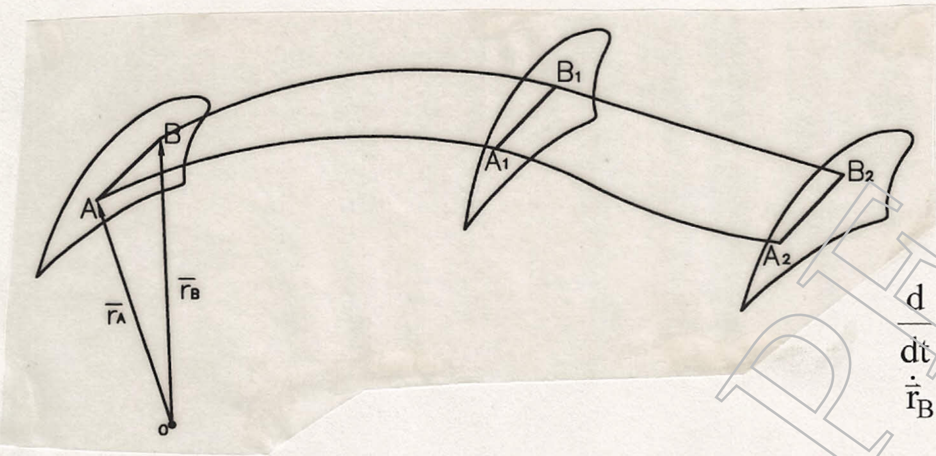
Chapitre 3 – L'ÉTUDE DES MOUVMENTS PARTICULIERS DU SOLIDE

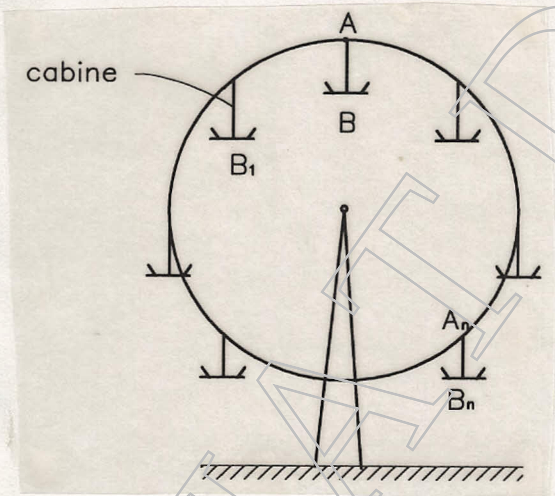
3.1. Translation - C'est le mouvement d'un solide dans lequel toute droite qui lui est liée reste toute le temps parallèle à sa position initiale (fig. 3.1 ; 3.2)



$$\overline{AB} \parallel \overline{A_1B_1} = C$$
$$v_B = v_A + \overline{\omega} \times \overline{AB}$$
$$\dot{\bar{r}}_B - \dot{\bar{r}}_A = \overline{\omega} \times \overline{AB}$$
$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_B - \bar{r}_A) = \frac{d}{dt}(\overline{AB}) = 0$$
$$\dot{\bar{r}}_B - \dot{\bar{r}}_A = 0 \Rightarrow \overline{\omega} = 0$$

Fig. 3.1

Grande roue



$\overline{\omega} = 0$ $\qquad \bar{v}_B = \bar{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AB} \Rightarrow$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A = \bar{v}$$

Les vitesses de tous les points sont égales.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \varepsilon \times \overline{AB} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{AB}) \Rightarrow$$
$$\overline{\omega} = 0 \rightarrow \bar{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = 0$$

$\bar{a}_B = \bar{a}_A$ Les accélérations de tous les points sont égales

Fig. 3.2

$\bar{v}_B = \bar{v}_A$ $\qquad \dfrac{d\bar{r}_B}{dt} = \dfrac{d\bar{r}_A}{dt} \Rightarrow d\bar{r}_B = d\bar{r}_A$

Par intégration on obtient

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{c}$$

A l'instant t=0 $\qquad \bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}$ $\qquad$ d'où résulte que le vecteur $\bar{c} = \overline{AB}$

Dans une translation tous les points d'un solide effectuent des déplacements égaux en intervalles de temps égaux. C'est pourquoi pour l'instant donné, les vitesses et les accélérations de tous des points d'un solide sont les mêmes. Cette circonstance permet de réduire l'étude de la translation d'un solide à celle du mouvement d'un point isolé, c'est-à-dire à la cinématique du point.

Ainsi, la translation d'un solide peut être décrite complètement si on connaît la relation entre le temps et le rayon vecteur $\bar{r}(t)$ d'un point de ce solide, et la position et la vitesse de ce dernier à l'instant initial.

3.2 Rotation autour d'un axe fixe

C'est le mouvement dans lequel deux points du solide ont tout le temps la vitesse égale à zéro.

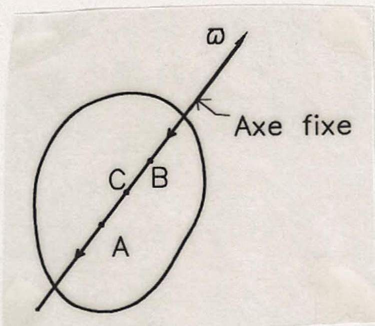


Fig. 3.3

On sait que $v_A = 0$ $v_B = 0$ (fig. 3.3)

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}$$

$$0 = 0 + \bar{\omega} \times \overline{AB}$$

d'où résulte que $\bar{\omega} // \overline{AB}$

On considère un point C, situé sur la droite AB.

Sa vitesse vaut.

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AC} \quad \bar{v}_A = 0 \quad \bar{\omega} // \overline{AC}$$

donc $\bar{v}_C = 0$

Tous les points du corps situés sur la droite AB ont la vitesse égale à zéro. Le corps tourne autour de l'axe fixe AB.

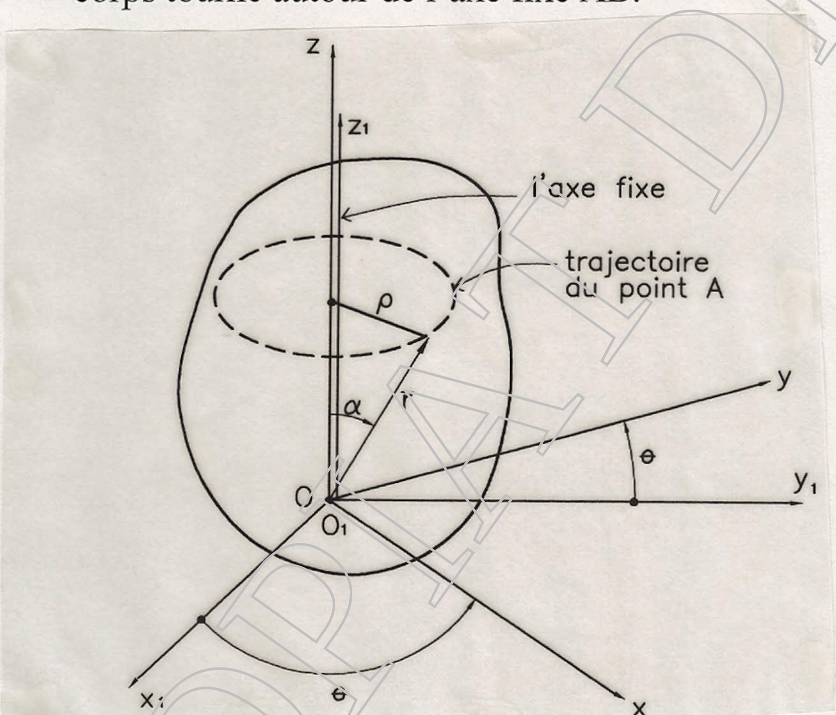


Fig. 3.4

Pour l'étude du mouvement on utilise deux systèmes de référence (fig. 3.4).

a) Référentiel fixe, $O_1x_1y_1z_1$ dont le verseurs sont $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$ et l'axe O_1z_1coïncident avec l'axe de rotation.

b) Référentiel lié au corps Oxyz dont les verseurs sont $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ et $O \cong O_1$; $OZ \cong O_1Z_1$ (fig. 3.4)

On peut écrire

$$\bar{\omega} = \omega(t)\bar{k} \qquad (3.1)$$

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega}\bar{k} = \varepsilon\bar{k} \qquad (3.2)$$

Trajectoire

Soit le point A dont les coordonnées sont x, y, z

Le rayon – vecteur $\bar{r}$ à comme l'expression

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \qquad (3.3)$$

ou x, y, z sont constantes.

Pour trouver la trajectoire du point A on exprime ses coordonnées en fonction de l'angle θ

$$x_1 = \rho\cos\theta \; ; \quad y_1 = \rho\sin\theta \; ; \qquad z_1 = z \qquad (3.4)$$

$$\text{ou} \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3.5)$$

En éliminant l'angle θ de l'expression (3.4) on obtient

$$x_1^2 + y_1^2 = \rho^2 \qquad z_1 = z$$

C'est–à–dire que la trajectoire d'un point du corps est circulaire, située dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation dont le rayon $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ représente la distance du point par rapport à l'axe de rotation.

Champ de vitesses

On applique la relation générale (2.13) dans laquelle on introduit (3.1) et (3.3)

$$\bar{v}_A = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = 0 + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\bar{v}_A = (-\omega y)\bar{i} + (\omega x)\bar{j} \qquad (3.6)$$

Donc

$$v_x = -\omega y \; ; \qquad v_y = \omega x \qquad (3.7)$$

Le module de la vitesse d'un point s'écrit

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega\sqrt{y^2 + x^2} = \omega\rho \qquad (3.8)$$

La vitesse est dirigée suivant la tangente à la trajectoire (fig. 3.5)

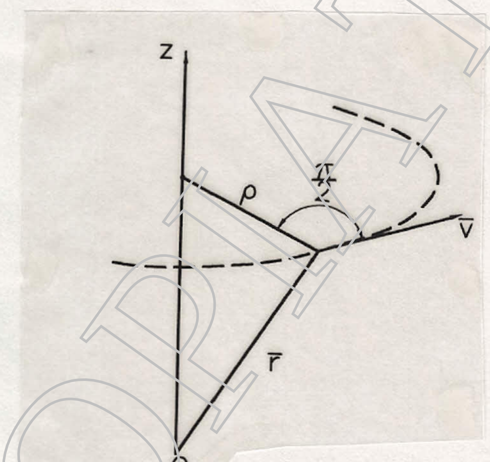


Fig. 3.5

Tous les points situés sur une droite parallèle à l'axe OZ ont la même vitesse. On peut représenter la distribution de vitesses par les projections v_s et v_{ie} (3.7) comme on montre sur la fig. 3.6.