1.3 Mouvements particuliers du point

Mouvement rectiligne uniformément varié. La trajectoire du point est une ligne droite et l'accélération est constante (fig. 1.10)

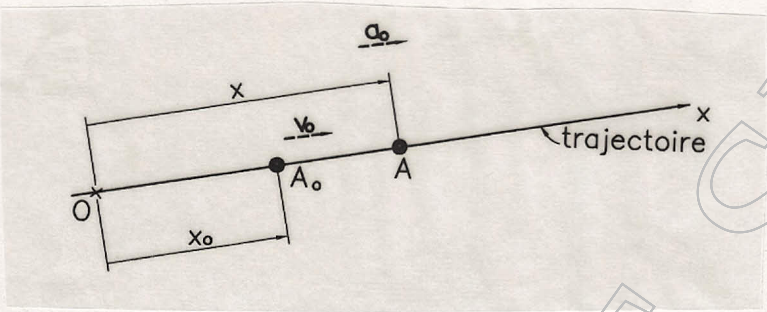

Fig. 1.10

On étudie le mouvement dans le système cartésien suivant la fig. 1.10

On connaît : $a_x = a_0$

Les conditions initiales : $t = 0$

$v_x = v_0$; $x = x_0$

Compte tenu de (1.16) et (1.13) on trouve

$$dv_x = a_0 dt \quad \rightarrow \quad v_x = a_0 t + C_1$$

$$d_x = v_x dt = (a_0 t + C_1)dt \rightarrow x = a_0 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration dépendants des conditions initiales. Si à l'instant initial $t = 0$, on a les conditions $x = x_0$ et $\dot{x} = v_0$ il s'en déduit aisément :

$C_1 = v_0 \qquad C_2 = x_0$

Donc l'équation du mouvement a la forme

$$x = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 \tag{1.35}$$

Mouvement circulaire uniforme. Le point est animé d'un mouvement suivant un cercle dont le rayon est donné R (fig. 1.11). L'accélération tangentielle $a_\tau = a_0$ (constante)

On utilise les coordonnées naturelles (Frenet)

$$s = \theta R$$

$$a_\tau = \ddot{s} = \ddot{\theta} R = a_0 \qquad \ddot{\theta} = a_0 / R \; = \text{constante} \tag{1.36}$$

ou $\dfrac{d}{dt}(\dot{\theta}) = \dfrac{a_0}{R}$

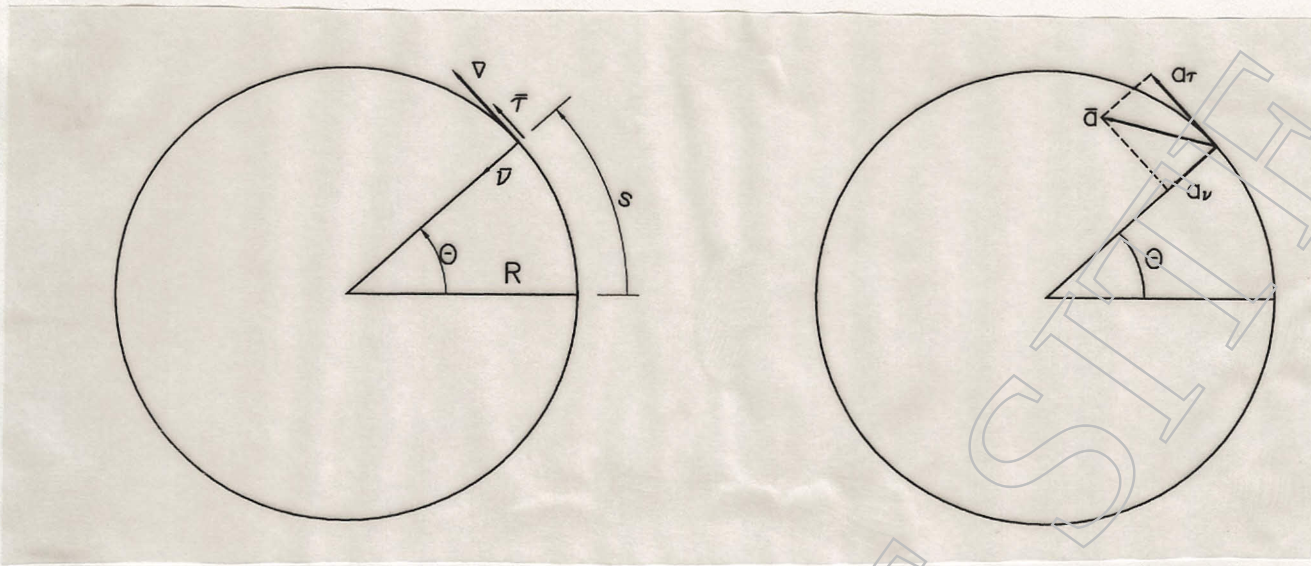

Fig. 1.11

On définit la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{a_0}{R} \qquad d\omega = \frac{a_0}{R}dt \qquad \omega = \frac{a_0}{R}t + C_1 \tag{1.37}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{a_0}{R}t + C_1 \qquad d\theta = \left(\frac{a_0}{R}t + C_1\right)dt$$

$$\theta = \frac{a_0}{R}\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \tag{1.38}$$

Les conditions initiales sont: $t=0$; $\theta = \theta_0$; $v = v_0$

Vitesse du point – On applique équation (1.20)

$$v = \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega = a_0 t + C_1 R$$

À l'instant $t = 0$

$$v_0 = C_1 R \qquad \rightarrow \qquad C_1 = v_0 / R \qquad \rightarrow \qquad v = a_0 t + v_0 \tag{1.39}$$

L'équation du mouvement a la forme

$$\theta = \frac{a_0}{R}\frac{t^2}{2} + \frac{v_0}{R}t + \theta_0 \tag{1.40}$$

L'expression de la coordonnée curviligne a la forme

$$s = R\theta = a_0\frac{t^2}{2} + v_0 t + R\theta_0 \tag{1.41}$$

On introduit les notions :

vitesse angulaire $$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \tag{1.42}$$

accélération angulaire $$\varepsilon = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \tag{1.43}$$

On obtient pour le cas du mouvement circulaire :

vitesse

$$v = R\omega \tag{1.44}$$

accélération tangentielle

$$a_\tau = \ddot{s} = \frac{d}{dt}(\dot{s}) = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\dot{\omega} = R\varepsilon \tag{1.45}$$

accélération normale

$$a_\nu = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2 \tag{1.46}$$

Dans les cas du mouvement uniforme varié ($a_\tau = a_0 = \text{cte}$) on trouve

$$\varepsilon_0 = \frac{a_0}{R} \quad \text{(constante)}$$

Les équations (1.38) et (1.37) deviennent

$$\theta = \varepsilon_0 \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \theta_0 \quad ; \quad \omega = \varepsilon_0 t + \omega_0 \tag{1.47}$$

La vitesse et l'accélération sont représentées sur la figure 1.11 a, b.
Le module de l'accélération vaut

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{1.48}$$