3.

CENTRES DE GRAVITE (Centres de masse)

3.1
POIDS D'UN SYSTEME MATERIEL. CENTRES DE GRAVITE. CENTRES DE MASSE

Toutes particules d'un corps se trouvant près de la surface de la Terre est soumise à l'action d'une force dirigée verticalement vers le bas et appelée **force de pesanteur** (ou force de gravitation).
Pour les corps dont les dimensions sont très petites par rapport au rayon de la Terre, on peut admettre que les forces de pesanteur des particules sont parallèles et conservent une grandeur constante. Le champ de pesanteur dans lequel ces conditions sont remplies est dit champ de pesanteur uniforme.
Soit un système discret de n points matériels A_i, ayant les masses m_i et les vecteurs de position $\bar{r}_i$ par rapport à un repère fixe. Chaque point matériel est le point d'application d'une force $\overline{G}_i = m_i \,\bar{g}$ (3.1)
où $\bar{g}$ est l'accélération gravitationnelle
La résultante de ces forces représente le poids du système matériel

$$\overline{G} = \left(\sum_{1}^{n} m_i\right)\bar{g} \qquad (3.2)$$

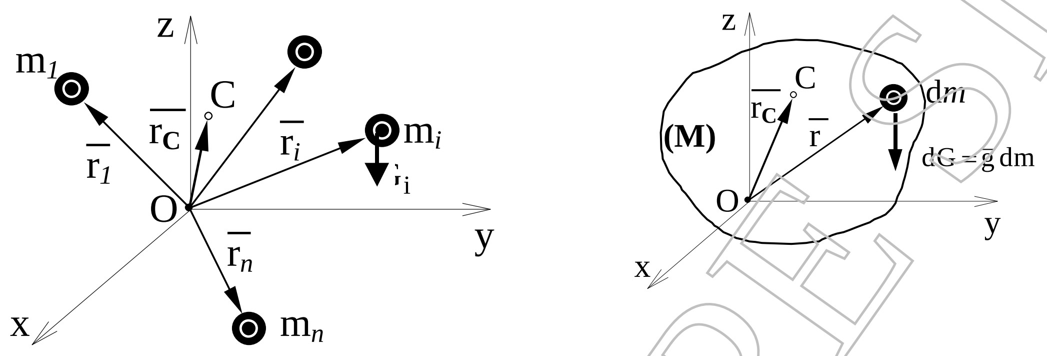
La résultante $\overline{G}$ est appliquée dans le point C centre de forces parallèles qui a le vecteur de position $\bar{r}_C = \dfrac{\sum_{1}^{n} G_i\,\bar{r}_i}{\sum_{1}^{n} G_i}$ (3.3)

Ce point C est appelé le centre de gravité du système de points matériels.

Le système des forces $\overline{G}_i$ est un système de forces parallèles que nous avons étudié dans le chapitre précédent. Il en résulte les expressions suivantes pour le vecteur de position du centre de gravité:

- pour un système discret de points matériels, fig. 3.1.a:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_1^n m_i \bar{r}_i}{\sum_1^n m_i} \tag{3.4}$$



a. b.

Fig.3.1

- pour un système matériel qui est un **milieu continu**, fig.3.1.b:

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{domaine} \bar{r}\, dm}{\int_{domaine} dm} \tag{3.5}$$

On observe que la position du centre de gravité* C *dépend de la manière par laquelle les masses du système matériel sont distribuées, motif pour lequel, le centre de gravité est appelé aussi le centre de masse.

Si la position du système matériel est rapportée à un système de référence xOyz, on peut écrire :

$$\bar{r}_C = x_C \bar{i} + y_C \bar{j} + z_C \bar{k} \qquad \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

et les relations vectorielles (3.4, 3.5) donnent les coordonnées du centre de masse du système matériel:

$$x_C = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n m_i}; \quad y_C = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n m_i}; \quad z_C = \frac{\sum_1^n m_i z_i}{\sum_1^n m_i} \tag{3.6}$$

ou :

$$x_C = \frac{\int\limits_{dom.} x\,dm}{\int\limits_{dom.} dm}; \quad y_C = \frac{\int\limits_{dom.} y\,dm}{\int\limits_{dom.} dm}; \quad z_C = \frac{\int\limits_{dom.} z\,dm}{\int\limits_{dom.} dm} \qquad (3.7)$$

Les grandeurs $\sum_1^n m_i x_i$, $\sum_1^n m_i y_i$, $\sum_1^n m_i z_i$ s'appellent MOMENTS STATIQUES du système par rapport aux plans yOz, xOz et xOy et $\sum_1^n m_i \bar{r}_i$ représente le MOMENT STATIQUE par rapport à un point.

Un moment statique par rapport à un plan peut être positif ou négatif.

Pour un solide parfait (milieu matériel continu et indéformable) :

- les moments statiques par rapport aux plans sont : $\int\limits_{dom.} x\,dm$, $\int\limits_{dom.} y\,dm$, $\int\limits_{dom.} z\,dm$

et $\int\limits_{dom.} \bar{r}\,dm$ est le moment statique par rapport à un point.

Les relations (3.4, 3.5, 3.6 et 3.7) peuvent être exprimées de la manière suivante:

$$\sum_1^n m_i \bar{r}_i = M\bar{r}_C\ ;\ \sum_1^n m_i x_i = M x_C\ ;\ \sum_1^n m_i y_i = M y_C\ ;\ \sum_1^n m_i z_i = M z_C \qquad (3.8.a)$$

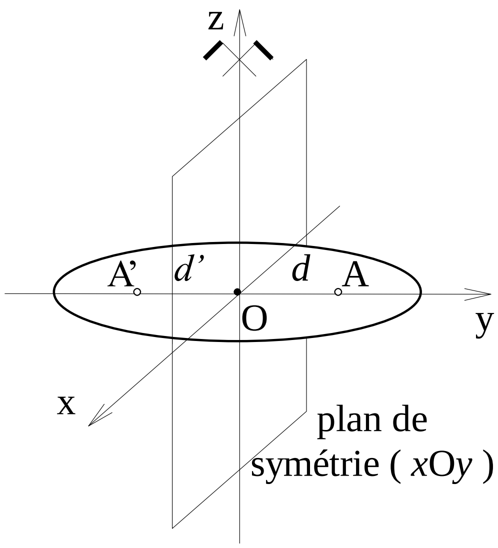
$$\int\limits_{dom.} \bar{r}\,dm = M\bar{r}_C;\ \int\limits_{dom.} x\,dm = M x_C;\ \int\limits_{dom.} y\,dm = M y_C;\ \int\limits_{dom.} z\,dm = M z_C \qquad (3.8.b)$$

On peut énoncer le THEOREME DES MOMENTS STATIQUES:

Le moment statique d'un système matériel par rapport à un point ou à un plan est égal au produit entre la masse totale du système et le vecteur qui lie ce point au centre de masse, respectivement la distance (positive ou négative) du centre de masse au plan.

On observe que si un corps a un plan de symétrie, fig. 3.2, le moment statique par rapport à ce plan est égal à zéro et le centre de masse se trouve dans ce plan de symétrie.

$$m_A = m_{A'}$$
$$d' = -d$$



$$S_{xOy} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot d_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n/2} m_i \cdot d_i + \sum_{i=1}^{n/2} m'_i \cdot d'_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n/2} m_i \cdot d_i + \sum_{i=1}^{n/2} m_i \cdot (-d_i) = 0$$

Fig.3.2

De même, si un corps a un axe de symétrie, le centre de masse du corps se trouve sur cet axe de symétrie et si le corps a un centre de symétrie, son centre de masse se trouve en ce centre de symétrie.
La réciproque est aussi valable: par rapport aux plans et aux axes qui contiennent le centre de masse ou par rapport au centre de masse, les moments statiques sont égaux à zéro.

3.2
CENTRE DE GRAVITE DES CORPS HOMOGENES

Pour un corps homogène, la masse spécifique ρ (la masse de l'unité de volume, de surface ou de longueur) est la même en chaque point du corps (ρ=const.). Dans ce cas, la position du centre de masse dépend seulement de la forme géométrique du corps.

Les coordonnées du centre C deviennent :
- pour les barres homogènes,
  $dm = \rho dV$; $dV = A\,dl$, fig.3.3 :

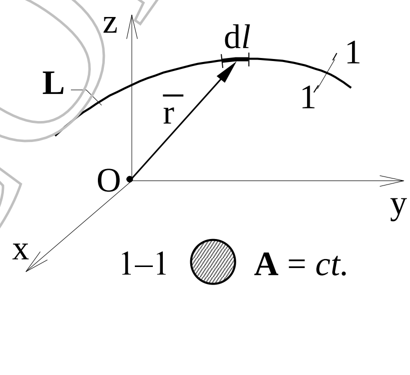


Fig. 3.3

$$x_C = \frac{\int_0^l x\rho A\,dl}{\int_0^l \rho A\,dl} = \frac{\int_0^l x\,dl}{\int_0^l dl} = \frac{\int_0^l x\,dl}{L}\ ; \qquad y_C = \frac{\int_0^l y\,dl}{L}\ ; \qquad z_C = \frac{\int_0^l z\,dl}{L} \tag{3.9}$$

- pour les plaques homogènes,
  $dm = \rho\,dV\ ;\ dV = h\,dA$, fig.3.4 :

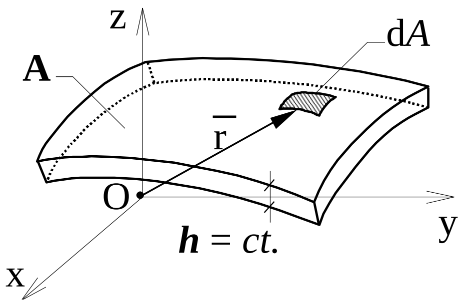


Fig. 3.4

$$x_C = \frac{\int_A x\rho h\,dA}{\int_A \rho h\,dA} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_A x\,dA}{A}\ ;$$

$$y_C = \frac{\int_A y\,dA}{A}\ ;$$

$$z_C = \frac{\int_A z\,dA}{A} \tag{3.10}$$

- pour les blocs homogènes,
  $dm = \rho\,dV$, fig.3.5 :

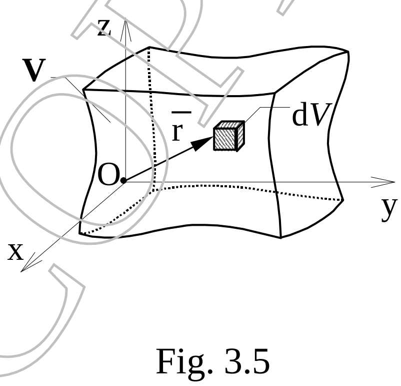


Fig. 3.5

$$x_C = \frac{\int_V x\rho\,dV}{\int_V \rho\,dV} = \frac{\int_V x\,dV}{\int_V dV} = \frac{\int_V x\,dV}{V}\ ;$$

$$y_C = \frac{\int_V y\,dV}{V}\ ; \tag{3.11}$$

$$z_C = \frac{\int_V z\,dV}{V}$$

Si on peut décomposer un corps en un nombre fini de parties, fig.3.6, telles que pour chacune d'elles la position du centre de gravité soit connue; on peut alors calculer directement les coordonnées du centre de masse de tout le corps par les formules suivantes:

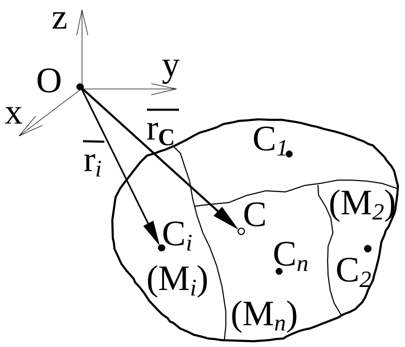


Fig. 3.6

$$x_C = \frac{\sum_1^n M_i\, x_i}{\sum_1^n M_i}; \quad y_C = \frac{\sum_1^n M_i\, y_i}{\sum_1^n M_i}; \quad z_C = \frac{\sum_1^n M_i\, z_i}{\sum_1^n M_i} \qquad (3.12)$$

Pour les corps homogènes :

- système de barres homogènes

$$x_C = \frac{\sum_1^n l_i\, x_i}{\sum_1^n l_i}; \; y_C = \frac{\sum_1^n l_i\, y_i}{\sum_1^n l_i}; \; z_C = \frac{\sum_1^n l_i\, z_i}{\sum_1^n l_i} \qquad (3.13)$$

- système de plaques homogènes

$$x_C = \frac{\sum_1^n A_i\, x_i}{\sum_1^n A_i}; \; y_C = \frac{\sum_1^n A_i\, y_i}{\sum_1^n A_i}; \; z_C = \frac{\sum_1^n A_i\, z_i}{\sum_1^n A_i} \qquad (3.14)$$

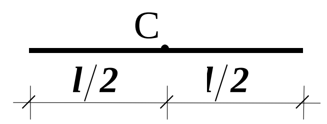
- système de blocs homogènes

$$x_C = \frac{\sum_1^n V_i x_i}{\sum_1^n V_i} \; ; \; y_C = \frac{\sum_1^n V_i y_i}{\sum_1^n V_i} \; ; \; z_C = \frac{\sum_1^n V_i z_i}{\sum_1^n V_i} \qquad (3.15)$$

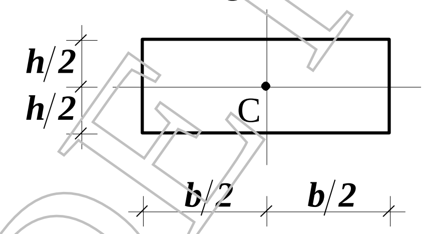
Les relations (3.12, 3.13, 3.14, 3.15) supposent une distribution discrète de masses, on doit concentrer les longueurs, les surfaces et les volumes en des points qui sont les centres de gravité des corps élémentaires.

Exemples pour des corps élémentaires

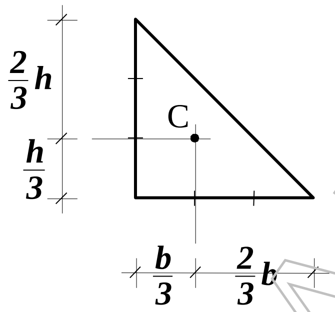
- la ligne droite



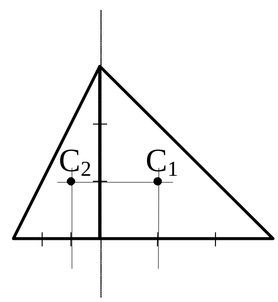
- le rectangle



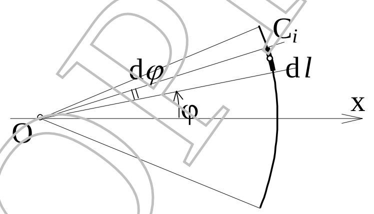
- le triangle droit

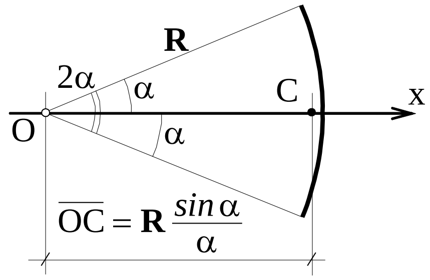


- triangle quelconque doit être partager en deux triangles droits



- le segment de cercle

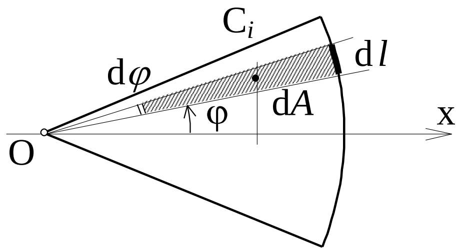


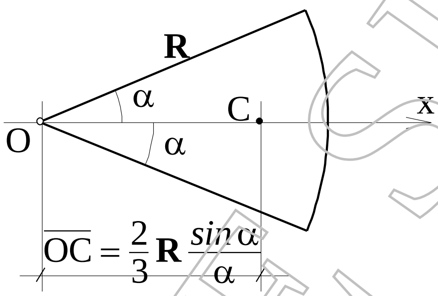


$$y_C = 0$$
$$dl = R \cdot d\varphi$$
$$x = R \cdot \cos\varphi$$

$$x_C = \frac{\int\limits_{dom} x \cdot dl}{\int\limits_{dom} dl} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cdot \cos\varphi \cdot R \cdot d\varphi}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cdot d\varphi} = R \cdot \frac{\sin\varphi\big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\varphi\big|_{-\alpha}^{\alpha}} = R \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

- le secteur de cercle





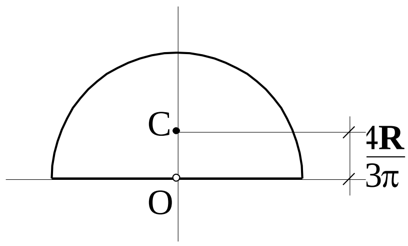
$$dA = \frac{R \cdot (R \cdot d\varphi)}{2} \quad ; \qquad x = \frac{2}{3} R \cdot \cos\varphi$$

$$x_C = \frac{\int\limits_{dom} x \cdot dA}{\int\limits_{dom} dA} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R \cdot \cos\varphi \cdot \frac{R \cdot (R \cdot d\varphi)}{2}}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R \cdot (R \cdot d\varphi)}{2}} = \frac{2}{3} R \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Cas particuliers pour le secteur du cercle

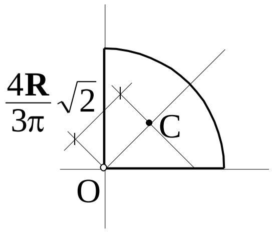
- le demi-cercle $\alpha = \frac{\pi}{2}$
  - le segment de cercle $L = \pi \cdot R$ $OC = \frac{2R}{\pi}$
  - le secteur de cercle

$A = \frac{\pi}{2} \cdot R^2$ $OC = \frac{4R}{3\pi}$



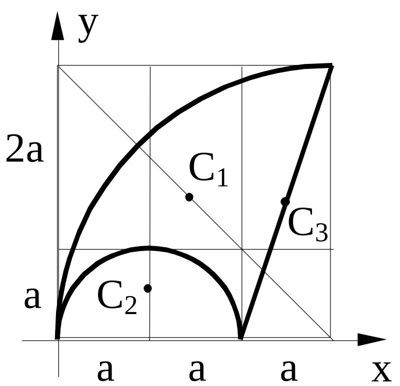
- le quart de cercle $\alpha = \frac{\pi}{4}$
  - le segment de cercle $L = \pi \cdot R / 2$ $OC = \frac{2R}{\pi}\sqrt{2}$
  - le secteur de cercle

$A = \pi \cdot R^2 / 4$ $OC = \frac{4R}{3\pi}\sqrt{2}$



APPLICATION 3.1. :
Déterminer la position de centre de gravité de la ligne polygonale, fig. A.3.1.a, et de la plaque homogène, fig. A.3.1.b, définie par les caractéristiques mentionnées sur les figures

- la ligne



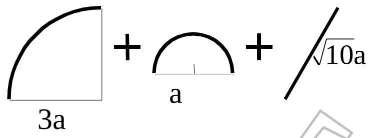
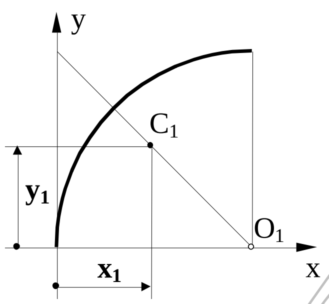


Fig. A.3.1.a

Solution:



$$L_1 = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2\pi 3a}{4}$$

$$O_1C_1 = R\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 3a\frac{\sin 45^0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{6a\sqrt{2}}{\pi}$$

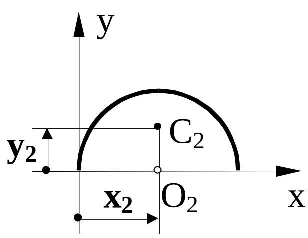
$$x_1 = R - O_1C_1\sin\frac{\pi}{4} = 3a - \frac{6a\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

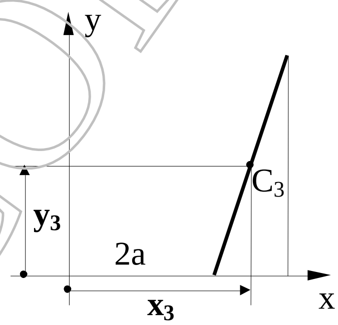
$$y_1 = O_1C_1\cos\frac{\pi}{4} = \frac{6a\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$L_2 = \frac{2\pi R}{2}$$

$$x_2 = R = a$$

$$y_2 = O_2C_2 = a\frac{\sin 90^0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi}$$





$$L_3 = \sqrt{a^2 + 9a^2}$$

$$x_3 = 2a + \frac{1}{2}a\sqrt{10}\cos\beta \quad ; \quad \cos\beta = \frac{a}{a\sqrt{10}}$$

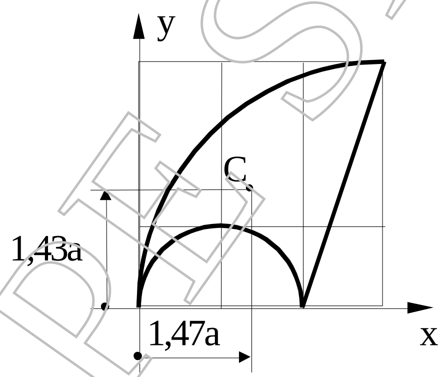
$$y_3 = \frac{1}{2}a\sqrt{10}\sin\beta \quad ; \quad \sin\beta = \frac{3a}{a\sqrt{10}}$$

le tableau

Corps	L_i	x_i	y_i	$L_i\,x_i$	$L_i\,y_i$
I	4,17 a	1,089 a	1,911 a	5,13 a^2	9,0 a^2
II	3,14 a	1 a	0,637 a	3,14 a^2	2,0 a^2
III	3,16 a	2,5 a	1,5 a	7,90 a^2	4,74 a^2
	11,01 a			16,17 a^2	15,74 a^2

$$x_C = \frac{\sum_1^n L_i\,x_i}{\sum_1^n L_i} = \frac{16{,}17a^2}{11{,}01a} = 1{,}47\,a$$

$$y_C = \frac{\sum_1^n L_i\,y_i}{\sum_1^n L_i} = \frac{15{,}74a^2}{11{,}01a} = 1{,}43\,a$$



- ***la plaque***

le système de référence la décomposition et les centres de gravité

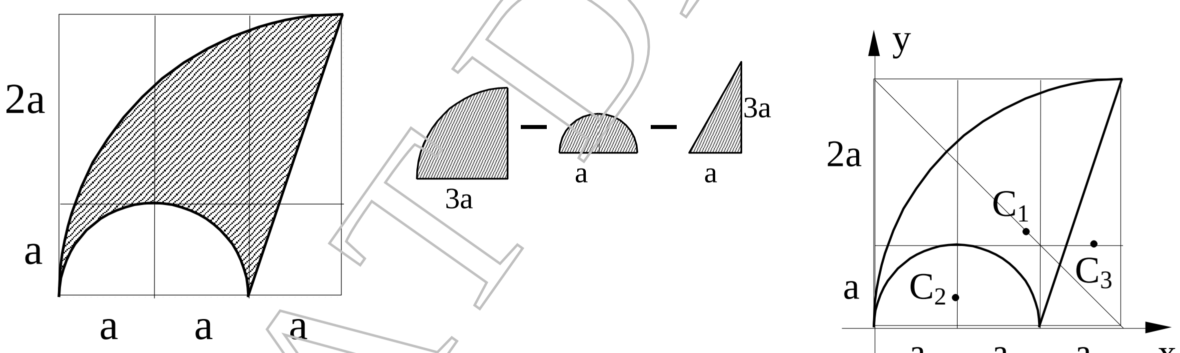
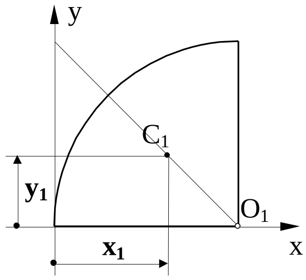


Fig. A.3.1.a

Solution :

les calcules partielles

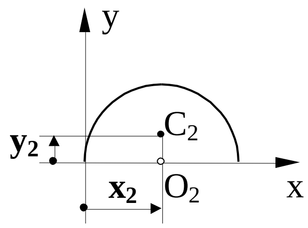


$$A_1 = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi 9a^2}{4}$$

$$O_1C_1 = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3}3a\frac{\sin 45^0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4a\sqrt{2}}{\pi}$$

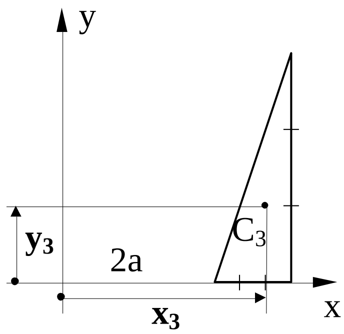
$$x_1 = R - O_1C_1\sin\frac{\pi}{4} = 3a - \frac{4a\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}} = 3a - \frac{4a}{\pi}$$

$$y_1 = O_1C_1 \cos\frac{\pi}{4} = \frac{4a\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4a}{\pi}$$



$$A_2 = \frac{\pi R^2}{2} \qquad x_2 = R = a$$

$$y_2 = O_2C_2 = \frac{2}{3}a\frac{\sin 90^0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi}$$



$$A_3 = \frac{1}{2}a\,3a = 1{,}5a$$

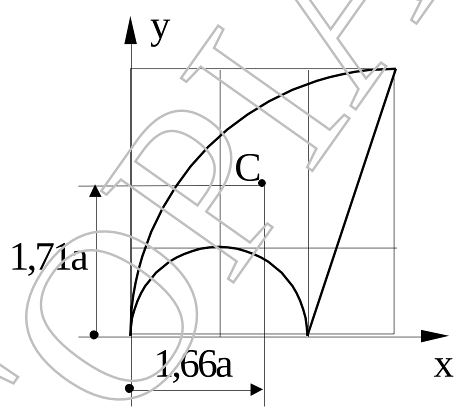
$$x_3 = 2a + \frac{2}{3}a = \frac{8}{3}a$$

$$y_3 = \frac{1}{3}3a = a$$

le tableau

Corps	A_i	x_i	y_i	$A_i\ x_i$	$A_i\ y_i$
I	7,065 a^2	1,726 a	1,274 a	12,194 a^3	9,0 a^3
II	- 7,065 a^2	1 a	0,425 a	- 1,57 a^3	- 0,667 a^3
III	- 1,5 a^2	2,667 a	1 a	- 4,0 a^3	- 1,50 a^3
	3,995 a^2			6,624 a^3	6,833 a^3

le résultat



$$x_C = \frac{\sum_1^n A_i\ x_i}{\sum_1^n A_i} = \frac{6{,}62a^3}{3{,}995a^2} = 1{,}66a$$

$$y_C = \frac{\sum_1^n A_i\ y_i}{\sum_1^n A_i} = \frac{6{,}833a^3}{3{,}995a^2} = 1{,}71a$$

APPLICATION 3.2. :
Déterminer la position de centre de gravité de la plaque homogène, fig. A.3.2.

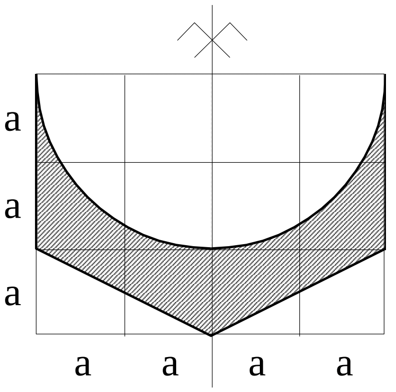
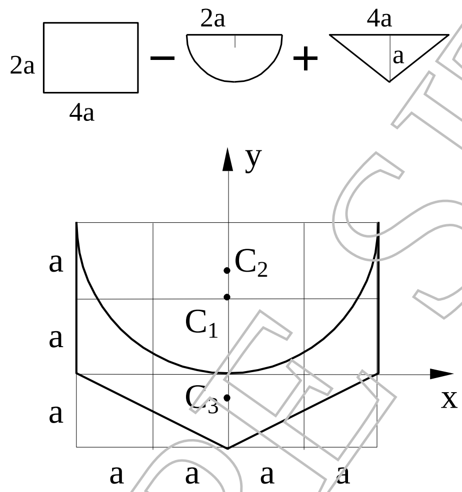
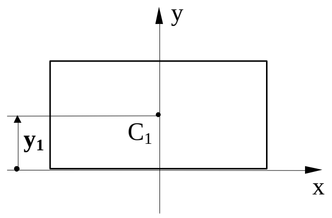


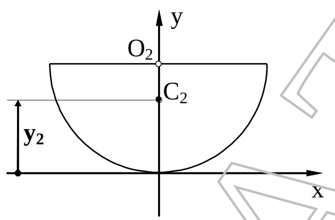
Fig. A.3.2



Solution :
Observation : la plaque a un axe de symétrie ; on choisit l'axe y comme cet axe, donc $x_C = 0$

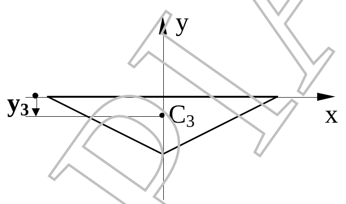


$A_1 = 2a\,4a = 8a^2$
$x_1 = 0$
$y_1 = a$



$$A_2 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi 4a^2}{2}$$

$$y_2 = R - O_2C_2 = 2a - \frac{8a}{3\pi}$$



$$A_3 = \frac{1}{2} a\,4a = 2a^2$$

$$y_3 = -\frac{1}{3}a$$

le tableau

Corps	A_i	y_i	$A_i\,y_i$
I	$8\ a^2$	a	$8\ a^3$
II	$-\ 6{,}28\ a^2$	1,151 a	$-\ 7{,}228\ a^3$
III	$2\ a^2$	- 0,333 a	$-\ 0{,}667\ a^3$
	$3{,}72\ a^2$		$0{,}105\ a^3$

$$y_C = \frac{\sum_1^n A_i\, y_i}{\sum_1^n A_i} = \frac{0{,}105a^3}{3{,}72a^2} = 0{,}028a$$