

2.

SYSTEMES DE FORCES

2.1 LA FORCE

L'état d'équilibre ou de mouvement d'un corps dépend du caractère des interactions de ce corps avec d'autres corps, c'est-à-dire des pressions, des attractions ou des répulsions qu'il éprouve à la suite de ces actions réciproques.

La grandeur qui mesure - du point de vue quantitative - l'action mécanique réciproque des corps matériels est appelée en Mécanique "force".

Les grandeurs, qu'on est amené à considérer en Mécanique peuvent être divisées en deux catégories: grandeurs scalaires qui sont complètement caractérisées par leur valeur numérique et grandeurs vectorielles qui, outre leur valeur numérique, sont encore caractérisées par leur direction, par leur sens dans l'espace et par leur point d'application.

La force est une grandeur vectorielle, caractérisée par les éléments suivants :

- la valeur numérique (l'intensité ou le module) ; pour déterminer le module de la force on compare sa grandeur à celle d'une force prise pour unité ; cette unité est le Newton ;
- la direction, donnée par le verseur (un vecteur ayant le module égal à l'unité) ;
- le sens ;
- le point d'application.

Graphiquement, la force est représentée, fig. 2.1, par un segment de droite orientée et on peut écrire:

$$\vec{F} = |\vec{F}| \vec{u} \quad (2.1)$$

où $|\vec{F}|$ est le module de la force
 \vec{u} est le verseur

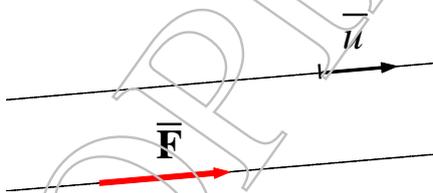


Fig. 2.1

2.1.1. Les systèmes de références

La position d'un point matériel, d'un corps ou d'un système de points et/ou de corps, dans l'espace ne peut être définie que par rapport à d'autres corps.

Un corps qui sert à repérer la position du corps envisagé s'appelle *repère*.

Pour décrire un mouvement, on associe au repère un système de référence (ou système de coordonnées) quelconque. Les coordonnées permettent de définir la position d'un point, d'un corps, d'un système de points et/ou de corps, dans l'espace.

2.1.1.1 *Système de coordonnées cartésiennes droit.*

Le plus utilisé système de référence dans la Mécanique théorique est le système de coordonnées cartésiennes, droit. Ce système a des axes perpendiculaires. Les axes sont définis par les verseurs \bar{i} pour Ox, \bar{j} pour Oy et \bar{k} pour Oz, fig. 2.2.a.

Un système est appelé système droit si la rotation la plus courte, vue depuis l'extrémité positive de Oz, amenant Ox en coïncidence avec Oy, s'effectue dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

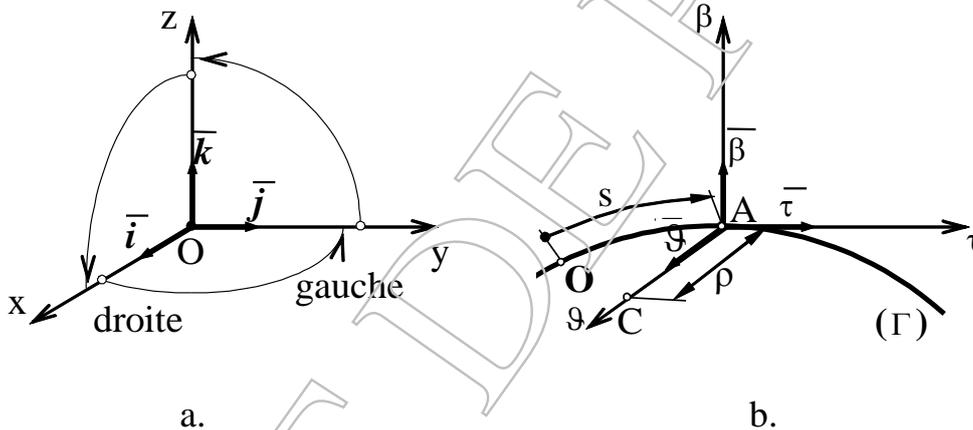


Fig. 2.2

2.1.1.2 *Système de coordonnées FRENET*

Ce système, fig. 2.2.b, est appliqué lorsque la trajectoire est comme à l'avance. La position du point A est déterminée par la coordonnée curviligne « s » qu'est la distance le long de la trajectoire (courbe) de l'origine O jusqu'à le point. Les axes sont :

- l'axe tangent, de verseur $\bar{\tau}$;
- l'axe normal principal, de verseur $\bar{\nu}$, dirigé vers le centre de courbure;
- l'axe binormal, de verseur $\bar{\beta}$, qui est normale sur les autres.

La grandeur ρ est le rayon de courbure du point A.

2.1.2 **La projection d'une force sur un axe**

La projection d'une force sur un axe est la grandeur scalaire égale avec le produit scalaire entre le vecteur force et le verseur de l'axe, fig. 2.3.

Sois une force \vec{F} et un axe caractérisé par le vecteur \vec{u} :

$$F_u = \vec{F} \cdot \vec{u} = F \cdot u \cdot \cos(\vec{F}, \vec{u}) = F \cdot 1 \cdot \cos(\vec{F}, \vec{u}) = F \cdot \cos(\vec{F}, \vec{u}) \quad (2.2)$$

Il en résulte de cette définition que les projections d'une force donnée sur des axes quelconques, mais parallèles et de même sens sont égales entre elles. Cette remarque facilitera le calcul de la projection d'une force sur un axe non coplanaire avec la force.

La projection de la force \vec{F} sur l'axe sera désignée par le symbole F_u . Ainsi, pour les forces représentées sur la figure 2.3, nous aurons :

$$\begin{aligned} F_u &= F \cdot \cos \alpha \\ Q_u &= Q \cos \beta = - Q \cos \gamma \end{aligned} \quad (2.3)$$

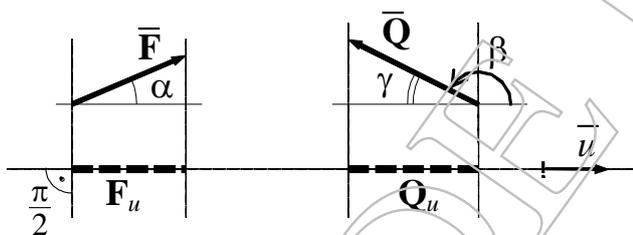


Fig. 2.3

On voit sur le dessin, fig. 2.3, que la projection d'une force sur un axe est égale à la longueur du segment compris entre les projections de ses extrémités, longueur prise avec le signe positif ou négatif.

2.1.3. Le théorème des projections

La projection de la résultante d'un système de forces concourantes sur un axe Δ quelconque, de vecteur \vec{u} , est égale à la somme algébrique des projections des forces sur le même axe, fig. 2.4.

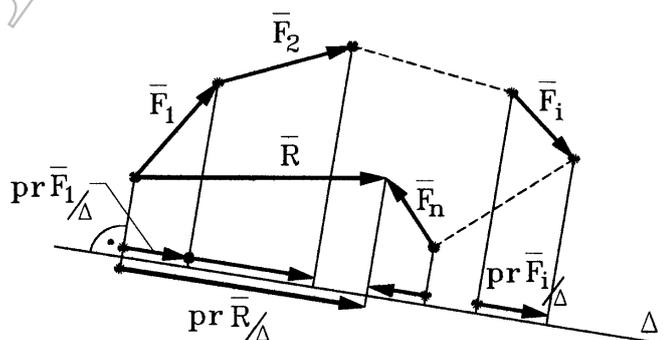


Fig. 2.4

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i + \dots + \vec{F}_n \parallel \vec{u}$$

$$\begin{aligned} \bar{R} \cdot \bar{u} &= \bar{F}_1 \cdot \bar{u} + \bar{F}_2 \cdot \bar{u} + \dots + \bar{F}_i \cdot \bar{u} + \dots + \bar{F}_n \cdot \bar{u} \\ \text{pr}\bar{R}/\Delta &= \text{pr}\bar{F}_1/\Delta + \text{pr}\bar{F}_2/\Delta + \dots + \text{pr}\bar{F}_i/\Delta + \dots + \text{pr}\bar{F}_n/\Delta \end{aligned}$$

2.1.4. L'expression analytique de la force

Pour se donner une force sous forme analytique il est nécessaire de choisir un système d'axes de coordonnées Oxyz, par rapport auquel seront déterminés la direction et le sens de la force dans l'espace.

Si l'on connaît le module $|\bar{F}| = F$ d'une force et les angles α, β, γ , que la direction de la force forme avec les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, les projections X, Y, Z, (ou F_x, F_y, F_z), de la force sur les axes sont connues, fig.

2.5. Effectivement, de la formule (2.3) il en résulte que:

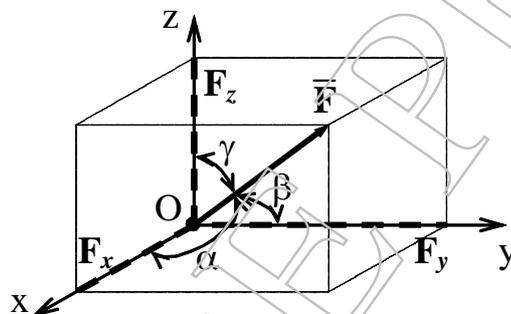


Fig. 2.5

$$\begin{aligned} X &= F \cdot \cos(\bar{F}, o\bar{x}) = F \cos \alpha \\ Y &= F \cdot \cos(\bar{F}, o\bar{y}) = F \cos \beta \\ Z &= F \cdot \cos(\bar{F}, o\bar{z}) = F \cos \gamma \end{aligned} \tag{2.4}$$

Si on décompose la force \bar{F} suivant les directions des axes, les composantes obtenues $(X\bar{i}), (Y\bar{j}), (Z\bar{k})$ seront numériquement égales aux projections de la force sur ces axes. Donc, si les projections de la force sur les axes de coordonnées sont connues, le vecteur de la force peut être construit géométriquement selon la règle du parallélépipède, fig. 2.5. En conclusion, chaque force peut être exprimée du point de vue analytique de la manière suivante:

$$\bar{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} \tag{2.5}$$

REMARQUE:

Il faut observer que si on connaît l'expression analytique (2.5) d'une force, on peut déterminer seulement le module de la force, sa direction et son sens par les relations suivantes :

$$|\vec{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{2.6}$$

$$\cos(\vec{F}, ox) = \frac{X}{|\vec{F}|} ; \cos(\vec{F}, oy) = \frac{Y}{|\vec{F}|} ; \cos(\vec{F}, oz) = \frac{Z}{|\vec{F}|} \tag{2.7}$$

L'expression analytique (2.5) de la force ne donne pas des précisions en ce qui concerne la droite - support du vecteur force.

2.1.5. Les opérations élémentaires d'équivalence en Mécanique

On démontre tous les théorèmes et toutes les équations de la Statique à partir de plusieurs affirmations initiales qu'on accepte sans démonstration mathématique et qu'on appelle axiomes (ou **opérations élémentaires d'équivalence**) en Mécanique. Les axiomes de la Mécanique sont le résultat des généralisations de nombreuses expériences et observations sur l'équilibre et sur le mouvement des corps, généralisations maintes fois confirmées par la pratique.

Les opérations élémentaires d'équivalence sont des conséquences des lois fondamentales en Mécanique et du modèle de solide parfait.

OPERATION 1. Un système de forces concourantes est équivalent avec leur résultante.

OPERATION 2. Une force peut être remplacée par ses composantes

OPERATION 3. Si deux forces agissent sur un corps solide parfait, celui-ci ne peut se trouver en équilibre que dans le cas où ces deux forces sont de même intensité ($|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}|$), de sens opposés et ayant la même droite – support, fig. 2.6.a.

L'opération 3 définit le plus simple des systèmes de forces équilibrées qui est un système de forces équivalent à zéro, car l'expérience montre qu'un corps libre sur lequel agit une force unique, ne peut pas se trouver en équilibre.

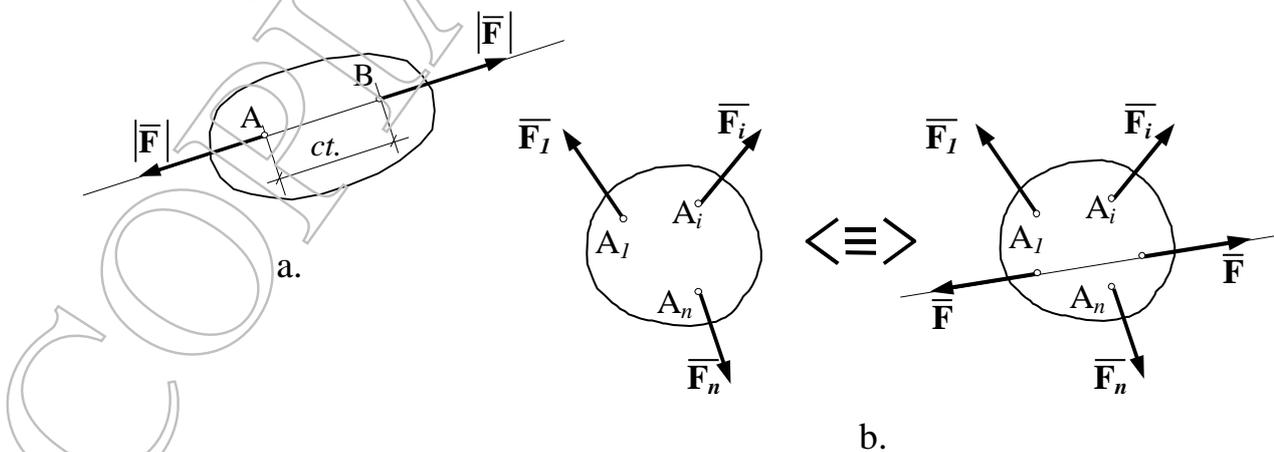


Fig. 2.6

CONCLUSION : L'action d'un système de forces sur un corps solide parfait ne changera pas, si l'on ajoute à ce système un système équilibré, fig. 2.6.b.
 La conclusion définit le fait que deux systèmes de forces qui diffèrent l'un à l'autre par un système équilibré sont équivalents.

OPERATION 4 : Une force qui agit sur un corps parfait peut changer le point d'application dans un autre point situé sur la droite-support de la force sans modifier l'état du corps.

2.1.6. La force - vecteur glissant

L'effet mécanique d'une force qui agit sur un corps solide parfait sera le même si la position du point d'application de la force change dans un autre point situé sur la droite-support du vecteur force.

Effectivement, soit une force \vec{F} , fig. 2.7, agissant sur un corps solide parfait et appliquée au point A

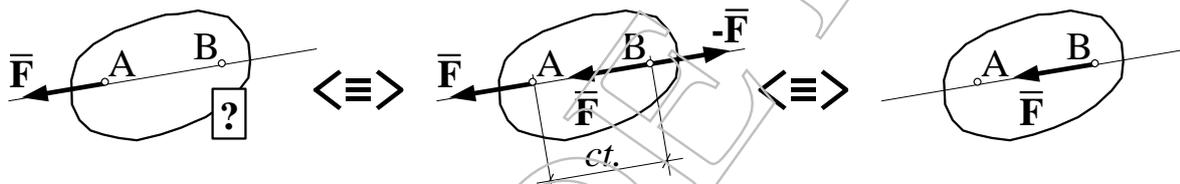


Fig. 2.7

Prenons sur la droite-support de la force un point arbitraire B et appliquons en ce point deux forces égales et de sens contraire \vec{F} et $-\vec{F}$. Cela ne change pas l'effet mécanique de la force \vec{F} sur le corps. Mais la distance entre A et B reste toujours constante (solide parfait), donc les forces \vec{F} du point A et $-\vec{F}$ du point B, selon l'axiome 3, forment un système de forces équivalent à zéro. En définitive, sur le corps n'agira que la force \vec{F} , mais appliquée au point B.

Ainsi, le vecteur qui représente la force \vec{F} peut être considéré comme appliqué en un point quelconque de la droite - support de la force. **Donc, la force agissant sur un solide parfait est un vecteur glissant.**

** Les paramètres scalaires indépendants nécessaires pour définir la force sont en nombre de 5:

- le module $|\vec{F}|$,
- la direction $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, (mais de ces trois valeurs seulement deux sont indépendantes)
- les coordonnées x, y du point A ou la droite - support de la force coupe le plan xOy, fig. 2.8.

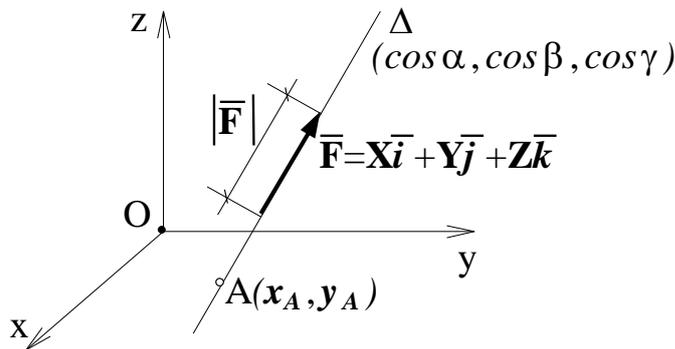


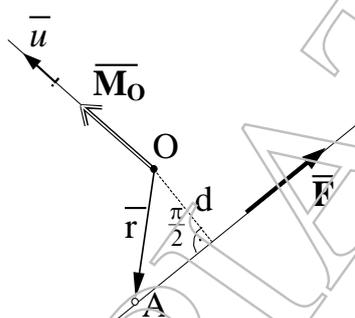
Fig. 2.8

Les projections X, Y, Z de la force sont donc nécessaires, mais pas suffisantes pour définir la force comme vecteur glissant. Il faut introduire une autre notion, celle du moment de la force par rapport à un point.

2.2

LE MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT À UN POINT

Le moment d'une force \vec{F} par rapport à un point O est égal au produit vectoriel d'un vecteur \vec{r} qui joigne le centre O à un point quelconque A de la droite - support, par la force elle-même.



Le moment \vec{M}_O d'une force par rapport au point O, fig. 2.9, est un vecteur ayant toutes les propriétés d'un produit vectoriel

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.8)$$

$$\vec{M}_O = (|\vec{r}||\vec{F}| \sin(\vec{r}, \vec{F})) \cdot \vec{u} = (d \cdot F) \cdot \vec{u} \quad (2.9)$$

$$|\vec{M}_O| = d \cdot F$$

Fig. 2.9

Le vecteur \vec{M}_O est appliqué au centre O, a le module égal au produit de la distance d par le module de la force F, la direction perpendiculaire au plan OAB et le sens d'après la règle de la main droite (le vecteur \vec{M}_O est dirigé du côté depuis lequel on voit la rotation de la force autour du point O s'effectuer dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre). La dimension de cette grandeur physique est: $(L \times MLT^{-2}) = ML^2 T^{-2}$.

L'unité de mesure du moment d'une force est le newton x mètre (N x m ou daN x m, etc.).

Propriétés :

(1) Le moment d'une force par rapport à un point est nul si le point se trouve sur la droite - support de la force, fig. 2.10.

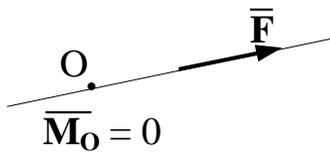


Fig. 2.10

(2) La relation (2.8) qui définit le moment d'une force par rapport à un point O contient un vecteur \vec{r} qui lie le point O avec un point quelconque A situé sur la droite - support de la force. Pour prouver que le vecteur moment reste le même, indifféremment de la position du point sur la droite - support de la force on va choisir deux points situés sur cette droite support : le point A (vecteur de position \vec{r}) et le point B (vecteur de position \vec{r}_1). Entre ces deux vecteurs, fig. 2.11, existe la relation évidente :

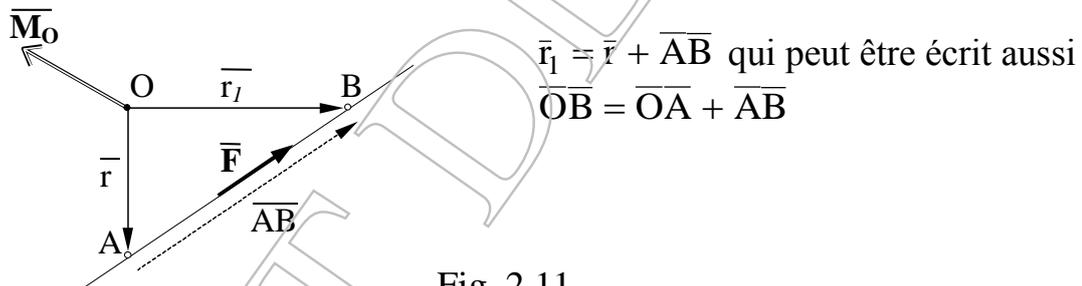


Fig. 2.11

Le moment de la force \vec{F} par rapport au point O est :

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} = (\vec{OB} - \vec{AB}) \times \vec{F} = \vec{OB} \times \vec{F} - \underbrace{\vec{AB} \times \vec{F}}_{=0} = \vec{OB} \times \vec{F}$$

(le produit vectoriel $\vec{AB} \times \vec{F}$ est égal à zéro, car les vecteurs sont colinéaires).

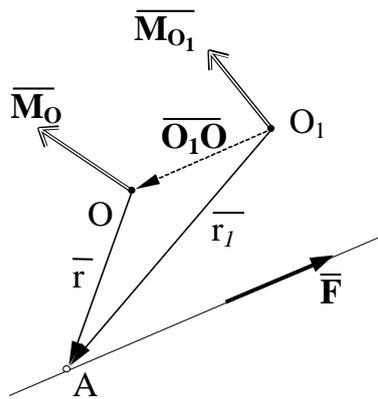
La loi de la variation du moment

Si le point par rapport duquel on détermine le moment change de position, le moment d'une force varie. Pour établir cette loi de variation on considère un autre point O_1 , fig. 2.12.

Le moment de la force par rapport à ce nouveau point est :

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{O_1A} \times \vec{F} = (\vec{O_1O} + \vec{OA}) \times \vec{F} = \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{O_1O} \times \vec{F} = \vec{M}_O + \vec{O_1O} \times \vec{F}$$

où $\vec{O_1A} = \vec{O_1O} + \vec{OA}$



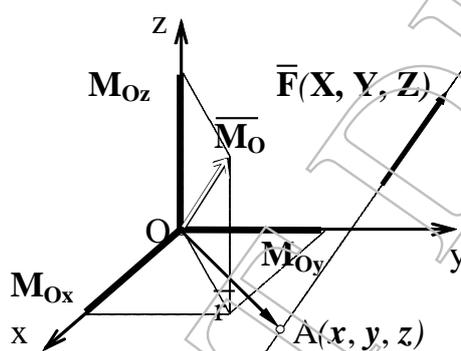
Le produit vectoriel $\overline{OA} \times \overline{F}$ représente le moment \overline{M}_O . On obtient la loi pour la variation du moment de la force avec la variation du point par rapport duquel il est calculé

$$\overline{M}_{O1} = \overline{M}_O + \overline{O1O} \times \overline{F} \quad (2.11)$$

Fig. 2.12

L'expression analytique du vecteur moment

Considérons connues les expressions analytiques des vecteurs \overline{OA} et \overline{F} , fig. 2.13 :



$$\overline{OA} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$\overline{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$$

Fig. 2.13

On obtient

$$\overline{M}_O = \overline{OA} \times \overline{F} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{bmatrix} = \bar{i}(yZ - zY) - \bar{j}(xZ - zX) + \bar{k}(xY - yX)$$

$$\begin{cases} M_{Ox} = yZ - zY \\ M_{Oy} = -xZ + zX \\ M_{Oz} = xY - yX \end{cases}$$

(2.12)

où : X, Y, Z représentent les projections de la force suivant les axes du système de référence

x, y, z, les coordonnées d'un point A situé sur la droite - support de la force, par rapport au même système de référence.

Il faut observer que M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} représentent les projections sur les axes Ox, Oy, Oz du moment de la force calculé par rapport au point O , point qui appartient à tous ces trois axes.

APPLICATION 2.1. :

Déterminer le moment de la force \vec{F} par rapport au point O , fig. A.2.1.

Déterminer le moment de force par rapport aux points A, B et C .

Le module de la force est $|\vec{F}| = F\sqrt{14}$

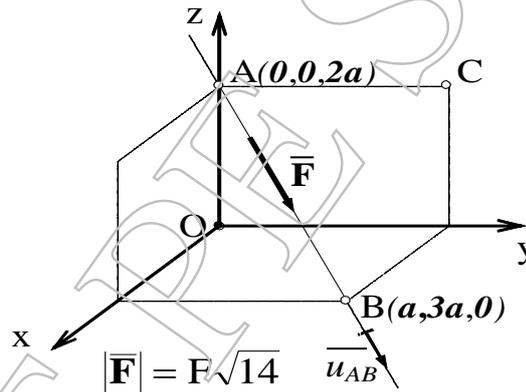


Fig. A.2.1

Solution :

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} =$$

$$\frac{(a - 0)\vec{i} + (3a - 0)\vec{j} + (0 - 2a)\vec{k}}{\sqrt{(a - 0)^2 + (3a - 0)^2 + (0 - 2a)^2}} = \frac{a\vec{i} + 3a\vec{j} + (-2a)\vec{k}}{\sqrt{14a^2}} = \frac{1\vec{i} + 3\vec{j} + (-2)\vec{k}}{\sqrt{14}}$$

$$\vec{F} = |\vec{F}| \vec{u}_{AB} = F\sqrt{14} \frac{1\vec{i} + 3\vec{j} + (-2)\vec{k}}{\sqrt{14}} = F\vec{i} + 3F\vec{j} - 2F\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2a \\ F & 3F & -2F \end{vmatrix} = -6Fa\vec{i} + 2Fa\vec{j} + 0\vec{k}$$

$\vec{M}_A = \vec{M}_B = 0$ parce que les points A et B sont situés sur la droite-support de la force \vec{F}

$$\vec{M}_C = \vec{M}_O + \vec{CO} \times \vec{F} = -6Fa\vec{i} + 2Fa\vec{j} + 0\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3a & -2a \\ F & 3F & -2F \end{vmatrix} =$$

$$= 6Fa\vec{i} + 0\vec{j} + 3Fa\vec{k}$$

ou

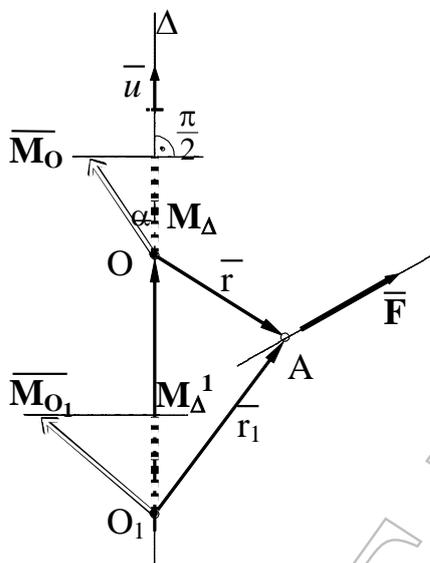
$$\bar{M}_C = \bar{CA} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -3a & 0 \\ F & 3F & -2F \end{vmatrix} = 6Fa\bar{i} + 0\bar{j} + 3Fa\bar{k}$$

2.3

LE MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT À UN AXE

Soit un axe (du vecteur \bar{u}) et une force \bar{F} , fig. 2.14.

Le moment de la force par rapport à un axe est la projection sur cet axe du moment de la force calculé par rapport à un point quelconque de l'axe.



$$M_\Delta = \bar{M}_O \cdot \bar{u} = (\bar{OA} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} \quad (2.13)$$

Donc, le moment d'une force par rapport à un axe est une grandeur scalaire exprimée par le produit mixte des vecteurs \bar{OA} , \bar{F} et \bar{u} .

Dans cette définition on n'a pas précisé la position du point O donc, il faut prouver que le point O peut être un point quelconque de cet axe. On va considérer O et O₁ ces deux points et calculer les moments \bar{M}_O et \bar{M}_{O_1}

Fig. 2.14

$$M_\Delta = (\bar{OA} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} ; M_\Delta^1 = (\bar{O_1A} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} ; \bar{O_1A} = \bar{O_1O} + \bar{OA}$$

Il en résulte:

$$M_\Delta^1 = [(\bar{O_1O} + \bar{OA}) \times \bar{F}] \cdot \bar{u} = \underbrace{(\bar{O_1O} \times \bar{F}) \cdot \bar{u}}_{=0} + (\bar{OA} \times \bar{F}) \cdot \bar{u} = M_\Delta$$

parce que le produit mixte $((\bar{O_1O} \times \bar{F}) \cdot \bar{u})$ est égal à zéro (les vecteurs $(\bar{O_1O})$ et \bar{u} sont colinéaires).

Le moment de la force par rapport à un axe est égal à zéro si la droite - support de la force et l'axe se trouve dans un même plan (le produit mixte est nul si deux vecteurs se trouvent dans le même plan) - si la force \bar{F} est parallèle ou entrecroise l'axe, fig. 2.15.

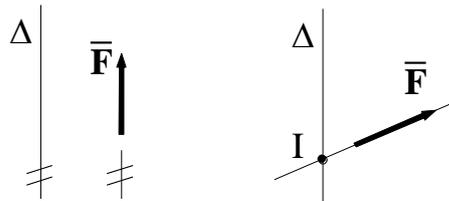


Fig. 2.15

REMARQUE :

(1) Pour résoudre les problèmes de la Statique dans le cas d'un système arbitraire de forces, il est nécessaire d'utiliser la propriété suivante du moment de la force par rapport à un axe:

le moment d'une force par rapport à un axe est la grandeur algébrique égale au module du moment de la composante de la force dans un plan perpendiculaire à l'axe, calculé par rapport au point où l'axe entrecroise le plan, fig. 2.16.

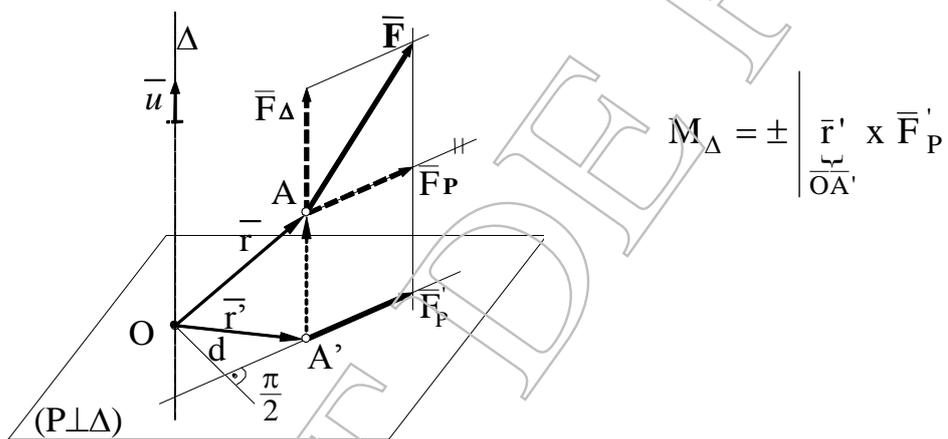


Fig. 2.16

Pour prouver cette propriété on prend deux composantes de la force \vec{F} :

- \vec{F}_P la composante parallèle au plan P (plan qui est perpendiculaire à l'axe) ;
- et \vec{F}_Δ la composante parallèle à l'axe. On peut écrire les relations suivantes :

$$\vec{F} = \vec{F}_\Delta + \vec{F}_P \quad ; \quad \vec{r} = \vec{r}' + \vec{A'A} \text{ ou } \vec{OA} = \vec{OA'} + \vec{A'A}$$

Observation : $\vec{F}'_P = \vec{F}_P$ est la composante dans le plan P

Il en résulte:

$$\begin{aligned} M_\Delta &= (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} = [(\vec{r}' + \vec{A'A}) \times (\vec{F}_\Delta + \vec{F}_P)] \cdot \vec{u} = \\ &= \underbrace{(\vec{r}' \times \vec{F}_\Delta)}_{=0} \cdot \vec{u} + (\vec{r}' \times \vec{F}_P) \cdot \vec{u} + \underbrace{(\vec{A'A} \times \vec{F}_\Delta)}_{=0} \cdot \vec{u} + \underbrace{(\vec{A'A} \times \vec{F}_P)}_{=0} \cdot \vec{u} = \\ &= (\vec{r}' \times \vec{F}_P) \cdot \vec{u} = (\vec{r}' \times \vec{F}'_P) \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

Trois termes de cette somme sont égaux à zéro (produits mixtes avec deux vecteurs colinéaires).

On peut écrire :
$$M_{\Delta} = (\vec{r}' \times \vec{F}'_P) \cdot \vec{u} = \pm |\vec{r}' \times \vec{F}'_P| \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = \pm d |\vec{F}'_P|$$

(2) Entre le moment de la force par rapport à un point O et les moments de la même force par rapport à trois axes rectangulaires, concourants en O il en existe une relation évidente car le moment de la force par rapport au point O est le vecteur :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = M_{Ox} \vec{i} + M_{Oy} \vec{j} + M_{Oz} \vec{k}$$

où M_{Ox} , M_{Oy} , M_{Oz} , sont les projections sur les axes du moment de la force calculé par rapport au point O, point qui appartient à tous les trois axes. Donc M_{Ox} , M_{Oy} , M_{Oz} , représentent les moments de la force par rapport aux axes Ox, Oy et Oz, fig. 2.17.

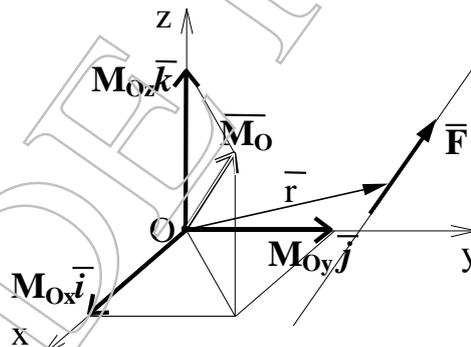


Fig. 2.17

APPLICATION 2.2. :

Déterminer le moment des forces par rapport au point O en calculant les composantes du moment par rapport des axes Ox, Oy, Oz, fig. A.2.2.

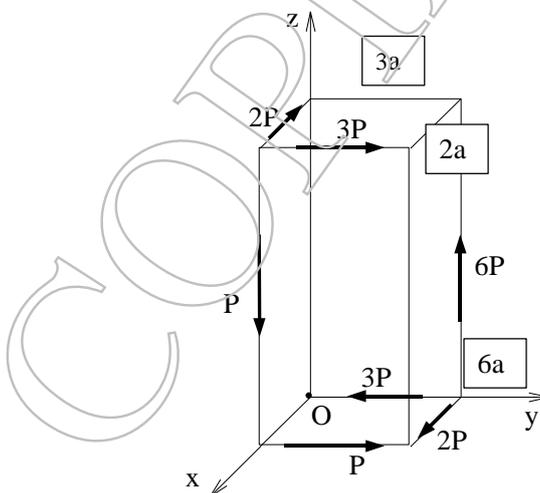


Fig. A.2.2

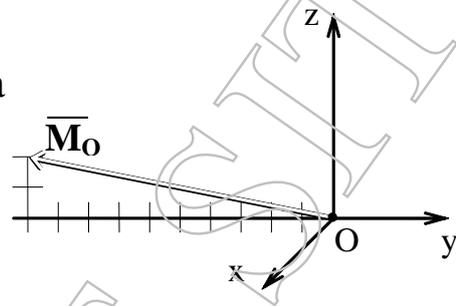
Solution :

$$M_{Ox} = -3P \cdot 6a + 6P \cdot 3a = 0$$

$$M_{Oy} = -2P \cdot 6a + P \cdot 2a = -10Pa$$

$$M_{Oz} = +3P \cdot 2a + P \cdot 2a - 2P \cdot 3a = 2Pa$$

$$\bar{M}_O = 0\bar{i} - 10Pa\bar{j} + 2Pa\bar{k}$$



APPLICATION 2.3. :

Déterminer le moment des forces par rapport au point O en calculant les composantes du moment par rapport des axes Ox, Oy, Oz, fig. A.2.3.

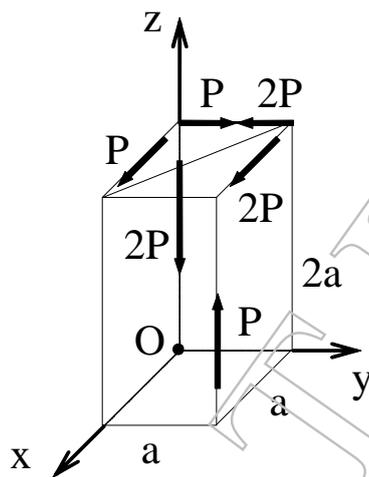


Fig. A.2.3

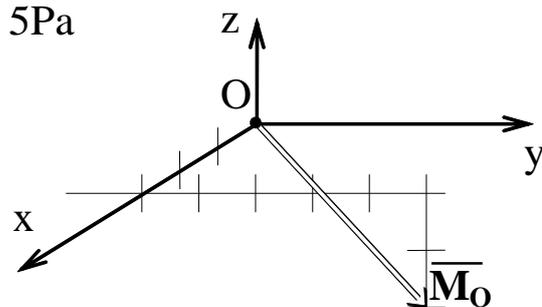
Solution :

$$M_{Ox} = -P \cdot 2a + 2P \cdot 2a + P \cdot a = 3Pa$$

$$M_{Oy} = -P \cdot a + P \cdot 2a + 2P \cdot 2a = 5Pa$$

$$M_{Oz} = -2P \cdot a = -2Pa$$

$$\bar{M}_O = 3Pa\bar{i} + 5Pa\bar{j} - 2Pa\bar{k}$$



2.4 COUPLES DE FORCES

Un système de deux forces parallèles, de même module, de sens contraire agissant sur un corps solide parfait est appelé COUPLE DE FORCES, fig. 2.18.

Soit \vec{F} et, $-\vec{F}$ un couple situé dans un plan P. Ce système de forces a la résultante égale à zéro mais, évidemment, ce système n'est pas en équilibre (voir l'opération 3). L'action d'un couple de forces sur un solide se réduit à un certain effet de rotation qui dépend du moment résultant de ce système de forces, moment qui n'est pas égal à zéro.

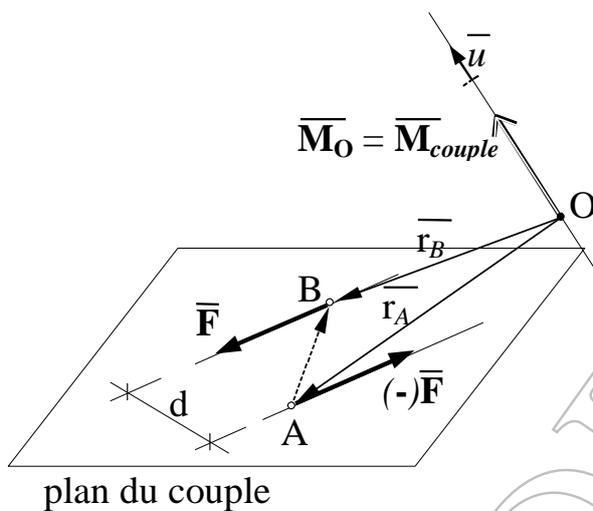


Fig. 2.18

Le moment du couple par rapport à un point quelconque O est :

$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times (-\vec{F}) + \vec{r}_B \times (\vec{F}) = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F}$$

On observe que le moment d'un couple ne dépend pas de la position du point O, **donc le moment d'un couple est un vecteur libre.**

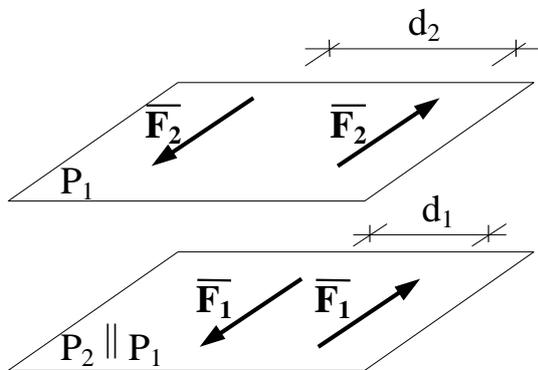
Le module $|\vec{M}_O| = |\vec{AB}| |\vec{F}| \sin(\vec{AB}, \vec{F}) = d \cdot F$

Si \vec{u} est le vecteur normal sur le plan du couple, on peut écrire :

$$\vec{M}_O = d \cdot F \cdot \vec{u} \tag{2.15}$$

Ce vecteur a le module égal au produit de l'intensité d'une de ses forces par la distance d entre les droites - supports, la direction perpendiculaire au plan d'action du couple et le sens tel que la rotation du couple, vue depuis l'extrémité du vecteur, s'effectue dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre (le sens trigonométrique). On rappelle que le point d'application peut être un point quelconque de l'espace.

Deux couples de forces sont équivalents s'ils ont le même vecteur moment, fig. 2.19 (le vecteur moment est un vecteur libre donc deux couples équivalents se trouvent dans le même plan ou dans des plans parallèles).



$$\vec{M}_{c1} = \vec{M}_{c2} \quad F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$$

le même direction et sens

Fig. 2.19

2.5

LA REDUCTION D'UN SYSTEME DE FORCES PAR RAPPORT À UN POINT. TORSEUR

SYSTEMES DE FORCES EQUIVALENTES

Soit un système quelconque de forces agissant sur un corps matériel solide parfait (les forces sont des vecteurs glissants). Il est nécessaire de connaître l'effet mécanique produit par ce système en chaque point du corps.

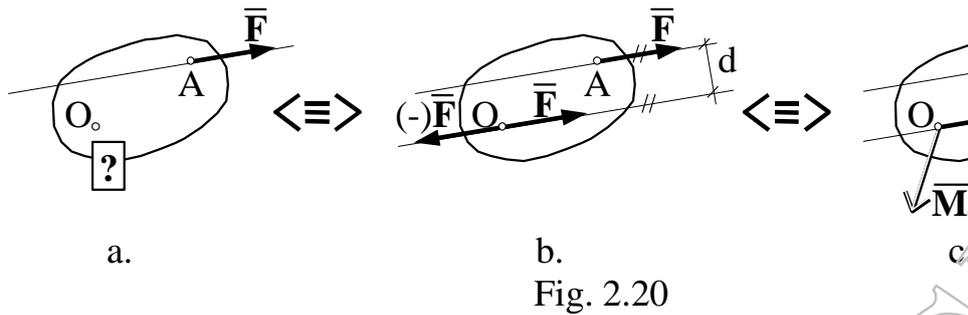
** On dit que deux systèmes de forces sont équivalents s'ils ont le même effet mécanique dans un point quelconque du corps.

** D'autre part, pour un système donné de forces est utile de déterminer un système équivalent plus simple ayant le même effet mécanique dans tous les points du corps matériel.

Pour résoudre ces deux problèmes on doit introduire une autre notion, celle de la réduction d'un système de forces.

L'opération par laquelle on détermine l'effet mécanique d'un système de forces en un point quelconque d'un corps matériel s'appelle la réduction du système de forces par rapport à ce point.

Soit la force \vec{F} appliquée au point A d'un corps solide parfait, fig. 2.20.a. On connaît l'effet de cette force dans tous les points situés sur la droite - support de la force. Donc, on cherche l'effet de cette force dans un point O, différent des points de la droite - support de la force.



L'action de la force \vec{F} appliquée dans le point A du solide ne sera pas modifiée si l'on applique en un autre point du corps, disons le point O, un système de forces équivalent à zéro comme le système de deux forces équilibrées \vec{F} et $-\vec{F}$. Le système de trois forces obtenu est précisément composé de la force \vec{F} , mais appliquée dans le point O et d'un couple de forces, \vec{F} et $-\vec{F}$, fig. 2.20.b. Le couple est équivalent à un moment, (le moment du couple). Le moment de ce couple est un vecteur qu'on peut considérer comme appliqué en O, a le module égal au produit $(d \cdot F)$, la direction perpendiculaire au plan déterminé par le point O et la droite - support de la force donnée et le sens d'après la règle connue. On observe que ce moment représente le moment de la force \vec{F} appliquée en A par rapport au point O, fig. 2.20.c.

En conclusion, l'effet mécanique en O de la force \vec{F} appliquée en A est le suivant :

- UNE FORCE \vec{F} égale à la force \vec{F} donnée et
- UN MOMENT qui est le moment de la force (appliquée en A) par rapport au point O.

Soit un système arbitraire de forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ agissant sur un solide parfait, fig. 2.21.

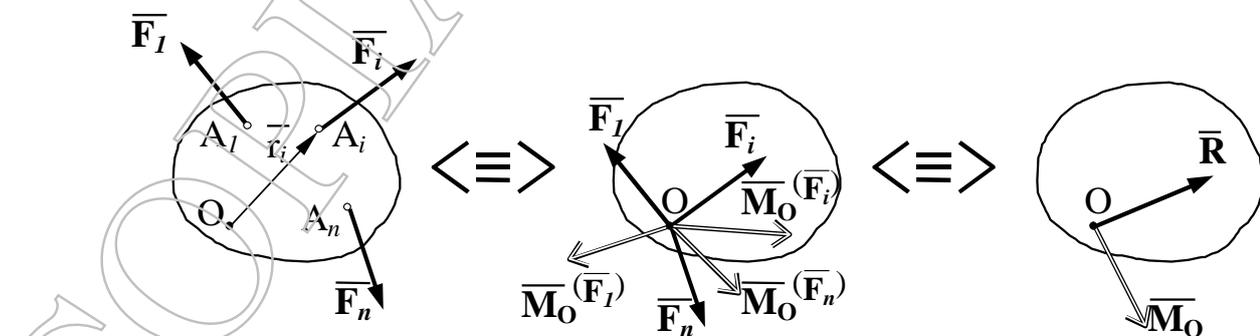


Fig. 2.21

En un point O , l'effet mécanique de ce système est caractérisé par :

- LE VECTEUR RESULTANT \bar{R} , la somme géométrique des forces, comme si ces forces étaient appliquées en O ;
- LE VECTEUR MOMENT RESULTANT \bar{M}_O , la somme géométrique de tous les moments des forces, calculés par rapport au point O .

$$\bar{R} = \sum_1^n \bar{F}_i = \sum_1^n X_i \bar{i} + \sum_1^n Y_i \bar{j} + \sum_1^n Z_i \bar{k} = X \bar{i} + Y \bar{j} + Z \bar{k}$$

$$\bar{M}_O = \sum_1^n \bar{M}_i = \sum_1^n M_{Ox,i} \bar{i} + \sum_1^n M_{Oy,i} \bar{j} + \sum_1^n M_{Oz,i} \bar{k} =$$

$$= M_{Ox} \bar{i} + M_{Oy} \bar{j} + M_{Oz} \bar{k} \quad (2.17)$$

<p>L'ensemble des vecteurs \bar{R} et \bar{M}_O s'appelle LE TORSEUR PAR RAPPORT AU POINT O du système des forces données. On va noter ce torseur de la manière suivante :</p>	$\tau_O \left\{ \begin{array}{l} \bar{R} = \sum_1^n \bar{F}_i \\ \bar{M}_O = \sum_1^n (\overline{OA}_i \times \bar{F}_i) \end{array} \right.$
---	---

APPLICATION 2.4. :

Déterminer le torseur du système de forces par rapport au point O , fig. A.2.4.

$$F_1 = P$$

$$F_2 = 2P\sqrt{2}$$

$$F_3 = P\sqrt{6}$$

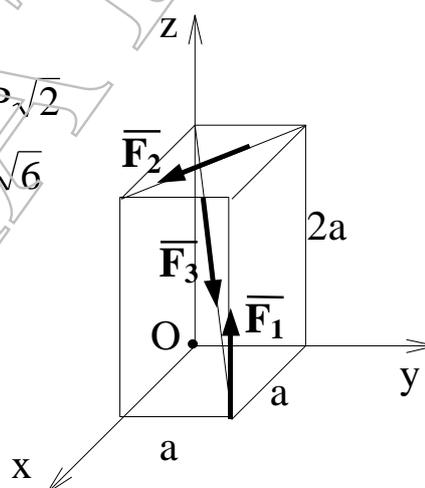


Fig. A.2.4

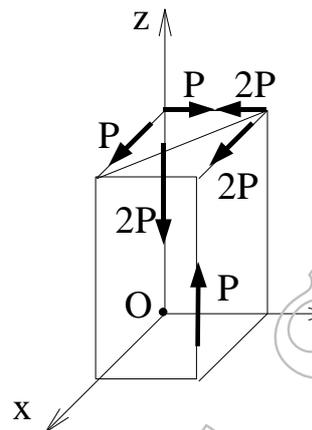
Solution :

$$\bar{F}_1 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + P\bar{k}$$

$$\bar{F}_2 = 2P\bar{i} - 2P\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{F}_3 = P\bar{i} + P\bar{j} - 2P\bar{k}$$

.....



$$\begin{aligned} \bar{R} &= \sum_1^3 \bar{F}_i = (0 + 2P + P)\bar{i} + (0 - 2P + P)\bar{j} + (P + 0 + -2P)\bar{k} = \\ &= 3P\bar{i} - P\bar{j} - P\bar{k} \end{aligned}$$

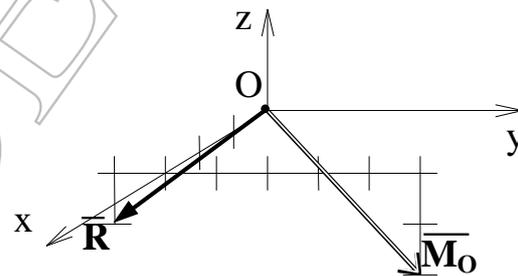
$$M_{Ox} = P \cdot a - P \cdot 2a + 2P \cdot 2a = 3Pa$$

$$M_{Oy} = P \cdot 2a + 2P \cdot 2a - P \cdot a = 5Pa$$

$$M_{Oz} = -2P \cdot a$$

$$\bar{M}_O = 3Pa\bar{i} + 5Pa\bar{j} - 2Pa\bar{k}$$

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = 3P\bar{i} - P\bar{j} - P\bar{k} \\ \bar{M}_O = 3Pa\bar{i} + 5Pa\bar{j} - 2Pa\bar{k} \end{cases}$$



Le vecteur \bar{R} reste constant si on change le point par rapport duquel on fait la réduction du système de forces.

Le vecteur \bar{M}_O varie si on change le point de réduction, car, fig. 2.22:

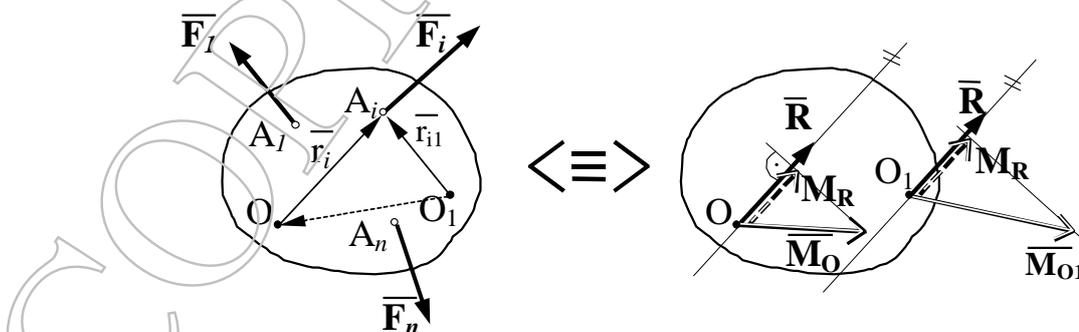


Fig. 2.22

$$\begin{aligned} \bar{M}_O &= \sum_1^n (\overline{OA}_i \times \bar{F}_i) \\ \bar{M}_{O_1} &= \sum_1^n (\overline{O_1A}_i \times \bar{F}_i) = \sum_1^n [(\overline{O_1O} + \overline{OA}_i) \times \bar{F}_i] = \\ &= \overline{O_1O} \times \sum_1^n \bar{F}_i + \sum_1^n (\overline{OA}_i \times \bar{F}_i) = \overline{O_1O} \times \bar{R} + \bar{M}_O \end{aligned} \tag{2.18}$$

$\overline{O_1O}$ est constante en rapport de la somme

Il en résulte la **loi de la variation du moment**:

$$\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O + \overline{O_1O} \times \bar{R} \tag{2.19}$$

REMARQUES :

- Il faut observer que seul le vecteur \bar{R} ne représente pas l'effet total du système de forces donné puisque, à elle seule, elle ne remplace pas le système. C'est pour ça qu'on l'appelle **VECTEUR RESULTANT** ou **VECTEUR PRINCIPAL**, qui est le résultat d'une opération d'équivalence. La notion de "somme de forces" ou de "résultante", obtenue par l'axiome du parallélogramme, s'applique seulement pour un système de forces concourantes;

- La relation (2.19) donne les propriétés de la variation du moment résultant d'un système de forces si le point de réduction change de position:

1 - si le vecteur $\bar{R} = 0$ et $\bar{M}_O = 0$, le moment résultant est égal à zéro en chaque point;

$$\bar{M}_{O_1} = 0 + \overline{O_1O} \times 0$$

2 - si le vecteur $\bar{R} \neq 0$, le moment résultant reste le même en chaque point de réduction (le vecteur \bar{M}_O est un vecteur libre);

$$\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O + \overline{O_1O} \times 0 = \bar{M}_O$$

3 - en des points situés sur une droite parallèle à la droite - support du vecteur résultant \bar{R} d'un système de forces, le vecteur moment résultant, \bar{M}_O reste constant.

Je vous propose de vous faire la démonstration pour cette remarque, fig. 2.23.

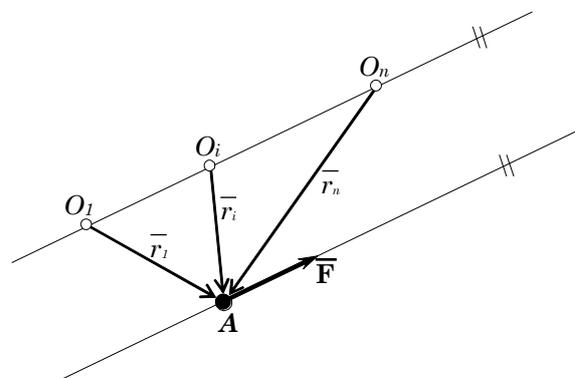


Fig. 2.23

THEOREMES D'EQUIVALENCE

Lorsqu'on réduit un système quelconque de forces agissant sur un corps solide à un point arbitraire O, ce système se remplace par deux vecteurs: le vecteur résultant \bar{R} et le vecteur moment résultant \bar{M}_O . Ces vecteurs représentent l'effet mécanique du système de forces donné en ce point.

On peut énoncer deux théorèmes d'équivalence:

** Pour un point O d'un corps matériel solide parfait, le système de forces agissant sur ce corps est équivalent au torseur du système donné, calculé par rapport au point O.*

** Deux systèmes de forces qui ont le même torseur par rapport à un point sont équivalents.*

$$\tau_O^I = \tau_O^{II} \quad \left| \begin{array}{l} \bar{R}^I = \bar{R}^{II} \\ \bar{M}_O^I = \bar{M}_O^{II} \end{array} \right.$$

2.6

LES INVARIANTS D'UN SYSTEME DE FORCES PAR RAPPORT AU POINT DE REDUCTION

On a vu que en changeant le point par rapport duquel on a effectué l'opération de réduction, les vecteurs \bar{R} - vecteur résultant et \bar{M}_O - vecteur moment résultant ont un comportement différent: le vecteur résultant \bar{R} reste constant et le vecteur moment résultant \bar{M}_O varie d'après la loi (2.19).

On appelle le vecteur \bar{R} – l'invariant vectoriel d'un système de forces par rapport au point de réduction.

Le deuxième invariant d'un système de forces par rapport au point de réduction s'appelle l'invariant scalaire et il est le produit scalaire $\bar{R} \cdot \bar{M}_O$.

Pour prouver la constance de l'invariant scalaire, on va multiplier la relation (2.19) avec le vecteur \bar{R} (produit scalaire):

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_{O1} = \bar{R} \cdot \bar{M}_O + \underbrace{\bar{R} \cdot (\bar{O}_1\bar{O} \times \bar{R})}_{=0}$$

Mais le produit mixte est égal à zéro ayant deux vecteurs colinéaires.

Donc:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_{O1} = \bar{R} \cdot \bar{M}_O \tag{2.20}$$

La conséquence de cette propriété est que *la projection du moment résultant \bar{M}_O sur la direction du vecteur \bar{R} reste constante* pour tous les points de réduction:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = |\bar{R}| |\bar{M}_O| \cos(\bar{R}, \bar{M}_O)$$

on note :

$$M_R = |\bar{M}_O| \cos(\bar{R}, \bar{M}_O) = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{|\bar{R}|}$$

Donc, M_R est constant car c'est un rapport de deux invariants.

En conclusion un système quelconque de forces a deux invariants:

- L'INVARIANT VECTORIEL - le vecteur résultant \bar{R} ;
- L'INVARIANT SCALAIRE - le produit scalaire $\bar{R} \cdot \bar{M}_O$

2.7

TORSEUR MINIMUM. L'AXE CENTRAL

Soit un système quelconque de forces agissant sur un solide. On se pose la question de déterminer la valeur minimale du torseur et de trouver les points par rapport desquels le torseur a cette valeur.

On sait que le torseur du système de forces varie avec la variation du point par rapport duquel il est calculé. Cette variation se produit à cause du moment résultant \bar{M}_O .

Si on prend en considération les composantes du moment \bar{M}_O , fig. 2.24 :

- M_R - la composante sur la direction du vecteur \bar{R} ;
- M_N - la composante sur une direction perpendiculaire à la direction du vecteur \bar{R} .

On observe que seulement la composante M_N varie avec le point de réduction, l'autre composante, M_R , est invariable.

Dans les points où la composante M_N est égale à zéro, le moment \bar{M}_{O1} a une valeur minimale qui est égale à la composante M_R .

En conclusion, la composante du moment \bar{M}_O , sur la direction du vecteur résultant \bar{R} représente LE MOMENT MINIMUM $M_R = M_{\min}$:

LE TORSEUR MINIMUM est l'ensemble des vecteurs \bar{R} et M_{\min}

$$\tau_{\min} \left| \begin{array}{l} \bar{R} \\ \bar{M}_R = \bar{M}_{\min} \end{array} \right.$$

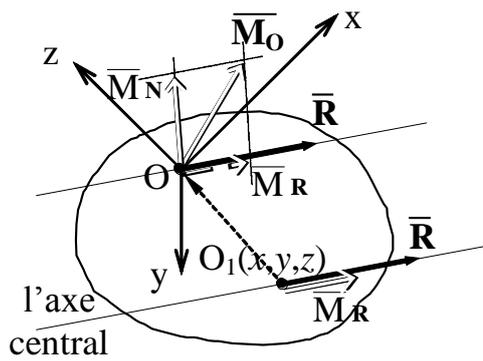


Fig. 2.24

Dans les points où le torseur de réduction a la valeur minime, le vecteur résultant \bar{R} et le vecteur moment résultant \bar{M} sont parallèles.

Pour obtenir le lieu géométrique des points de réduction où le torseur est minimum on va poser la condition que, en ces points, les vecteurs \bar{R} et \bar{M}_{O_1} soient colinéaires.

Soit un point O_1 de ce lieu géométrique, fig. 2.24. Le moment résultant \bar{M}_{O_1} a l'expression analytique:

$$\begin{aligned} \bar{O}_1\bar{O} &= (0-x)\bar{i} + (0-y)\bar{j} + (0-z)\bar{k} \\ \bar{M}_{O_1} &= \bar{M}_O + \bar{O}_1\bar{O} \times \bar{R} = M_{Ox}\bar{i} + M_{Oy}\bar{j} + M_{Oz}\bar{k} + \\ &+ \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -x & -y & -z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (M_{Ox} - yZ + zY)\bar{i} + \\ &+ (M_{Oy} - zX + xZ)\bar{j} + (M_{Oz} - xY + yX)\bar{k} \end{aligned}$$

L'expression analytique du vecteur \bar{R} est: $\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$

La condition pour que les vecteurs \bar{R} et \bar{M}_{O_1} soient colinéaires s'exprime par la relation suivante:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{O_1} &= \lambda \bar{R} \\ \frac{M_{Ox} - yZ + zY}{X} &= \frac{M_{Oy} - zX + xZ}{Y} = \frac{M_{Oz} - xY + yX}{Z} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Le système de deux équations donné par la relation (2.23) représente une droite, appelée L'AXE CENTRAL du système de forces.

L'AXE CENTRAL d'un système de forces est le lieu géométrique des points par rapport auxquels le torseur de réduction est

minimum. Dans ces points, les vecteurs composants du torseur $(\bar{R}, \bar{M}_{\min})$ sont colinéaires

THEOREME D'EQUIVALENCE:

Un système quelconque de forces est équivalent à son torseur minimum ayant comme droite - support l'axe central car, le système de forces et l'ensemble des vecteurs \bar{R} et \bar{M}_{\min} ont le même torseur par rapport au point O, (fig. 2.24).

Le torseur minimum représente la plus simple expression à laquelle peut être réduit un système de forces dans l'espace

2.8

CAS DE REDUCTION. SYSTEMES EQUIVALENTES.

Soit un système quelconque de forces. Les cas possibles de réduction sont:

CAS I: $\bar{R} = 0, \bar{M}_O = 0$; le système se trouve en équilibre. Ce cas sera étudié pendant toute la Statique.

CAS II: $\bar{R} = 0, \bar{M}_O \neq 0$; le système est équivalent à un couple ayant le moment égal à \bar{M}_O , fig. 2.25. Donc, le couple doit se trouver dans un plan

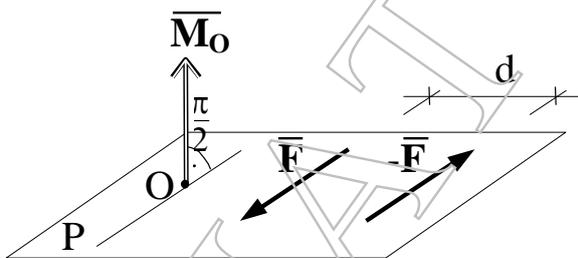


Fig. 2.25

perpendiculaire au vecteur \bar{M}_O et le moment du couple doit avoir le même module et le même sens que $|\bar{M}_O| = d \cdot F$. L'axe central n'existe pas.

CAS III: $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O = 0$; le système de forces est équivalent à une force unique \bar{R} qui passe par le point O. La droite – support de la résultante \bar{R} est l'axe central, fig. 2.26.

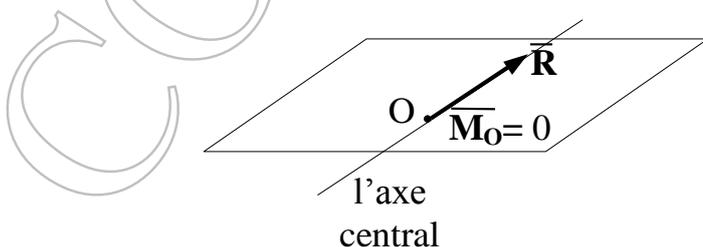


Fig. 2.26

CAS IV: $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O \neq 0$; dans ce cas il y a deux possibilités:

- a) $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$; les vecteurs \bar{R} et \bar{M}_O sont perpendiculaires. Le moment minime $M_{\min} = 0$. Le système de forces est équivalent à une force unique \bar{R} qui a comme droite - support l'axe central (mais ne passe pas par le point O), fig. 2.27.a. On observe que le cas III est un cas particulier de ce cas.
- b) $\bar{R} \cdot \bar{M}_O \neq 0$; le système de forces est équivalent à son torseur minimum ayant comme droite - support l'axe central, fig. 2.27.b, dénommé dynamo.

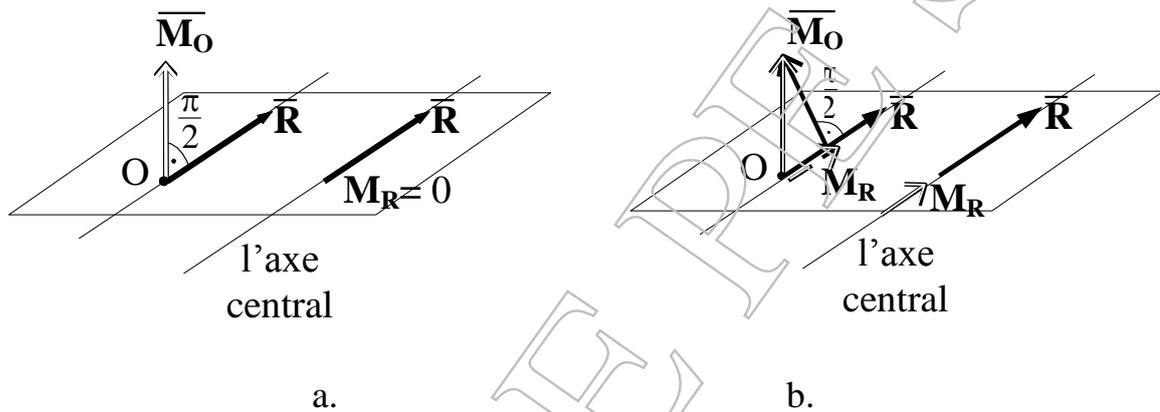


Fig. 2.27

APPLICATION 2.5. :

Réduire le système de forces, fig. A.2.5 :

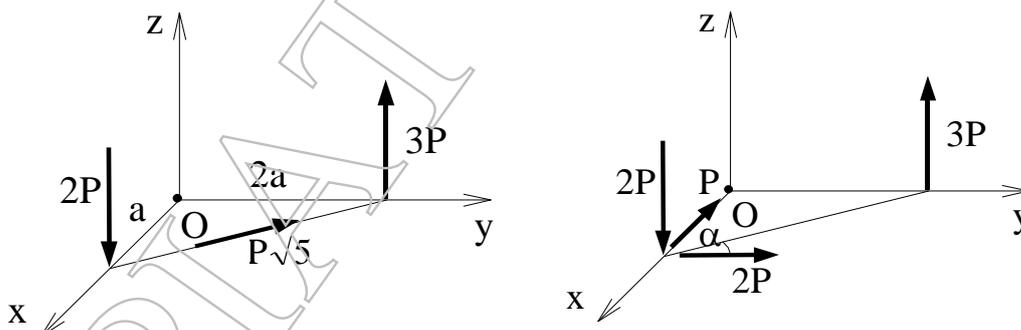


Fig. A.2.5

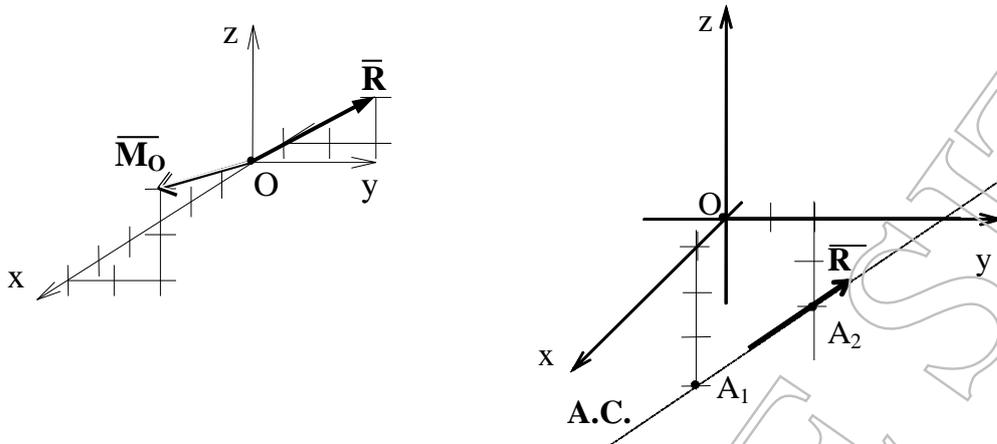
Solution :

La force du module $P\sqrt{5}$ se décompose : $-P\bar{i} + 2P\bar{j} + 0\bar{k}$

La résultante $\bar{R} = -P \cdot \bar{i} + 2P \cdot \bar{j} + P \cdot \bar{k}$

Le moment $\bar{M}_O = 6Pa \cdot \bar{i} + 2Pa \cdot \bar{j} + 2Pa \cdot \bar{k}$

Le produit scalaire $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$



L'axe central

$$\frac{6a - y \cdot 1 + z \cdot 2}{-1} = \frac{2a - z \cdot (-1) + x \cdot 1}{2} = \frac{2a - x \cdot 2 + y \cdot (-1)}{1}$$

$$\begin{cases} 12a - 2y + 4z = -2a - 1z - 1x \\ 2a + 1z + 1x = 4a - 4x - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14a + 1x - 2y + 5z = 0 \\ -2a + 5x + 2y + 1z = 0 \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 14a + 1x + 5z = 0 \\ -2a + 5x + 1z = 0 \end{cases} \Rightarrow 24a - 24x = 0 \Rightarrow x = 1a ; z = -3a$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 14a + 5z - 2y = 0 \\ -2a + 1z + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow 12a + 6z = 0 \Rightarrow z = -2a ; y = 2a$$

Le cas de la réduction est "IV - a"

Le système de forces est équivalent à une force unique \bar{R} qui a comme droite - support l'axe central

APPLICATION 2.6. :

Réduire le système de forces, fig. A.2.6 :

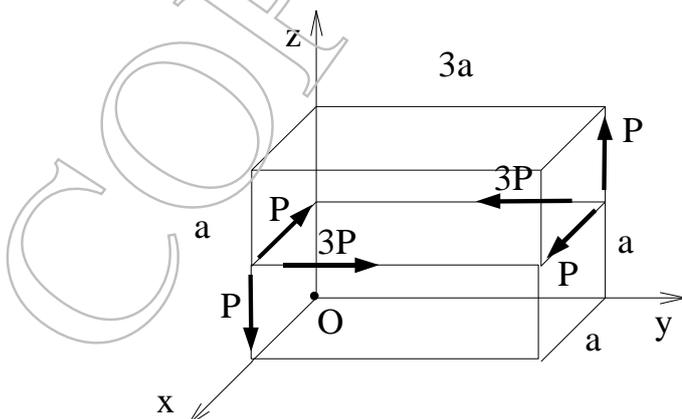
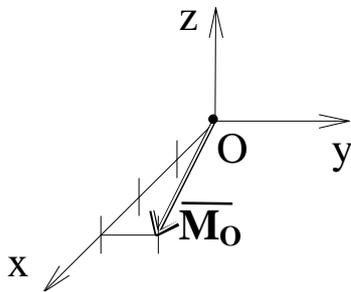


Fig. A.2.6

Solution :



$$\begin{aligned} \bar{R} &= 0 \\ \bar{M}_O &= (3Pa - 3Pa + P3a)\bar{i} + (Pa - Pa + Pa)\bar{j} + \\ &+ (3Pa - P3a)\bar{k} = 3Pa\bar{i} + Pa\bar{j} + 0\bar{k} \end{aligned}$$

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_O = 3Pa\bar{i} + Pa\bar{j} + 0\bar{k} \end{cases}$$

Cas II de réduction, le système est équivalent à un couple ayant le moment égal à \bar{M}_O

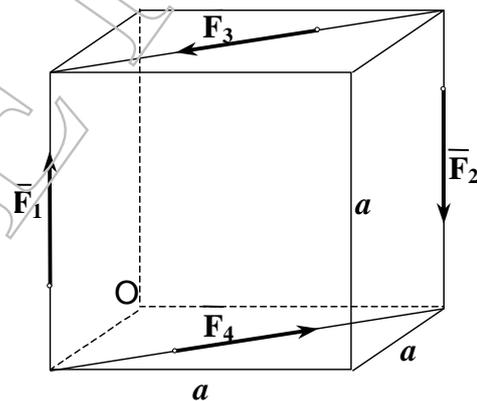
APPLICATION 2.7. :

Réduire le système de forces, fig. A.2.7 :

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = P \quad \bar{F}_3 = \bar{F}_4 = P\sqrt{2}$$

Solution :

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_O = 0 \end{cases}$$



Cas I de réduction, le système est équivalent à zéro. Le système se trouve en équilibre. Fig. A.2.7

APPLICATION 2.8. :

Réduire le système de forces, fig. A.2.8 :

$$F_1 = P\sqrt{2}$$

$$F_2 = 4P$$

$$M_1 = 3Pa$$

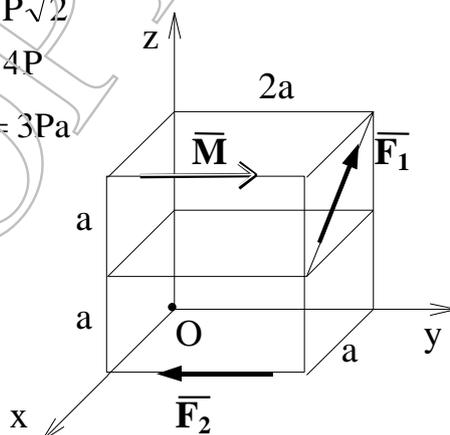
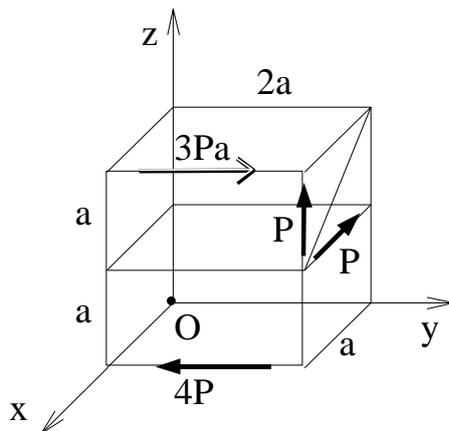


Fig. A.2.8



Solution :

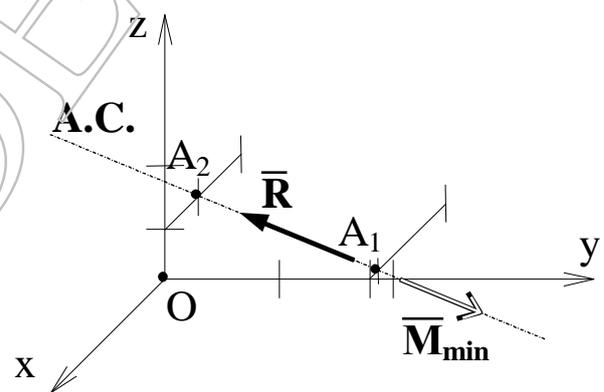
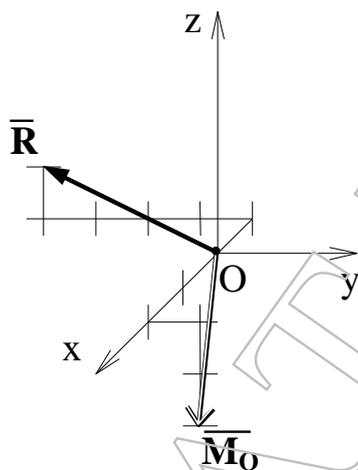
$$\bar{R} = -P \cdot \bar{i} - 4P \cdot \bar{j} + P \cdot \bar{k}$$

$$\bar{M}_O = 2Pa \cdot \bar{i} + (3Pa - Pa - Pa) \cdot \bar{j} - 2Pa \cdot \bar{k}$$

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = -8P^2 a$$

$$\tau_O \begin{cases} \bar{R} = -P \cdot \bar{i} - 4P \cdot \bar{j} + P \cdot \bar{k} \\ \bar{M}_O = 2Pa \cdot \bar{i} + Pa \cdot \bar{j} - 2Pa \cdot \bar{k} \end{cases}$$

$$\tau_{\min} \begin{cases} \bar{R} = -P \cdot \bar{i} - 4P \cdot \bar{j} + P \cdot \bar{k} \\ M_{\min} = \frac{-8P^2 a}{P \sqrt{1+16+1}} = -1,88 Pa \end{cases}$$



L'axe central

$$\frac{2Pa - yP + z(-4P)}{-P} = \frac{Pa - z(-P) + xP}{-4P} = \frac{-2Pa - x(-4P) + y(-P)}{P}$$

le point $A_1 \begin{cases} x = -0,112 a \\ y = 1,778 a \\ z = 0 \end{cases}$; le point $A_2 \begin{cases} x = -0,548 a \\ y = 0 \\ z = 0,444 a \end{cases}$

Cas IV b : Le système de forces se réduit à un torseur minimum sur l'axe central, dynamo.

2.9 LE THEOREME DE VARIGNON

Soit un système de forces qui se réduit à une force unique, le vecteur résultant \bar{R} . Pour ce système de forces:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0 ; \quad M_{\min} = 0$$

Ce système est dénommé « système de forces particulier ». La force unique est située sur l'axe central.

La transformation du système de forces jusqu'au système équivalent le plus simple est représentée sur la figure 2.28.

Dans un point quelconque O le système de forces se réduit à un vecteur résultant \bar{R} et un vecteur moment résultant \bar{M}_O .

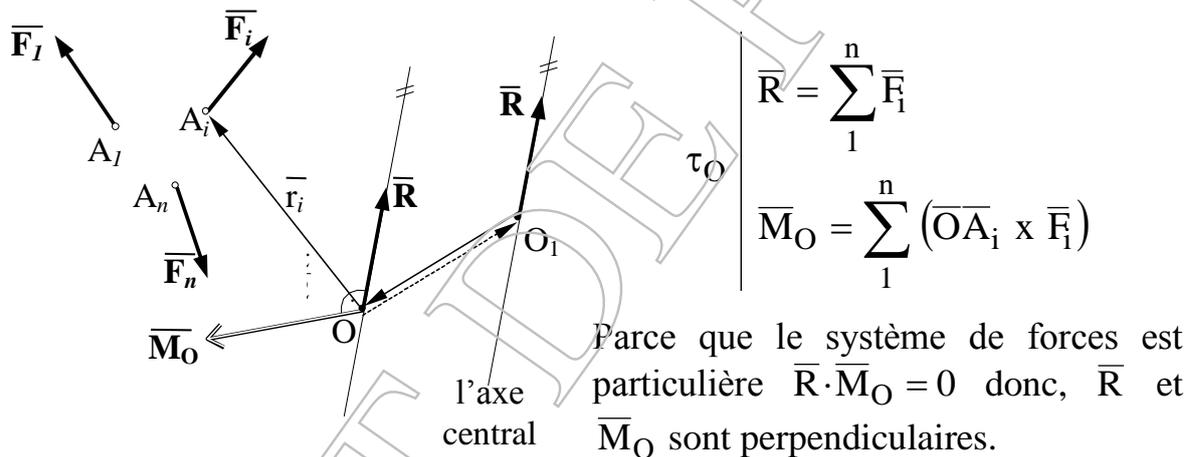


Fig. 2.28

Supposons un point O_1 situé sur l'axe central. Le vecteur moment résultant du système de forces par rapport à ce point est:

$$\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O + \overline{O_1O} \times \bar{R} \tag{2.23}$$

Ce moment est égal à zéro car le point se trouve sur l'axe central (la droite - support du vecteur \bar{R} unique).

Dans ces conditions, la relation (2.23) devient :

$$0 = \bar{M}_O + \overline{O_1O} \times \bar{R}$$

$$\bar{M}_O = - \overline{O_1O} \times \bar{R} = \overline{OO_1} \times \bar{R} \tag{2.24}$$

On peut énoncer **LE THEOREME DE VARIGNON** :

Pour un système de forces qui se réduit à une force unique \bar{R} , le vecteur moment résultant du système de forces par rapport à un point O est égal avec le moment du vecteur \bar{R} par rapport au même point.

Les conditions pour lesquelles le théorème de Varignon est valable sont:

- 1 - le système de forces doit être un système particulier;
- 2 - le vecteur résultant \bar{R} doit être sur l'axe central.

2.10 SYSTEMES PARTICULIERS DE FORCES

Les systèmes particuliers de forces sont ;

- système de forces concourantes ;
- système de forces coplanaires ;
- système de forces parallèles.

2.10.1 Système de forces concourantes

Les forces qui appartiennent à un système de forces concourantes ont les droites - support concourantes dans un point. Elles ont un caractère de vecteurs liés.

Soit un système de forces $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$ concourantes dans le point O, fig. 2.29.a.

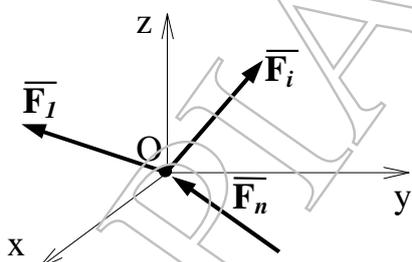
Le système de forces se réduit à une résultante unique, fig. 2.29.b sur l'axe central. L'axe central passe par le point d'intersection (le moment $\bar{M}_O = 0$).

La résultante \bar{R} de deux forces concourantes \bar{F}_1 et \bar{F}_2 se détermine par la règle du parallélogramme $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$

Le module de la résultante est donné par la relation suivante :

$$|\bar{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_1 F_2 \cos(\bar{F}_1, \bar{F}_2)}$$

a.



b.

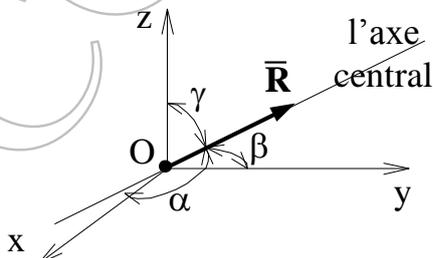


Fig. 2.29

Pour un nombre quelconque de forces concourantes, la résultante \bar{R} est égale à leur somme géométrique et est appliquée au point d'intersection; la règle du parallélogramme utilisée pour deux forces devient dans ce cas, la règle du polygone des forces, règle bien connue d'ailleurs.

D'habitude on adopte un procédé analytique pour la composition des forces. Soit un système de forces concourantes $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_i, \dots, \bar{F}_n$ exprimées par leurs composantes sur les axes d'un système de référence xOyz :

$$F_{xi} = F_i \cos\alpha \quad ; \quad F_{yi} = F_i \cos\beta \quad ; \quad F_{zi} = F_i \cos\lambda$$

$$\bar{F}_1 = F_{x1} \bar{i} + F_{y1} \bar{j} + F_{z1} \bar{k}$$

.....

$$\bar{F}_i = F_{xi} \bar{i} + F_{yi} \bar{j} + F_{zi} \bar{k}$$

.....

$$\bar{F}_n = F_{xn} \bar{i} + F_{yn} \bar{j} + F_{zn} \bar{k}$$

La résultante de ce système est la force :

$$\bar{R} = \sum_1^n \bar{F}_i = \left(\sum_1^n F_{xi} \right) \bar{i} + \left(\sum_1^n F_{yi} \right) \bar{j} + \left(\sum_1^n F_{zi} \right) \bar{k}$$

On observe qu'entre les projections de la résultante et les projections des forces sur les axes existent les relations suivantes:

$$X = \left(\sum_1^n F_{xi} \right) \quad ; \quad Y = \left(\sum_1^n F_{yi} \right) \quad ; \quad Z = \left(\sum_1^n F_{zi} \right)$$

Conclusion: Pour calculer la résultante on va faire deux opérations:

- 1 - la décomposition des forces suivant les axes des coordonnées
- 2 - la somme algébrique des ces projections sur chaque axe pour obtenir les projections de la résultante suivant les axes des coordonnées

$$\bar{R} = \sum_1^n \bar{F}_i = \left(\sum_1^n F_{xi} \right) \bar{i} + \left(\sum_1^n F_{yi} \right) \bar{j} + \left(\sum_1^n F_{zi} \right) \bar{k} = X \bar{i} + Y \bar{j} + Z \bar{k} \quad (2.25)$$

Le module de la résultante est: $|\bar{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ et la direction du vecteur

\bar{R} est donnée par des relations:

$$\cos(\bar{R}, ox) = \frac{X}{|\bar{R}|} ; \cos(\bar{R}, oy) = \frac{Y}{|\bar{R}|} ; \cos(\bar{R}, oz) = \frac{Z}{|\bar{R}|}$$

Deux systèmes de forces concourantes sont équivalents s'ils ont la même résultante \bar{R} (comme module, direction, sens et point d'application), par rapport au même système de référence.

Les cas de réduction possibles sont :

CAS I: $\bar{R} = 0$ - système de forces en équilibre ;

CAS II : $\bar{R} \neq 0$ - système de forces équivalent à une force unique \bar{R} qui passe par le point O ; la droite - supporte de la résultante est l'axe central.

APPLICATION 2.9. :

Déterminer la résultante du système de forces concurrentes, fig. A.2.9 :

$F_1 = P\sqrt{14}$

$F_2 = 2P\sqrt{13}$

$F_3 = 3P\sqrt{14}$

$F_4 = 5P$

$F_5 = P\sqrt{5}$

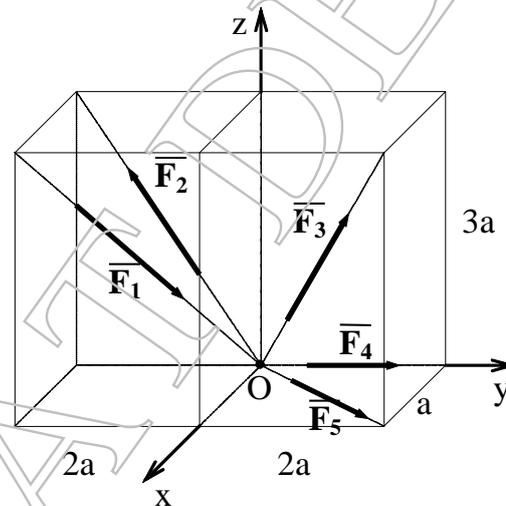
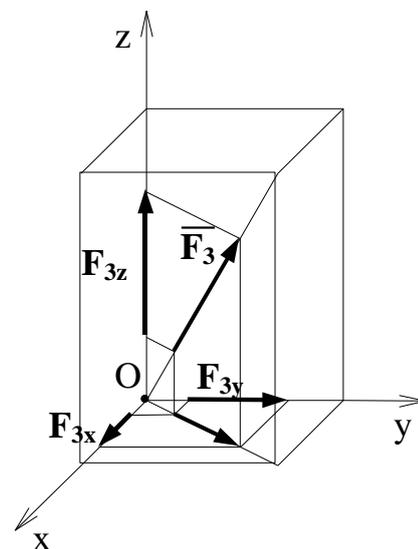
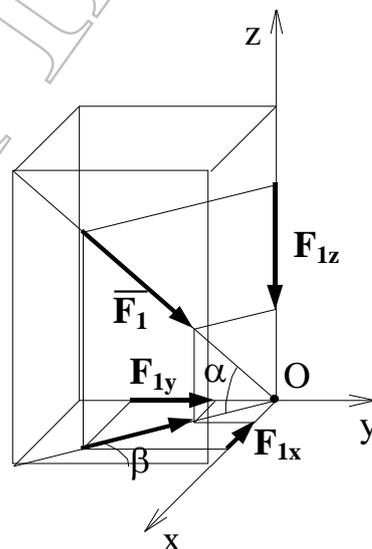
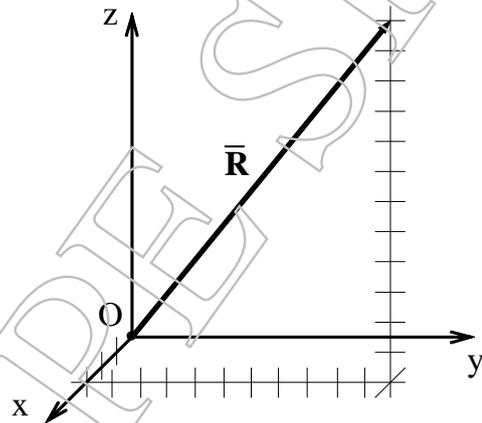
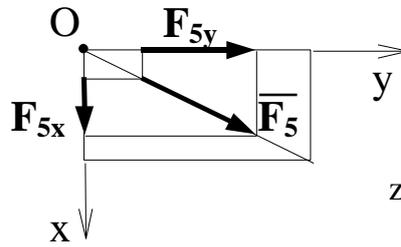
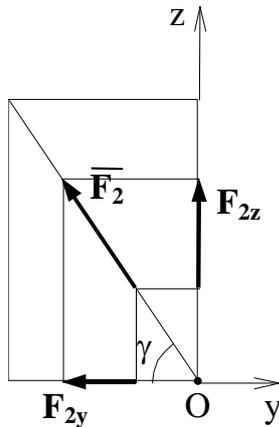


Fig. A.2.9

Solution :





$$\bar{F}_1 = -P\bar{i} + 2P\bar{j} - 3P\bar{k}$$

$$\bar{F}_2 = 0\bar{i} - 4P\bar{j} + 6P\bar{k}$$

$$\bar{F}_3 = 3P\bar{i} + 6P\bar{j} + 9P\bar{k}$$

$$\bar{F}_4 = 0\bar{i} + 5P\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{F}_5 = P\bar{i} + 2P\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{R} = 3P\bar{i} + 11P\bar{j} + 12P\bar{k}$$

2.10.2 Système de forces coplanaires

Les forces dans un système de forces coplanaire ont les droites - supporte dans un plan. Le système de forces coplanaires se réduit à une résultante unique sur l'axe central.

Soit un système de forces $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$, contenues - par exemple - dans le plan xOy , fig. 2.30. Le torseur de ce système par rapport au point O est :

$$\bar{R} = \sum_1^n \bar{F}_i = \left(\sum_1^n F_{xi} \right) \bar{i} + \left(\sum_1^n F_{yi} \right) \bar{j} = X\bar{i} + Y\bar{j} \quad (2.26)$$

$$\bar{M}_O = \sum_1^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \sum_1^n \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & 0 \\ F_{xi} & F_{yi} & 0 \end{bmatrix} = \left(\sum_1^n M_{Oz,i} \right) \bar{k} = M_O \bar{k}$$

On observe que les vecteurs \bar{R} et \bar{M}_O sont perpendiculaires si les forces sont situées dans un plan, donc: $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$; $M_{\min} = 0$ et on peut appliquer le

théorème de Varignon.

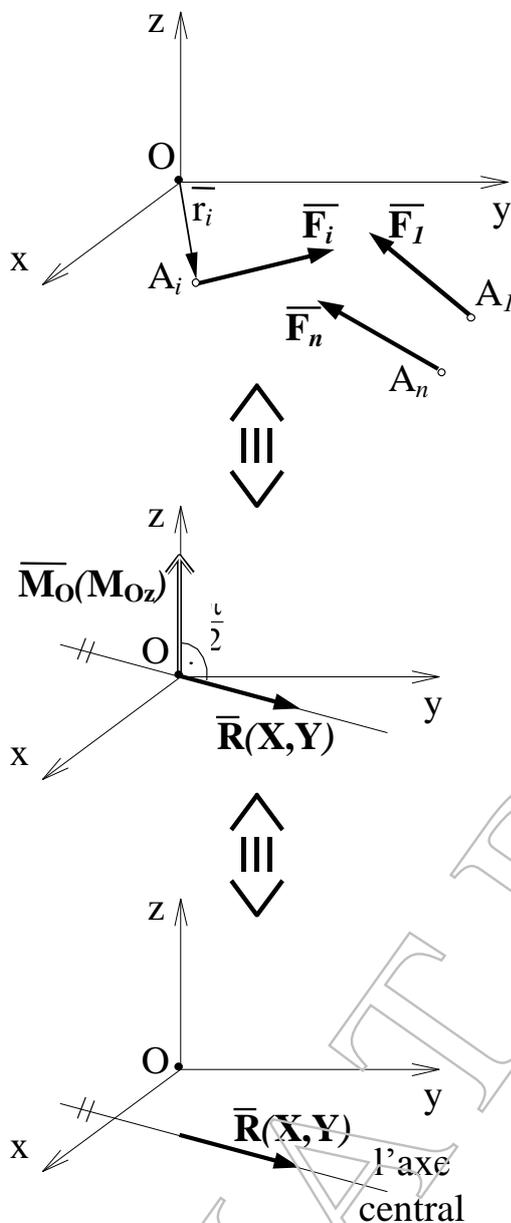


Fig. 2.30

Les cas de réduction possibles sont :

CAS I: $\bar{R} = 0, \bar{M}_O = 0$ - système de forces en équilibre ;

CAS II: $\bar{R} = 0, \bar{M}_O \neq 0$ - système de forces équivalent à un couple ;

CAS III: $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O = 0$ - système de forces équivalent à une force unique \bar{R} qui passe par le point O ; la droite - supporte de la résultante est l'axe central.

CAS IV: $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O \neq 0$ et $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ - système de forces équivalent à une force unique \bar{R} qui ne passe pas par le point O. Cette force unique a comme droite - support l'axe central du système de forces qui, dans ce cas particulier devient :

$$\begin{cases} M_{Oz} - x Y + y X = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

(par la particularisation des termes dans l'équation 2.23).

On peut déterminer la position de l'axe central en appliquant le théorème de Varignon. On peut utiliser la forme scalaire du théorème:

$$M_O = \sum (d F) = d_R \cdot R \quad ; \quad d_R = \frac{M_O}{R} \quad (2.27a)$$

Il y a deux parallèles avec \bar{R} au distance d_R par rapport au point O. L'axe central est la droite pour laquelle la résultante agissant sur elle donne le même

moment par rapport au point O comme les forces, fig. 2.31.

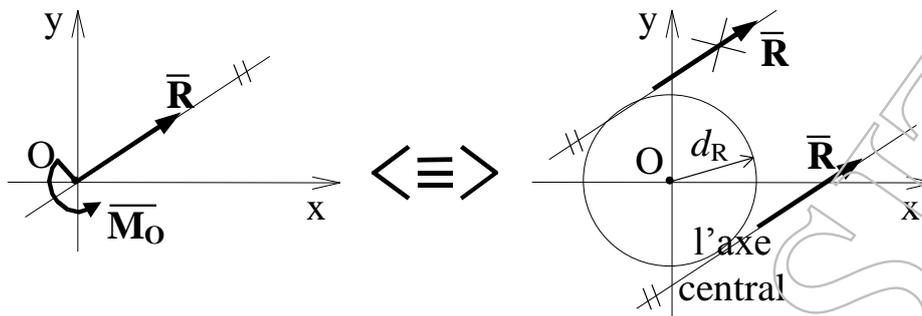


Fig. 2.31

REMARQUE :

* Par la relation (2.26), on obtient le module du moment résultant \bar{M}_O par rapport à un point qui est situé dans le plan des forces, comme somme algébrique des moments des forces, calculés par rapport au point O.

* L'équation de la droite - support du vecteur résultant \bar{R} donnée par la relation (2.27) est obtenue de l'équation de l'axe central. L'axe central est situé dans le plan des forces. Il faut observer que, dans le cas particulier du système de forces coplanaires, en tous les points situés sur cet axe le moment minimum est égal à zéro.

APPLICATION 2.10. :

Pour le système de forces coplanaire déterminer le torseur de réduction par rapport aux points O et A, fig. A.2.10

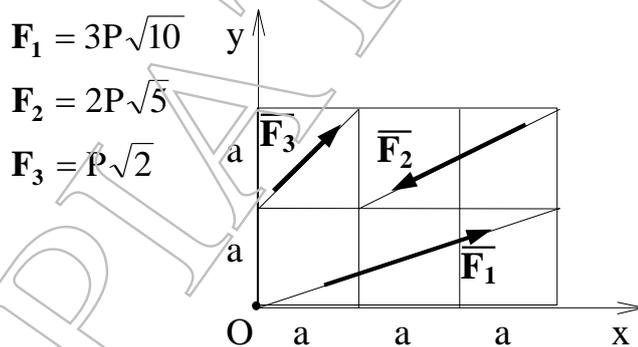
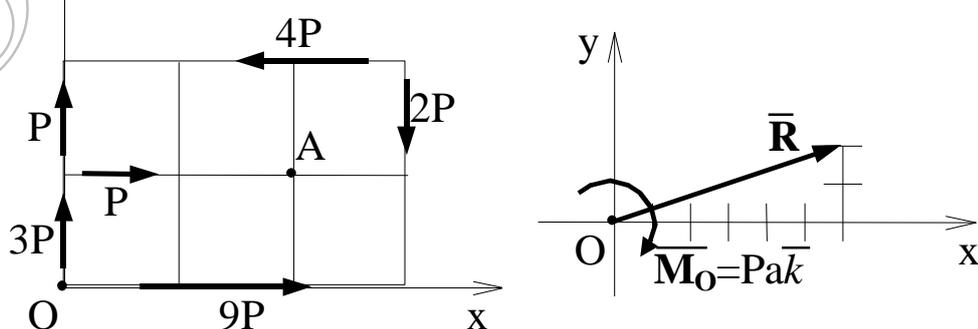


Fig. A.2.10

Solution :

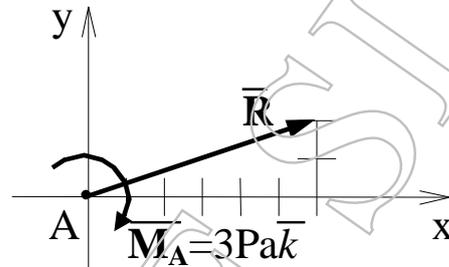


$$\bar{R} = 6P \cdot \bar{i} + 2P \cdot \bar{j}$$

$$\bar{M}_O = (-P \cdot a - 2P \cdot 3a + 4P \cdot 2a) \cdot \bar{k} = Pa \cdot \bar{k}$$

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$$

Le moment en A peut être calculé en deux modes :



I. $\bar{M}_A = (9P \cdot a - 3P \cdot 2a - P \cdot 2a - 2P \cdot a + 4P \cdot a) \cdot \bar{k} = 3Pa \cdot \bar{k}$

II. $\bar{M}_A = \bar{M}_O + \bar{AO} \times \bar{R} = Pa \cdot \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2a & -a & 0 \\ 6P & 2P & 0 \end{vmatrix} = Pa \cdot \bar{k} + 2Pa \cdot \bar{k} = 3Pa \cdot \bar{k}$

où $\bar{AO} = (x_O - x_A) \bar{i} + (y_O - y_A) \bar{j} = -2a \bar{i} - a \bar{j}$

2.10.3 Système de forces parallèles. Centre des forces parallèles

Les forces qui appartiennent à un système de forces parallèles ont des droites - supporte parallèles à un verseur \bar{u} . Le système se réduit à une résultante unique sur l'axe central. L'axe central est parallèle au verseur, fig. 2.32.

Soit un système de forces parallèles, fig. 2.33, par exemple, avec l'axe Oz d'un système de référence.

Le torseur de ce système par rapport au point O est :

$$\bar{R} = \sum_1^n \bar{F}_i = 0 \bar{i} + 0 \bar{j} + \left(\sum_1^n F_{zi} \right) \bar{k} = Z \bar{k}$$

$$\bar{M}_O = \sum_1^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \sum_1^n \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ 0 & 0 & F_{zi} \end{bmatrix} = \tag{2.28}$$

$$= \left(\sum_1^n M_{Ox,i} \right) \bar{i} + \left(\sum_1^n M_{Oy,i} \right) \bar{j} + 0 \bar{k} = M_{Ox} \bar{i} + M_{Oy} \bar{j} + 0 \bar{k}$$

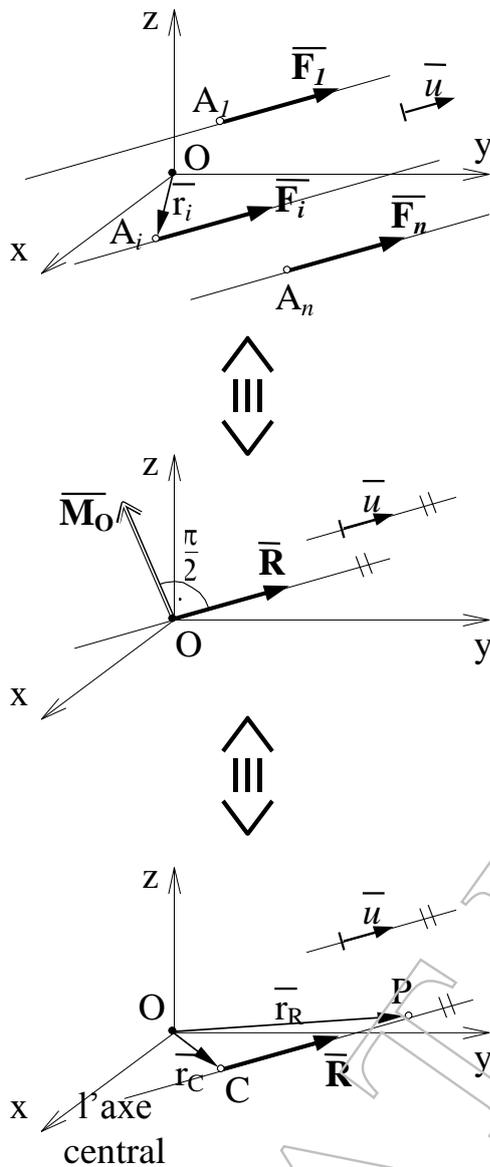


Fig. 2.32

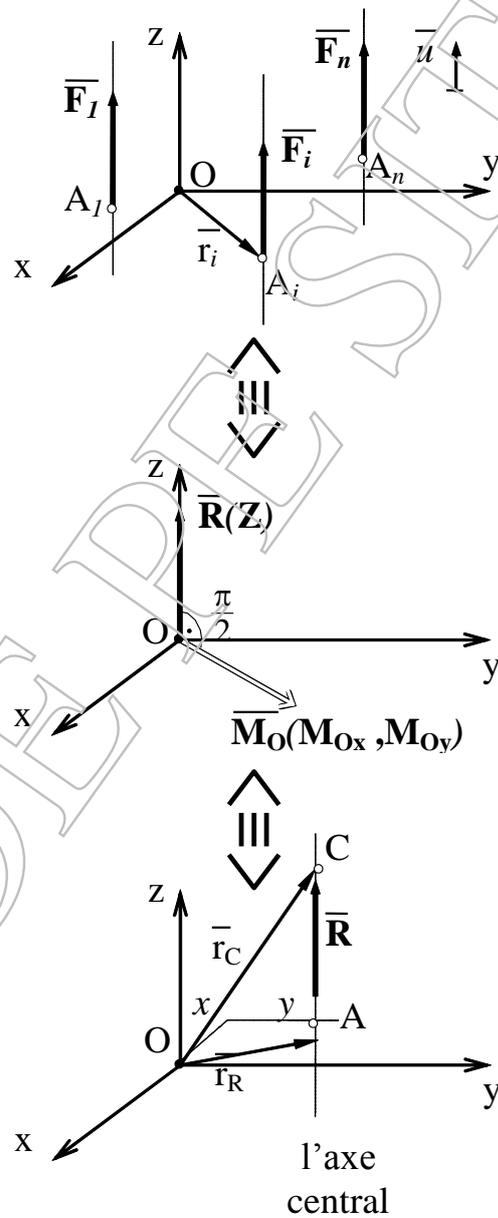


Fig. 2.33

On observe que les vecteurs \bar{R} et \bar{M}_O sont perpendiculaires si les forces sont parallèles, donc:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0 \text{ et on peut appliquer le théorème de Varignon.}$$

Les cas de réduction possibles sont :

CAS I: $\bar{R} = 0, \bar{M}_O = 0$ - système de forces en équilibre

CAS II: $\bar{R} = 0, \bar{M}_O \neq 0$ - système de forces équivalent à un couple ;

CAS III: $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O = 0$ - système de forces équivalent à une force unique \bar{R}

qui passe par le point O ;

CAS IV: $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$ et $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ - système de forces équivalent à une force unique \bar{R} qui ne passe pas par le point O. Cette force unique a comme droite - support l'axe central qui, dans ce cas particulier est donnée par l'intersection de deux plans:

$$\begin{aligned} M_{Ox} - yZ + z \cdot 0 &= 0 \\ M_{Oy} - z \cdot 0 + xZ &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Cette droite, parallèle à la direction des forces, coupe le plan xOy (perpendiculaire à la direction des forces) en un point A ayant les coordonnées :

$$x = -\frac{M_{Oy}}{Z} ; \quad y = \frac{M_{Ox}}{Z}$$

On va considérer un point P situé sur la droite - support de la résultante \bar{R} et ayant le vecteur de position \bar{r}_R , fig. 2.27. Le théorème de Varignon par rapport au point O donne la relation suivante:

$$\bar{r}_R \times \bar{R} = \sum_1^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) \quad (2.30)$$

Dans cette relation, $\bar{R} = \left(\sum_1^n F_i \right) \bar{k}$ donc on peut écrire:

$$\left(\sum_1^n F_i \bar{r}_i - \bar{r}_R \sum_1^n F_i \right) \times \bar{k} = 0 \quad (2.31)$$

L'équation (2.31) est satisfaite dans les cas suivants :

* si $\bar{k} = 0$ - une situation impossible ;

* si $\left(\sum_1^n F_i \bar{r}_i - \bar{r}_R \sum_1^n F_i \right) = 0$

On note le vecteur $\bar{r}_R = \bar{r}_C$ qui est le vecteur de position d'un point C situé sur le support de la résultante et dénommé « le centre des forces parallèles »:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_1^n F_i \bar{r}_i}{\sum_1^n F_i}$$

* si les vecteurs sont parallèles, il en existe la relation:

$$\sum_1^n F_i \bar{r}_i - \bar{r}_R \sum_1^n F_i = \lambda \bar{k} \text{ où } \lambda \text{ est un paramètre scalaire.}$$

On obtient le vecteur de position

$$\bar{r}_R = \frac{\sum_1^n F_i \bar{r}_i}{\sum_1^n F_i} - \frac{\lambda}{\sum_1^n F_i} \bar{k} = \bar{r}_C + \mu \bar{k} \tag{2.32}$$

où on a noté par μ la grandeur scalaire $\mu = -\frac{\lambda}{\sum_1^n F_i}$

Quand varie, le point P décrit une droite qui passe par le point C, en ayant la direction du vecteur \bar{k} . Si on remplace le vecteur \bar{k} par un autre vecteur \bar{u} qui à son tour peut varier, l'équation (2.32) représente une famille de droites concourantes qui passent par le point fixe C. Ça se passe toujours ainsi si les forces du système gardent fixes leurs points d'application, si les modules des forces restent constants et si seulement leur direction change, les forces restant parallèles.

On peut énoncer le **théorème** suivant:

Si dans un système de forces parallèles les forces ont leurs points d'application fixes, leurs modules sont constants et changent seulement de direction en restant parallèles, la droite - support de la résultante passe toujours par un point fixe C, appelé CENTRE DES FORCES PARALLELES.

La position du point C est donnée par le vecteur: $\bar{r}_C = \frac{\sum_1^n F_i \bar{r}_i}{\sum_1^n F_i} \tag{2.33}$

APPLICATION 2.11. :

Réduire le système de forces parallèles, fig. A.2.11 :

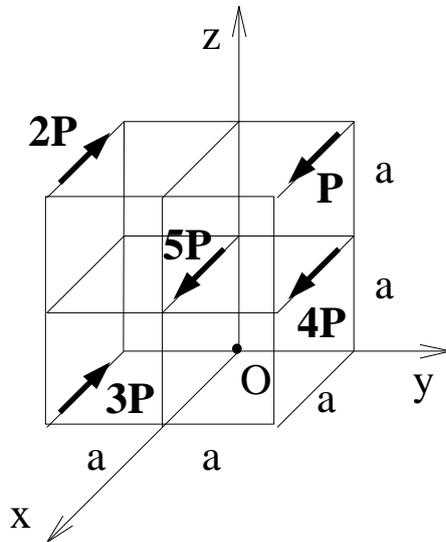
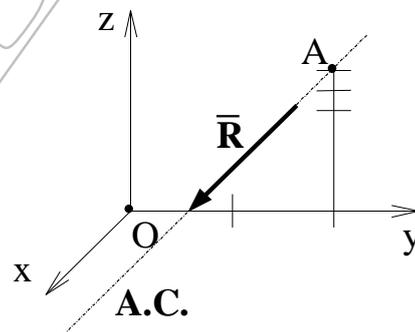
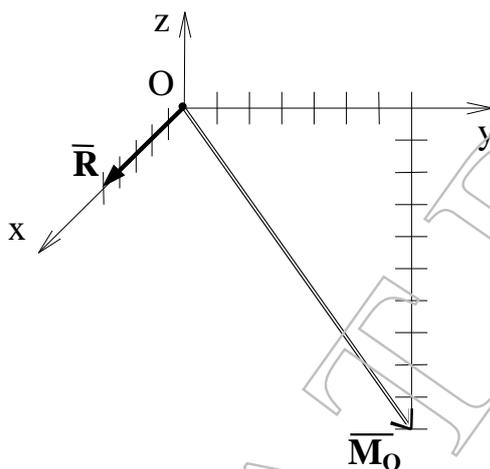


Fig. A.2.11

Solution:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= 5P \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k} \\ \bar{M}_O &= 0 \cdot \bar{i} + 7Pa \cdot \bar{j} - 10Pa \cdot \bar{k} \\ \bar{R} \cdot \bar{M}_O &= 0 \end{aligned}$$



$$\frac{0 - y \cdot 0 + z \cdot 0}{5P} = \frac{7a - z \cdot 5 + x \cdot 0}{0} = \frac{-10a - x \cdot 0 + y \cdot 5}{0}$$

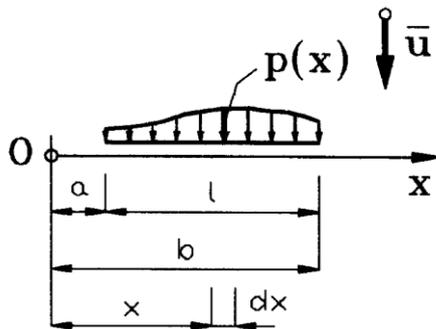
L'axe central est parallèle avec l'axe Ox

$$\begin{cases} z = \frac{7}{5}a \\ y = 2a \end{cases}$$

Forces parallèles distribuées

Sois un système de forces parallèles distribuées en plan avec la valeur $p = p(x)$, fig. 2.34. La direction est donnée par le vecteur \bar{u} .

Déterminer la résultante comme module et position.



Sur une distance élémentaire dx on peut considérer la distribution de forces comme constante, la résultante élémentaire a la forme :

$$dP = p(x) dx$$

Fig. 2.34

- le module : $R = \int_a^b dP = \int_a^b p(x) dx = \Omega_p^{ab}$

- la direction : parallèle avec \bar{u}

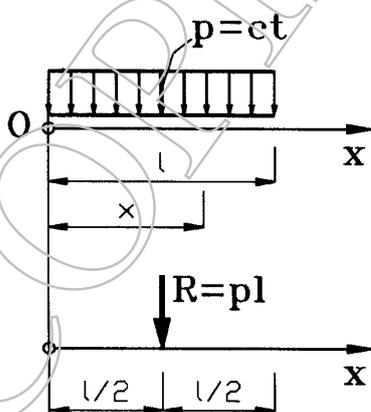
- la position : est obtenue en appliquant le théorème de Varignon en rapport du point O

$$d \cdot R = \int_a^b x \cdot dP ; \quad d \cdot \int_a^b p(x) dx = \int_a^b x \cdot p(x) dx$$

et
$$d = \frac{\int_a^b x \cdot p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}$$

Cas particuliers :

1. La force a une distribution constante avec la valeur p , fig. 2.35



$$R = p \int_0^l dx = pl \quad \text{et}$$

$$d = \frac{\int_0^l x \cdot p dx}{pl} = \frac{\frac{1}{2}pl^2}{pl} = \frac{1}{2}l$$

Fig. 2.35

2. La force a une distribution linéaire avec la valeur maximum p_0 , fig. 2.36

$$\frac{P(x)}{p_0} = \frac{x}{l}; \quad P(x) = p_0 \frac{x}{l}$$

$$R = \int_0^l P(x) dx = \int_0^l p_0 \frac{x}{l} dx = \frac{p_0}{l} \int_0^l x \cdot dx = \frac{1}{2} p_0 l$$

et

$$d = \frac{\int_0^l x \cdot \left(\frac{p_0}{l} \cdot x\right) dx}{\frac{1}{2} p_0 l} = \frac{\frac{1}{3} p_0 l^2}{\frac{1}{2} p_0 l} = \frac{2}{3} l$$

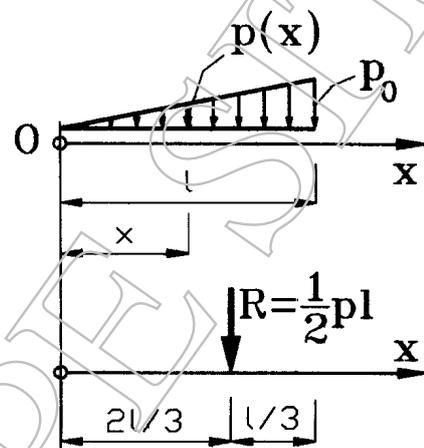


Fig. 2.36

APPLICATION 2.12. :

Déterminer le torseur de réduction par rapport du point O, fig. A.12

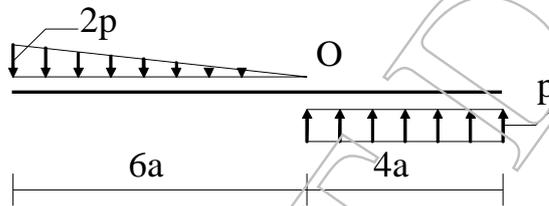
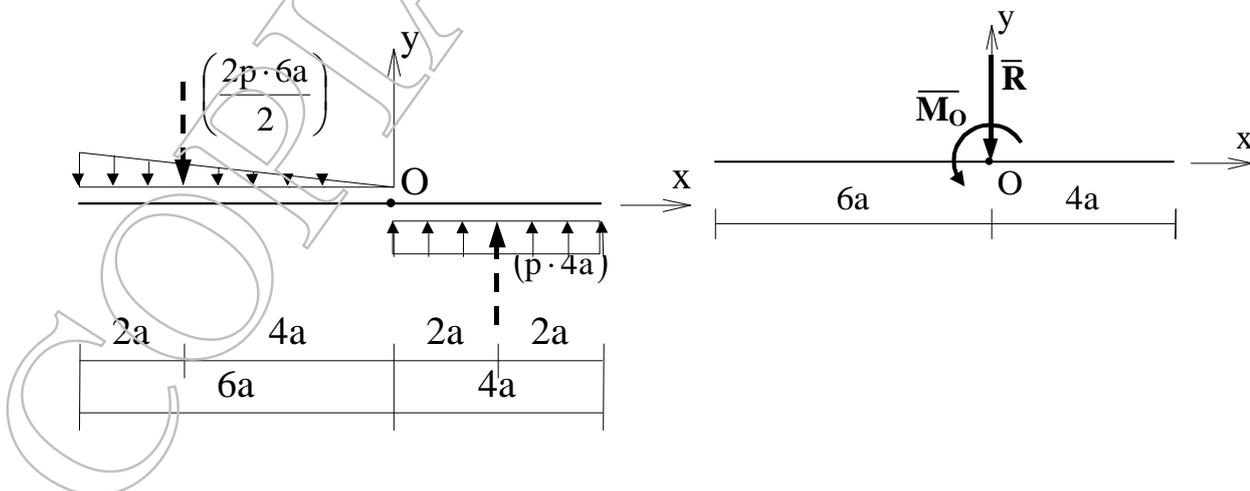


Fig. A.2.12

Solution :



$$\bar{R} = 0\bar{i} + \left(-\frac{2p \cdot 6a}{2} + p \cdot 4a\right)\bar{j}$$

$$\bar{M}_O = \left(+\left(\frac{2p \cdot 6a}{2}\right)\left(\frac{2}{3}6a\right) + (p \cdot 4a)\frac{4a}{2}\right)\bar{k} = +32pa^2\bar{k}$$

APPLICATION 2.13. :

Réduire le système de forces, fig. A.2.13

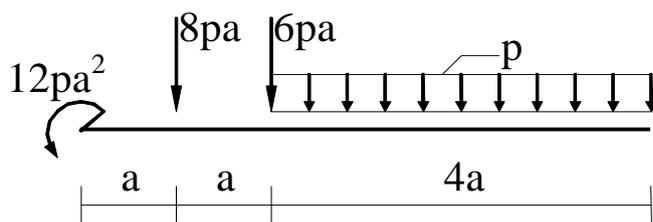
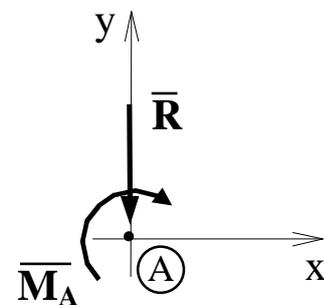
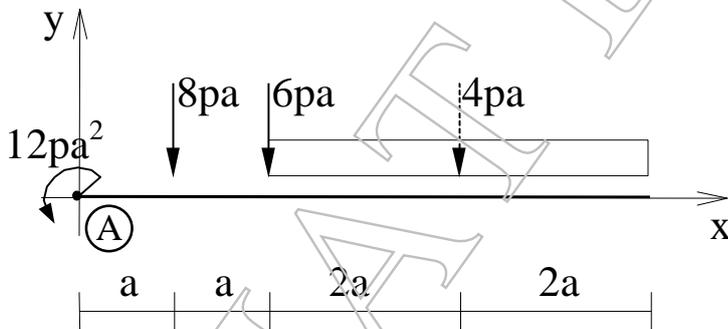


Fig. A.2.13

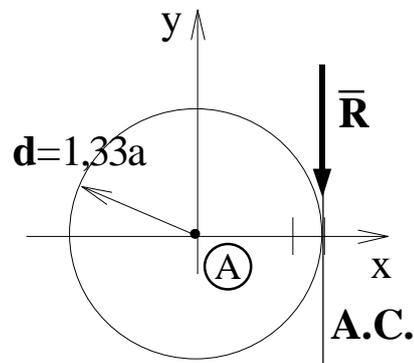
Solution :

$$\bar{R} = 0 \cdot \bar{i} + [-8pa - 6pa - (p \cdot 4a)] \cdot \bar{j} = 0 \cdot \bar{i} - 18pa \cdot \bar{j}$$

$$\bar{M}_A = \bar{k} \cdot [12pa^2 - 8pa \cdot a - 6pa \cdot 2a - (p \cdot 4a)(2a + 2a)] = -24pa^2 \cdot \bar{k}$$



$$d = \frac{M_A}{R} = \frac{24pa^2}{18pa} = 1,33a$$



APPLICATION 2.14. :

Pour le mur de soutènement de la fig. A.14, déterminer l'excentricité.

Solution :

$$G_1 = \gamma V$$

$$G_1 = 12,48 \text{ kN}$$

$$G_2 = 19,20 \text{ kN}$$

$$R_1 = \frac{1}{2} p A$$

$$R_2 = p A$$

$$R_1 = 4,00 \text{ kN}$$

$$R_2 = 4,70 \text{ kN}$$

$$V = \sum F_{\text{verticales}}$$

$$H = \sum F_{\text{horizontales}}$$

$$M_O = \pm \sum F d$$

$$V = 35,68 \text{ kN}$$

$$H = 14,70 \text{ kN}$$

$$M_O = - 5,35 \text{ kNm}$$

$$e = \frac{M_O}{V}$$

$$e = 0,15 \text{ m}$$

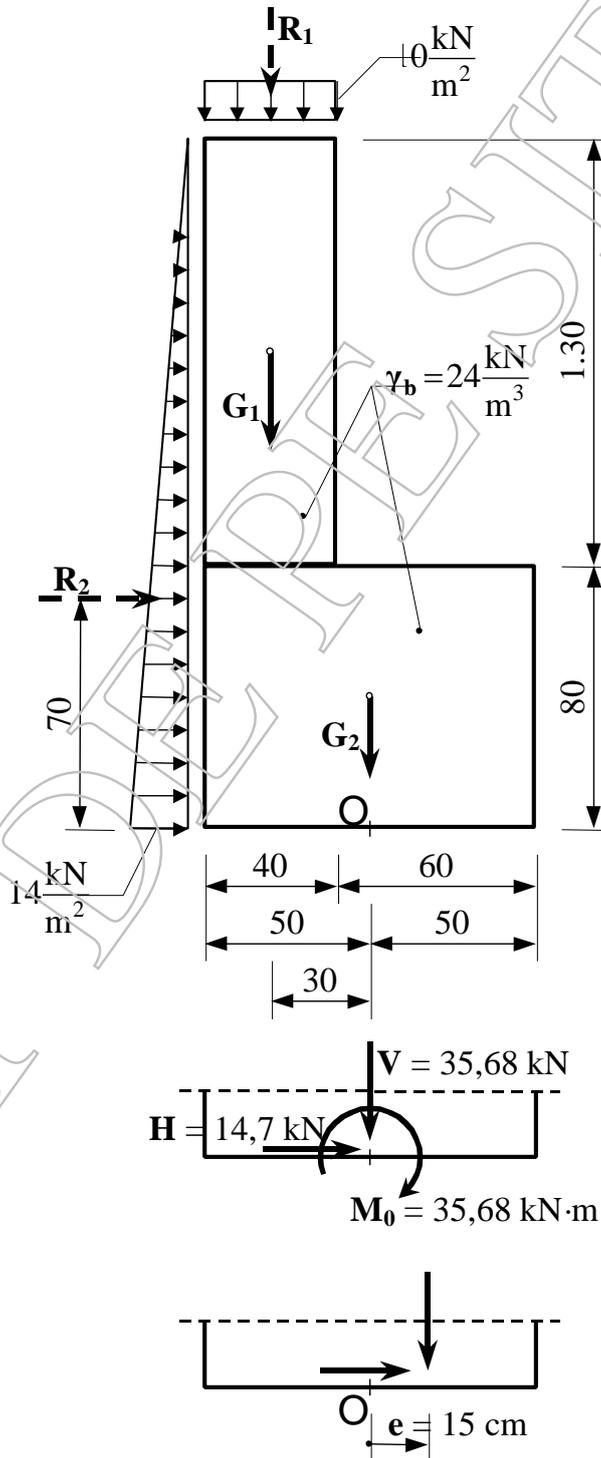


Fig. A.2.14