cdot 2{,}444\,h}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{P}{bh}(1+4{,}5\cdot 2{,}444) = \frac{12P}{bh} = \frac{12P}{300}\ daN/cm^2$$

$$\frac{12P}{300} = 100\ daN/cm^2$$

$$P = 2500\ daN$$

44. Un arbore circular este supus la torsiune prin acțiunea forței verticale Q aplicată la periferia roții (1), acțiunea forței orizontale P aplicată la periferia roții (2) și a greutăților proprii ale celor două roți $G_1 = 400\ daN$ și $G_2 = 1000\ daN$.
Se cere: dimensionarea arborelui cu teoria a V-a de rezistență și diagramele tensiunilor σ și τ pe secțiunea cea mai solicitată.

$P = 300\ daN$, $r_1 = 0{,}5\ m$, $r_2 = 1\ m$, $\sigma_a = 1600\ daN/cm^2$



Rezolvare:

$$\Sigma M_t = 0 \implies M_{t1} - M_{t2} = 0$$

$$Q r_1 - P r_2 = 0$$

$$Q = \frac{P\cdot r_2}{r_1} = \frac{300\cdot 1}{0{,}5} = 600\ daN$$

Secțiunea periculoasă poate fi în dreptul roții (1) sau (2). Se calculează momentul echivalent în cele două secțiuni și valoarea maximă a acestuia indică secțiunea cea mai solicitată.

$$M_{ech,1} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0{,}75\,M_t^2} = \sqrt{450^2 + 22{,}5^2 + 0{,}75\cdot 300^2} = 520{,}1 \text{ daNm}$$

$$M_{ech,2} = \sqrt{330^2 + 76{,}5^2 + 0{,}75\cdot 300^2} = 426{,}9 \text{ daNm}$$

$$M_{ech\,max} = M_{ech,1} = 520{,}1 \text{ daNm}$$

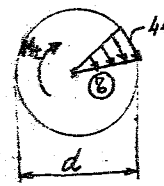
$$W_{z\,nec} = \frac{M_{ech,max}}{\sigma_a} = \frac{520{,}1\cdot 10^2}{1600} = 32{,}5 \text{ cm}^3$$

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = 32{,}5 \text{ cm}^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\cdot 32{,}5}{\pi}} = 6{,}92 \text{ cm} \qquad \boxed{d_{ef} = 7 \text{ cm}}$$

Determinarea tensiunilor τ:

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{300\cdot 10^2}{\frac{\pi\cdot 7^3}{16}} = 445{,}6 \text{ daN/cm}^2$$

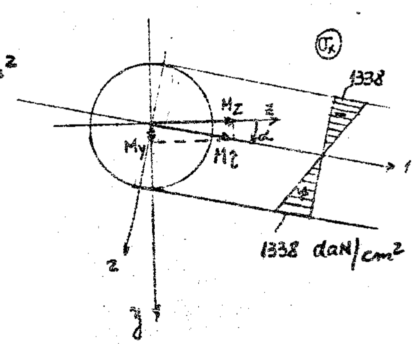


Pentru determinarea tensiunilor σ_x se determină momentul încovoietor rezultant din secțiune $M_i = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ care acționează după o axă principală de inerție. (La secțiunea circulară, oricare două diametre perpendiculare între ele, reprezintă direcții principale de inerție)

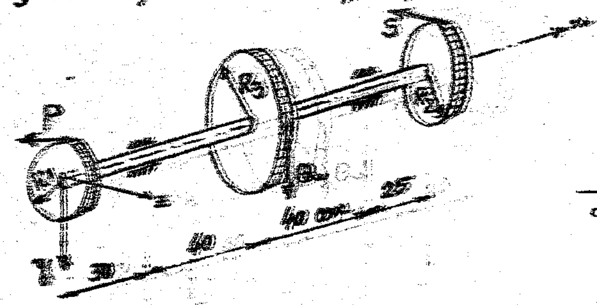
$$M_i = \sqrt{450^2 + 22{,}5^2} \text{ daNm}$$

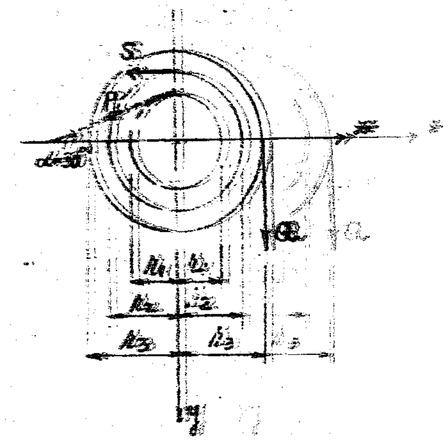
$$\sigma_x = \frac{M_i}{W_z} = \frac{\sqrt{450^2 + 22{,}5^2}\cdot 10^2}{\frac{\pi\cdot 7^3}{32}} = 1338 \text{ daN/cm}^2$$

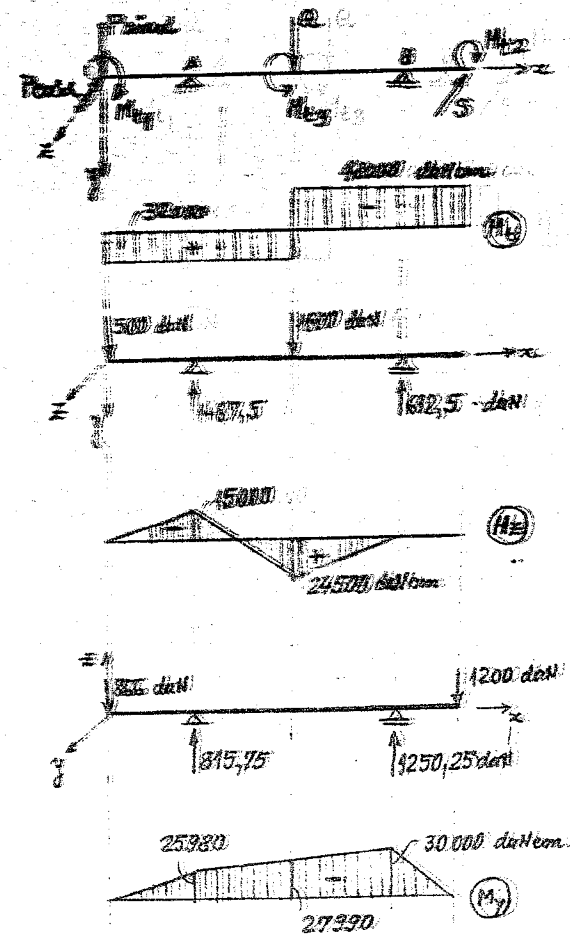
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_y}{M_z} = \frac{22{,}5}{450} = 0{,}02 \rightarrow \alpha = 2{,}86^\circ$$



45. Pentru arborele din figură se cere să se determine R_1, și să se dimensioneze arborele cu secțiune circulară plină, folosind teoria a III-a și a V-a de rezistență și să se compare rezultatele. Se dau: P = 1000 daN, Q = 1500 daN, S = 1200 daN, R_2 = 40 cm, R_3 = 50 cm, σ_a = 450 daN/cm².

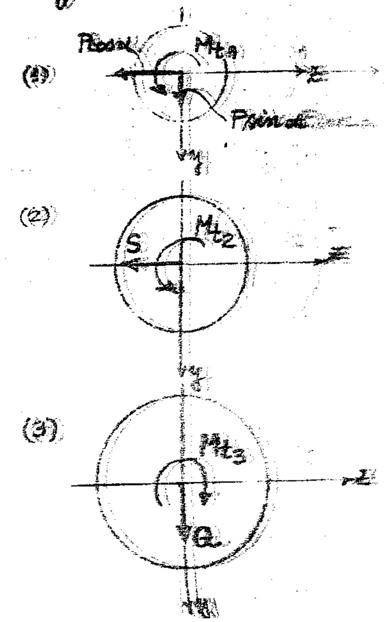






Rezolvare

Pentru fiecare roată se reduc forțele în raport cu centrul de greutate al roții.



$M_{t1} = P\cos\alpha \cdot R_1 = 1000 \cdot \cos 30\, R_1 = 866\, R_1$ daN cm

$M_{t2} = S \cdot R_2 = 1200 \cdot 40 = 48000$ daN cm

$M_{t3} = Q \cdot R_3 = 1600 \cdot 50 = 80000$ daN cm.

Pentru determinarea lui R_1 se pune condiția de echilibru pentru momentele de torsiune:

$$\Sigma M_t = 0 \implies M_{t1} - M_{t3} + M_{t2} = 0$$

$$866 R_1 - 80000 + 48000 = 0$$

$$R_1 = 36{,}95 \text{ cm}$$

Se încarcă arborele pe rînd cu forțele în planul xoy și se trasează diagrama M_z și cu forțele din planul xoz și se trasează diagrama M_y. Diagramele sînt prezentate în figură.

Pentru dimensionarea arborelui se stabilește secțiunea cea mai solicitată, care este în dreptul roții (3), solicitarea fiind încovoiere dublă cu răsucire.

$$M_{ech}^{T\,III} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_t^2} = \sqrt{24500^2 + 27990^2 + 48000^2} = 60726{,}354 \text{ daNcm}$$

$$M_{ech}^{T\,V} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0{,}75 M_t^2} = \sqrt{24500^2 + 27990^2 + 0{,}75 \cdot 48000^2} = 55782{,}525 \text{ daNcm}$$

$$W_i = \frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{M_{ech}}{\sigma_a} \implies d_{nec} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{ech}}{\pi \cdot \sigma_a}}$$

$$d_{nec}^{T\,III} \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{ech}^{T\,III}}{\pi \cdot \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{60726{,}354 \cdot 32}{\pi \cdot 450}} = 11{,}12 \text{ cm}$$

$$d_{nec}^{T\,V} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{ech}^{T\,V}}{\pi\, \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 55782{,}525}{\pi \cdot 450}} = 10{,}81 \text{ cm}$$

Se observă că teoria a III-a de rezistență este mai restrictivă decît teoria a V-a de rezistență.