

4.

EQUILIBRE - GENERALITES

Dans le domaine du Génie Civil on accorde un intérêt particulier aux systèmes de forces équivalents à zéro, c'est à dire aux systèmes de forces qui agissant sur des systèmes matériels qui se trouvant en repos par rapport à un système de référence, les maintiennent dans cet état.

4.1 DEGRES DE LIBERTE.

On comprend par système matériel libre (point, ou corps, ou système de points et de corps), un système matériel qui peut effectuer des déplacements quelconques dans l'espace. Les positions quelconques qu'un système matériel peut occuper, sont dépendantes seulement des forces actives qui agissent sur ce système.

Pour déterminer la position du système dans l'espace est nécessaire de connaître un nombre de paramètres géométriques indépendants par rapport à un système de référence (distances ou angles).

Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de paramètres géométriques indépendants

Des exemples: Un point matériel libre a trois degrés de liberté dans l'espace (trois possibilités distinctes de mouvement – translations suivant les axes : x_P , y_P , z_P), fig. 4.1.a.

En plan il y a deux degrés de liberté (translations suivant les axes : x_P , y_P), fig. 4.1.b.

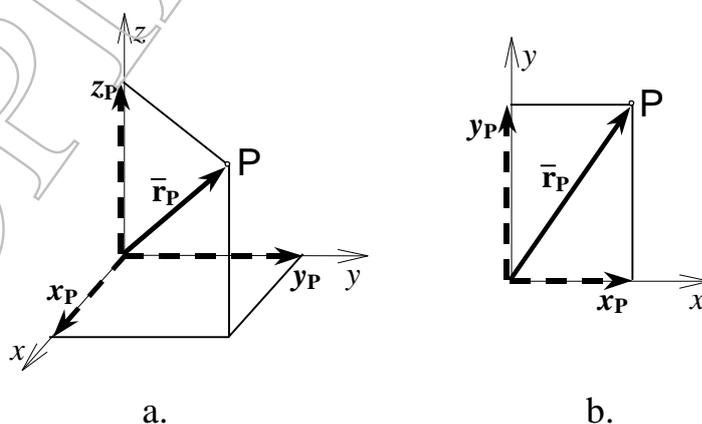


Fig.4.1

4.2

LA LIAISON

On appelle LIAISON, toute obligation géométrique imposée à un point (ou corps) matériel. L'effet mécanique d'une liaison est de réduire le nombre de degrés de liberté et implicitement celui de paramètres géométriques indépendants qui détermine la position du point (ou du corps) dans l'espace.

Une liaison simple réduit avec "un" les degrés de liberté.

Les liaisons peuvent être:

a) par rapport à l'existence de la force de frottement:

- sans frottement (lisses, idéale) - si l'on peut, en première approximation, négliger le frottement;
- avec frottement (réelles).

b) par rapport au sens d'action de la liaison, fig. 4.2.a, b:

- unilatérale - la liaison qui empêche le déplacement dans un seul sens - exemple: la liaison par le fil (la liaison existe seulement si le fil est tendu)
- bilatérale - la liaison qui empêche en double sens le déplacement - exemple: la liaison par une barre (la liaison existe sur la direction de la barre aussi pour tension que pour compression)

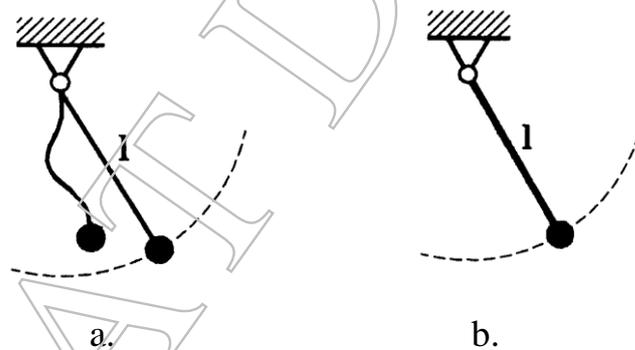


Fig. 4.2

c) par rapport à la dépendance de temps

- olonomes – les liaisons sont dépendantes de temps
- scleronomes – les liaisons ne sont pas dépendantes de temps

4.3

L'AXIOME DES LIAISONS:

Toute liaison peut être supprimée et remplacée par des forces de liaison ayant le même effet mécanique que la liaison supprimée. L'effet mécanique est une force si la liaison

empêche une translation et un moment si la liaison empêche une rotation.

Par cette opération, le point (ou le corps) matériel peut être considéré comme libre, sous l'action des forces actives et des forces de liaisons.

Notations :

G_1^0 le nombre de degré de liberté pour le système matériel libre ;

G_1 le nombre de degré de liberté pour le système matériel avec des liaisons ;

l_s le nombre de liaisons simples.

$$G_1 = G_1^0 - l_s \quad (4.1)$$

Un système matériel soumis à un système de forces extérieures (actives) qui n'est pas en équilibre peut être dans les situations suivantes :

1- si le système matériel est libre, il peut se déplacer en rapport des éléments du torseur de réduction ;

2- si le système matériel a un nombre de liaisons plus petit que le nombre des degrés de liberté, il peut se déplacer sur des directions quelconques et sur autres directions les déplacements sont bloqués;

3- si le nombre des liaisons du système est égales avec le nombre de degrés de libertés (ou plus grand), il est fixe.

En ce qui concerne l'étude de l'équilibre d'un système matériel il y a différents types de problèmes :

I - on connaît les forces qui agissent et on doit déterminer les paramètres de la position d'équilibre – le problème a une solution unique;

II - on connaît une partie des paramètres de la position d'équilibre et une partie des forces qui agissent sur le système matériel et on doit déterminer le reste des inconnues;

III - on connaît la position d'équilibre du système matériel et on doit déterminer le système de forces – le problème n'a pas une solution unique parce qu'il existe beaucoup des systèmes de forces équivalent.

5.

STATIQUE DU POINT MATERIEL

5.1 GENERALITES

On sait que LE POINT MATERIEL est un modèle mathématique qui représente un corps matériel dont on peut négliger les dimensions dans certains types de problèmes. Un élément caractéristique de ce modèle est le point géométrique qui donne la position du corps (voire fig. 1.4, chapitre 1.).

On comprend par POINT MATERIEL LIBRE, un point matériel qui peut effectuer des déplacements quelconques dans l'espace. Les positions quelconques qu'un point matériel peut occuper sont dépendantes seulement des forces actives qui agissent sur ce point.

Un point matériel libre a trois degrés de liberté dans l'espace (trois possibilités distinctes de mouvement). Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de paramètres géométriques indépendants qui déterminent la position du point dans l'espace.

Un point matériel, dont les déplacements dans l'espace sont limités par d'autres points ou corps liés à lui, ou se trouvant en contact avec lui, s'appelle POINT MATERIEL NON LIBRE (géné) ou POINT MATERIEL SOUMIS A DES LIAISONS.

Exemples: un point matériel obligé de se trouver sur une surface a deux degrés de liberté - translations suivant les axes : x_P , y_P ; un point obligé de se trouver sur une courbe a un seul degré de liberté - s . Sur les figures 5.1 a, b on a représenté ces différents cas.

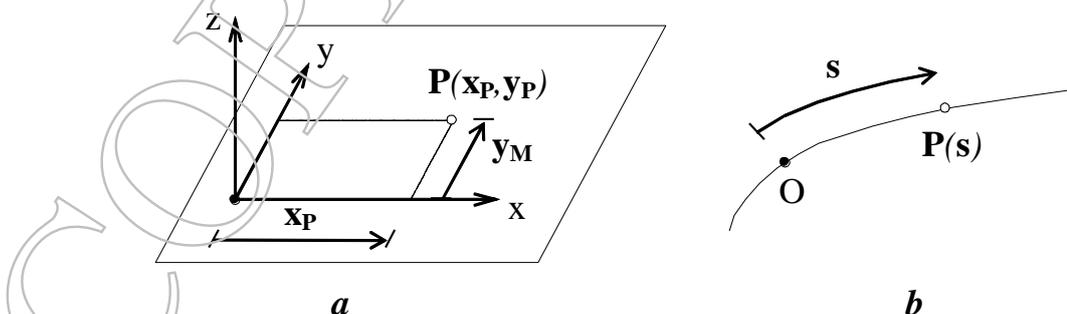
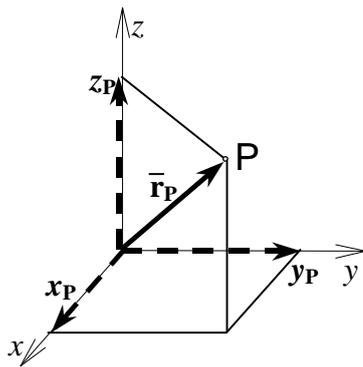


Fig. 5.1

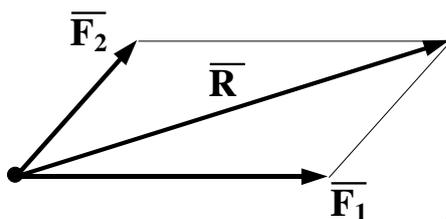


En espace un point matériel a trois degrés de liberté - translations suivant les axes : x_P, y_P, z_P , fig. 5.2.

Fig. 5.2

5.2 L'EQUILIBRE DU POINT MATERIEL LIBRE

Les forces qui agissent sur un point matériel forment des systèmes de forces concourantes.



Pour ces forces, fig. 5.3, le système équivalent le plus simple est représenté par une force unique - la résultante \bar{R} .

Fig. 5.3

Dans le domaine du Génie Civil on accorde un intérêt particulier aux systèmes de forces équivalents à zéro, c'est à dire aux systèmes de forces qui, agissant sur des systèmes matériels se trouvant en repos par rapport à un système de référence, les maintiennent dans cet état.

Un système de forces concourantes est un système équivalent à zéro si la résultante de ce système est égale à zéro :

$$\bar{R} = \sum_1^n \bar{F}_i = 0 \tag{5.2}$$

La condition vectorielle (5.2) donne trois équations scalaires pour un système de forces concourantes dans l'espace (5.3) et deux équations pour un système de forces concourantes dans le plan (5.4):

$$X = \sum_1^n X_i = 0 ; Y = \sum_1^n Y_i = 0 ; Z = \sum_1^n Z_i = 0 \tag{5.3}$$

$$X = \sum_1^n X_i = 0 ; Y = \sum_1^n Y_i = 0 \quad (5.4)$$

La condition géométrique de l'équilibre s'exprime par un polygone de forces fermé.

En ce qui concerne l'étude de l'équilibre d'un point matériel libre il y a différents types de problèmes :

- 1 - on connaît les forces concourantes qui agissent et on doit déterminer les paramètres de la position d'équilibre (trois dans l'espace et deux dans un plan) – le problème a une solution unique;
- 2 - on connaît une partie des paramètres de la position d'équilibre et une partie des forces qui agissent sur un point matériel et on doit déterminer le reste des inconnues;
- 3 - on connaît la position d'équilibre du point matériel et on doit déterminer le système de forces – le problème n'a pas une solution unique parce qu'il existe beaucoup des systèmes de forces équivalent.

On peut observer que les problèmes vont avoir des solutions uniques seulement si ces problèmes comportent 3 inconnues pour un système de forces en espace et 2 inconnues pour un système plan de forces.

5.3

L'EQUILIBRE DU POINT MATERIEL SOUMIS A DES LIAISONS

Soit un point matériel P obligé de se trouver sur une courbe plane, par exemple un cercle, fig. 5.4, sous l'action d'une seule force, son poids \vec{G} .

En principe, sous l'action de cette force, le point doit se déplacer. L'expérience montre que, le point obligé de se trouver sur le cercle peut rester en repos en diverses positions.

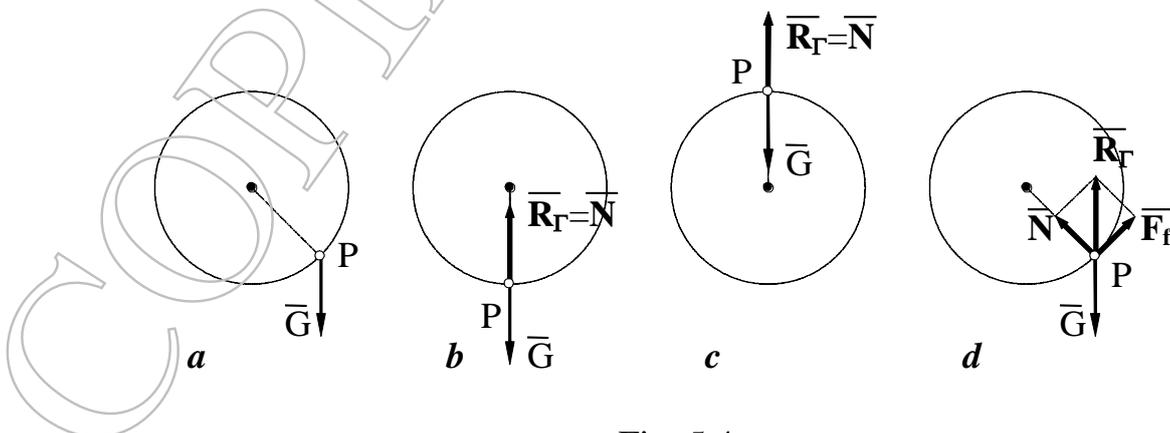


Fig. 5.4

Les positions d'équilibre représentées sur la figure 5.4 b, c, d, sont possibles parce que le cercle répond à l'action exercée par le point avec une réaction égale et de sens contraire (le principe de l'action et de la réaction).

En général, la réaction a deux composantes, fig. 5.4,d:

N - la réaction normale qui empêche le déplacement du point sur la direction de la normale à la courbe plane choisie comme exemple;

T = F_f - la force de frottement qui empêche, en certaines limites, le déplacement du point sur la direction de la tangente à la courbe.

Il en résulte : $\bar{R}_1 = \bar{N} + \bar{F}_f$ (5.5)

Cette force s'appelle FORCE DE LIAISON, ou FORCE DE REACTION, ou simplement REACTION et représente la force avec laquelle une liaison donnée agit sur le point matériel limitant tel ou tel de ses déplacements.

Par la suite, les forces qui ne sont pas des réactions seront appelées **FORCES ACTIVES** (forces extérieures, effectivement appliquées). La particularité d'une force active consiste en ce que son intensité sa direction et son sens ne dépendent pas des autres forces agissant sur le point matériel. La réaction diffère des forces actives car, son intensité dépend toujours de ces forces et ne peut pas être déterminée à l'avance; pour connaître l'intensité et le sens de la réaction il faut résoudre un problème correspondant de statique.

La réaction a la direction du déplacement qu'elle empêche. Lorsque la liaison empêche les déplacements du point matériel dans plusieurs directions à la fois, la direction de la réaction est inconnue et doit être déterminée au cours de la résolution du problème étudiée.

Dans les problèmes de la Mécanique, il est très important de savoir déterminer correctement les directions des forces de réaction. C'est pourquoi nous allons examiner maintenant comment sont dirigées les réactions de certains types de liaisons, caractéristiques pour un point matériel, fig. 5.5 a, b, c.

1. SURFACE LISSE ou SUPPORT. Une surface sera dite lisse si l'on peut, en première approximation, négliger le frottement. Une telle surface n'empêche le point de se déplacer que dans la direction de la normale à la surface en ce point, fig. 5.5.a. C'est pourquoi la réaction N d'une surface lisse est dirigée au long de la normale à la surface en le point P.

2. FIL. La liaison réalisée sous forme d'un fil souple inextensible, fig. 5.5.b, empêche le point P de s'éloigner du point de suspension du fil dans la direction AP. C'est pourquoi la réaction T du fil est dirigée le long de ce fil vers le point de suspension.

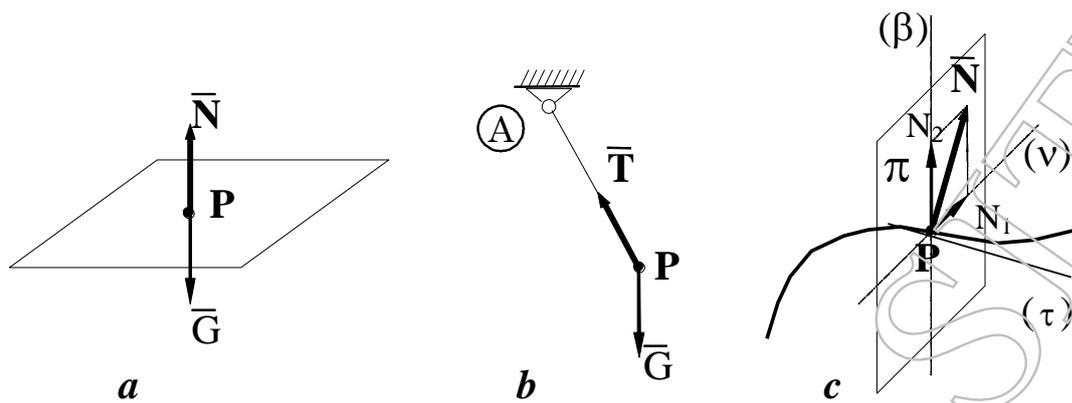


Fig. 5.5

3. COURBE LISSE. Une courbe lisse (on va négliger le frottement) empêche le point matériel, P, de se déplacer sur toute direction contenue dans le plan normal à la courbe, fig. 5.5.c. Si on choisit comme système de référence le trièdre de Frenet, (voire chapitre 2, fig. 2.2.b), on voit que l'effet de la liaison s'exprime par une force N de direction et de grandeur inconnue ayant des composantes sur les directions de la normale principale et de la binormale.

En connaissant les types des liaisons dans le cas d'un point matériel et leur effet mécanique, on peut appliquer l'axiome des liaisons: toute liaison peut être supprimée et remplacée par des forces de liaison (réactions) ayant le même effet mécanique que la liaison supprimée. Par cette opération, le point matériel peut être considéré comme libre, sous l'action des forces actives et des réactions.

L'équilibre du point matériel s'exprime par la relation:

$$\bar{R}_a + \bar{R}_l = 0 \tag{5.6}$$

où \bar{R}_a représente la résultante des forces actives et \bar{R}_l la résultante des forces de liaison.

La condition vectorielle (5.6) donne trois équations scalaires pour un système de forces concourantes dans l'espace (5.7) et deux équations pour un système de forces concourantes dans un plan (5.8). Ces équations sont de la même forme que les équations (5.3) et (5.4) avec la différence que, dans ce cas, les équations contiennent les réactions, comme des inconnues du problème.

En espace :

$$\begin{aligned} X &= \sum_1^n X_i^a + \sum_1^m X_j^l = 0; & Y &= \sum_1^n Y_i^a + \sum_1^m Y_j^l = 0; \\ Z &= \sum_1^n Z_i^a + \sum_1^m Z_j^l = 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

En plan :

$$X = \sum_1^n X_i^a + \sum_1^m X_j^l = 0 ; \quad Y = \sum_1^n Y_i + \sum_1^m Y_j^l = 0 \quad (5.8)$$

En général, à l'aide de ces équations scalaires on peut déterminer les inconnues d'un problème d'équilibre d'un point matériel: les réactions et les paramètres de la position d'équilibre. Ainsi :

I - un point matériel obligé de se trouver sur une surface lisse, (fig. 5.5.a), a la position définie par deux coordonnées et la réaction \bar{N} présente une seule inconnue, son module; le problème a une solution déterminée (trois équations pour trois inconnues) ;

II - un point matériel obligé de se trouver sur une courbe lisse en espace, (fig. 5.5.c) a la position définie par une seule coordonnée « s », (fig. 5.1.b) ; la réaction normale \bar{N} est contenue dans le plan normal à la courbe donc, les inconnues sont deux, les grandeurs des composantes sur les directions de la normale principale N_1 et de la binormale N_2 ; là aussi, le problème a une solution déterminée;

III - un point matériel obligé de se trouver sur une courbe lisse et plane, (fig. 5.4) a la position définie par une seule coordonnée « s » et la réaction \bar{N} , dirigée sur la direction normale à la courbe, introduit une seule inconnue, son module; le problème a une solution déterminée.

APPLICATION 5.1. :

Une sphère de poids \bar{G} et de rayon R est appuyée sur un plan incliné avec l'angle α par rapport à l'horizontale et arrêtée par un seuil de hauteur « a », fig. A.5.1.

Déterminer l'angle α du plan quand la sphère roule au delà du seuil.

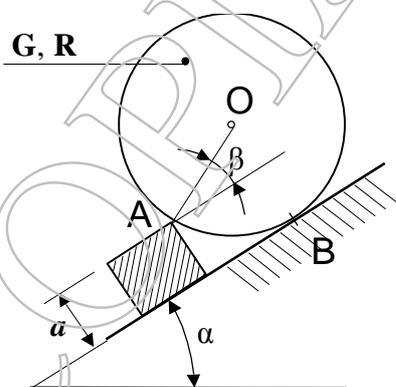


Fig. A.5.1.a

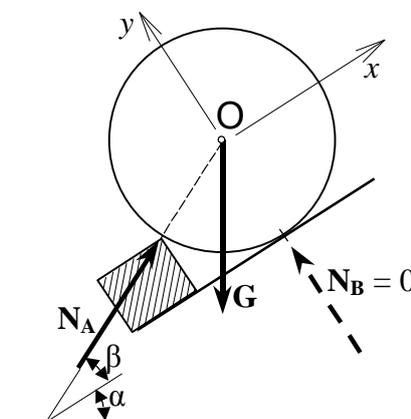


Fig. A.5.1.b

Solution:

Les forces qui agissent sur la sphère sont:

- le poids \vec{G}
- la réaction du plan N_B
- la réaction du seuil N_A

Toutes les forces qui agissent sur le corps sont concurrentes dans son centre de gravité et donc, on a deux équations d'équilibre

Dans le moment quand la sphère commence à rouler au-delà du seuil, la réaction N_B devient nulle.

$$\begin{cases} \sum x = 0 ; N_A \cos \beta - G \sin \alpha = 0 \\ \sum y = 0 ; N_A \sin \beta - G \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\text{tg} \alpha = \text{ctg} \beta$$

mais $\sin \beta = \frac{R - a}{R} \Rightarrow \text{tg} \alpha = \frac{\sqrt{a(2R - a)}}{R - a}$

5.4

L'EQUILIBRE DU POINT MATERIEL EN PRESENCE DU FROTTEMENT

L'expérience montre que lorsqu'on tend à déplacer un corps sur la surface d'un autre corps, fig. 5.6, dans le plan de contact des corps naît une force de résistance qui s'oppose à leur glissement relatif appelée **FORCE DE FROTTEMENT DE GLISSEMENT**. Cette force \vec{F}_f empêche le déplacement relatif des corps, mais entre certaines limites.

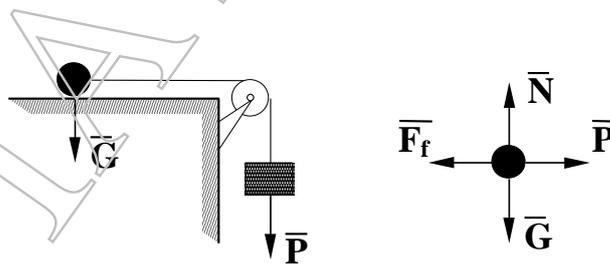


Fig. 5.6

L'apparition du frottement est conditionnée avant tout par la rugosité des surfaces qui produit une résistance au déplacement et par l'adhésion présente entre les corps pressés l'un contre l'autre. L'étude de toutes les particularités du phénomène de frottement est un problème physico - mécanique assez compliqué qui dépasse les limites d'un cours de Mécanique rationnelle.

Dans les calculs de pratique courante on se base d'habitude sur une série de lois générales, établies expérimentalement et qui reflètent avec une précision suffisante les particularités principales du phénomène de frottement. Ces lois, appelées **LOIS DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT AU REPOS** ont été énoncées par Coulomb de la manière suivante :

1. Lorsqu'on tend à déplacer un corps sur la surface d'un autre, il apparaît - dans le plan de contact des corps - une force appelée force de frottement de glissement dont l'intensité peut être comprise entre zéro et une valeur maximum appelée force de frottement limite. La force de frottement est dirigée dans le sens opposé à celui dans lequel les forces actives tendent à déplacer le corps.
2. L'intensité de la force de frottement limite est égale au produit du coefficient de frottement statique par le module de la réaction normale.

$$|\vec{F}_f|_{\max} = \mu |\vec{N}| \quad (5.9)$$

Le coefficient de frottement statique μ est un nombre pur. Il se détermine expérimentalement et dépend de la matière des corps en contact et de l'état des surfaces (caractère du traitement, température, humidité, graissage, etc.).

Valeurs de quelques coefficients de frottement:

- bois sur bois 0,4 - 0,7;
- métal sur métal 0,15 - 0,25 ;
- acier sur glace 0,027.

3. L'intensité de la force de frottement limite ne dépend pas des dimensions des surfaces en contact.

Réunissant la première et la deuxième loi, nous pouvons écrire qu'à l'équilibre, la force de frottement doit satisfaire la condition suivante:

$$|\vec{F}_f| \leq \mu |\vec{N}| \quad (5.10)$$

Les problèmes de l'équilibre d'un point matériel en présence du frottement comptent parmi les inconnues la force du frottement de glissement. Au système des trois équations d'équilibre on ajoute l'inégalité (5.10). La présence de cette inégalité fait qu'on obtient plusieurs solutions dans un problème d'équilibre d'un point matériel en présence du frottement, l'équilibre étant possible pour un domaine des valeurs des inconnues.

REMARQUES:

Il faut observer que les lois de Coulomb ont un caractère approximatif; elles sont plus proches de la réalité dans le cas du frottement des surfaces qui se trouvent

en repos et en l'absence du graissage. Même en ce cas, on doit montrer que :

- (1) pour des valeurs grandes de la réaction normale N , le coefficient de frottement statique n'est pas constant (sa valeur augmente);
- (2) si les surfaces sont très lisses (des aspérités assez petites), le coefficient μ augmente avec le temps et avec la température (le phénomène d'adhésion);
- (3) le coefficient μ varie avec la vitesse relative entre les corps (la valeur se diminue).

En général, tout ce qui a été dit ci-dessus se rapportait au frottement de glissement au repos. Lors du mouvement, la force de frottement est dirigée dans le sens opposé au mouvement et est égale au produit du coefficient de frottement dynamique (différent du coefficient statique) par la force de pression normale. Le coefficient de frottement de glissement dynamique est également une grandeur adimensionnée et se détermine expérimentalement. Sa valeur dépend non seulement de la matière et de l'état des surfaces mais également, dans une certaine mesure, de la vitesse du mouvement relatif des corps. Dans la majorité des cas, lorsque la vitesse augmente, la grandeur du coefficient diminue d'abord pour, ensuite, conserver une valeur presque constante.

5.5 L'ASPECT GEOMETRIQUE DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT

Jusqu'à présent, en analysant l'effet mécanique des liaisons, nous avons négligé le frottement et admis que les surfaces ou les courbes étaient lisses et leurs réactions dirigées à la direction des normales à ces surfaces, ou se trouvant dans des plans normaux à ces courbes. La réaction d'une liaison réelle (avec frottement) sera la somme de deux composantes :

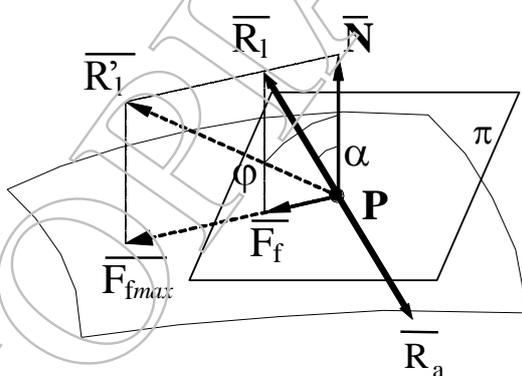


Fig.5.7

- * la réaction normale N ,
- * la force de frottement F_f qui lui est perpendiculaire, fig. 5.7 - le cas d'une surface.

Par conséquent, la réaction \vec{R}_1 s'écartera de la normale à la surface d'un certain

angle. Lorsque la force de frottement variera de zéro jusqu'à sa valeur limite $F_{f,max}$, la réaction \bar{R}_1 variera de N à \bar{R}'_1 et son angle α avec la normale augmentera de zéro jusqu'à une certaine valeur limite.

L'angle maximum φ que la réaction en présence du frottement forme avec la normale à la surface est appelé angle de frottement, l'angle de frottement représente le moment de la position limite de l'équilibre.

Pour une position quelconque de l'équilibre on peut écrire:

$$\bar{R}_1 = \bar{N} + \bar{F}_f \quad ; \quad \text{tg } \alpha = \frac{|\bar{F}_f|}{|\bar{N}|}$$

Si on considère la position limite de l'équilibre l'angle α devient φ et il en résulte

$$|\bar{F}_f|_{\max} = \mu |\bar{N}| \quad ; \quad \text{tg } \varphi = \frac{|\bar{F}_f|_{\max}}{|\bar{N}|} = \frac{\mu |\bar{N}|}{|\bar{N}|} = \mu \quad (5.11)$$

Le lieu géométrique de toutes les droites qui forment un angle avec la normale à la surface en un point donné est un cône à deux nappes, appelé cône de frottement.

Le point matériel se trouve en équilibre si la force de frottement réelle est plus petite que la force de frottement limite.

Il en résulte que:

1 - Un point matériel est en équilibre sur une surface rugueuse si la droite - support de la résultante des forces actives se trouve à l'intérieur du cône de frottement, fig. 5.8.

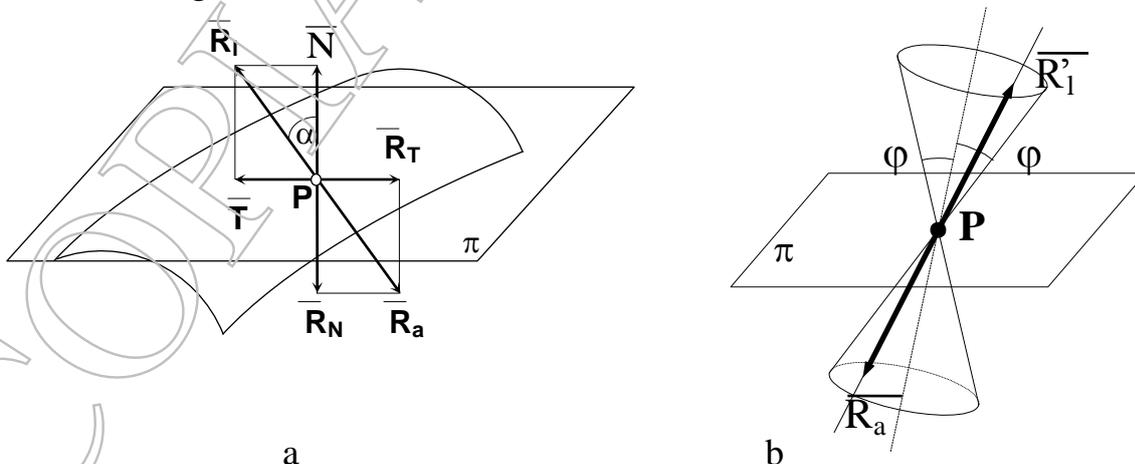


Fig. 5.8

2 - Si le point matériel se trouve sur une courbe rugueuse, le cône de frottement, fig. 5.9, a comme axe la tangente à la courbe dans le point considéré et l'angle

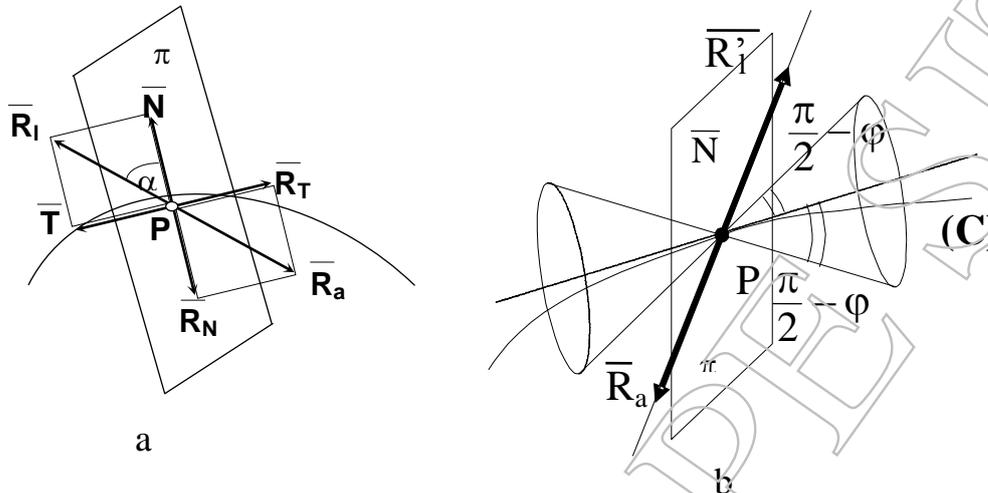


Fig. 5.9

$2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, donc le point matériel se trouve en équilibre si la droite - support de la résultante des forces actives est située à l'extérieur du cône de frottement pour ce point.

APPLICATION 5.2. :

Sur un plan rugueux ayant le coefficient de frottement μ , incliné avec l'angle α par rapport à l'horizontale il y a un point P de poids \bar{G} , fig. A.5.2. Le point P est attiré par deux points fixes A(0,0,0) et B(0,a,0) avec des forces élastiques (les coefficients d'élasticité sont égaux, k). Déterminer la position d'équilibre du point P.

Solution :

Les forces qui agissent sur le point sont

- le poids qui a la direction verticale $\bar{G} = G \sin \alpha \bar{i} + 0 \bar{j} - G \cos \alpha \bar{k}$

- les forces élastiques

$$\bar{F}_1 = k \overline{PA} = k(-x \bar{i} - y \bar{j}) + 0 \bar{k}$$

$$\bar{F}_2 = k \overline{PB} = k(-x \bar{i} + (a - y) \bar{j}) + 0 \bar{k}$$

- la force de frottement

$$\bar{F}_f = F_{fx} \bar{i} + F_{fy} \bar{j} + 0 \bar{k}$$

- la réaction du plan

$$\bar{N} = N \bar{k}$$

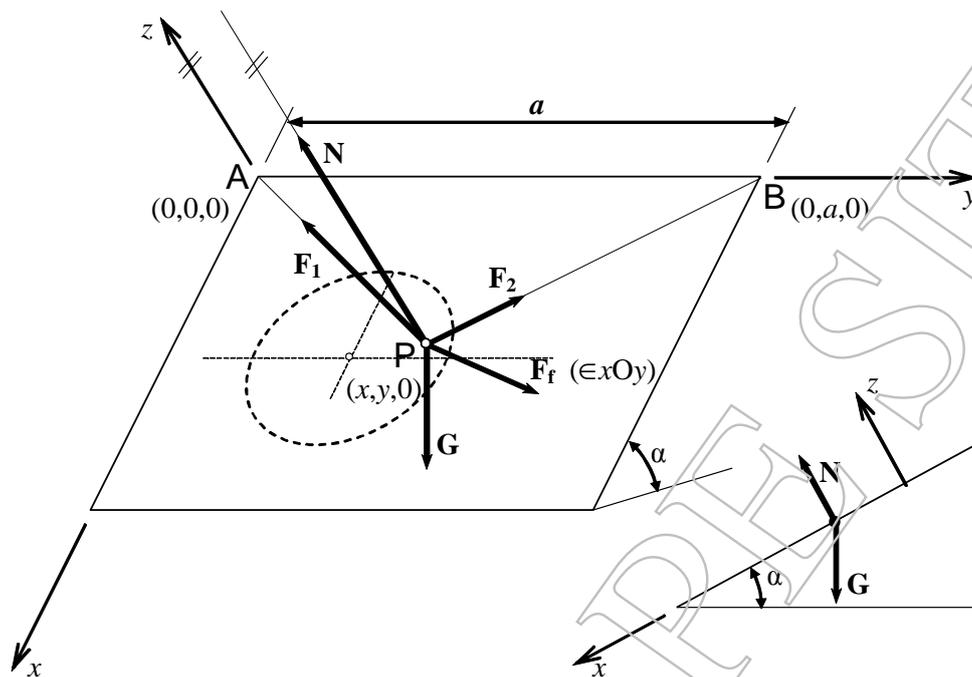


Fig. A.5.2

$$\begin{cases} \sum x = 0 ; -kx - ky + G \sin \alpha + F_{fx} = 0 \\ \sum y = 0 ; -ky + k(a-y) + F_{fy} = 0 \\ \sum z = 0 ; N - G \cos \alpha = 0 \\ \sqrt{F_{fx}^2 + F_{fy}^2} \leq \mu N \end{cases}$$

$$\left(x - \frac{G \sin \alpha}{2k}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2k}\right)^2 \leq \left(\frac{\mu G \cos \alpha}{2k}\right)^2$$

Les positions possibles pour l'équilibre sont tous les points dans l'intérieur et sur la frontière du cercle qui a:

- le centre dans le point définit $x_C = \frac{G \sin \alpha}{2k}$; $y_C = \frac{a}{2k}$

- le rayon $R = \frac{\mu G \cos \alpha}{2k}$

APPLICATION 5.3. :

Un point matériel de poids G, est soutenu par deux fils idéaux, fig. A.5.3.a
Etudier l'équilibre de ce point.

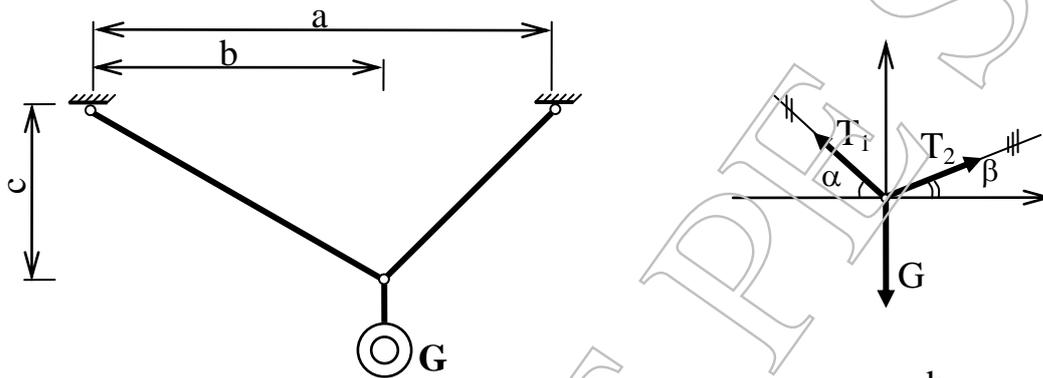
Solution :

1. Caractérisation géométrique et statique, inconnues :

$G_1 = 2 - 2 = 0$ le point est fixé ;

$E = 2N$ les inconnues sont de type mécanique – deux forces de liaison

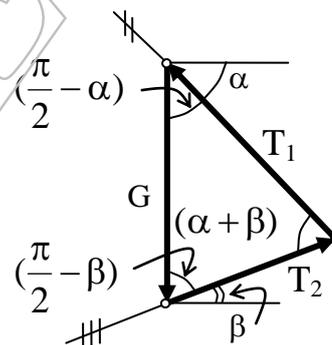
$E = N$ du point de vue le point est isostatique



a.

b.

Fig. A.5.3



c.

2. Equations d'équilibre :

2.1. Le schéma des forces est donné dans la figure A.5.3.b

$$\sum x = 0 ; -T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta = 0$$

$$\sum y = 0 ; T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta - G = 0$$

$$T_1 = G \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad T_2 = G \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

2.2. La méthode graphique, fig. A.5.c

- on construit un triangle avec un côté connu et les angles α et;

- on mesure les autres deux côtés qui sont T_1 et T_2 .

2.3. On peut aussi calculer les forces en appliquant le théorème des sinus:

$$\frac{G}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{T_1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)} = \frac{T_2}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$$

$$\frac{G}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{T_1}{\cos\beta} = \frac{T_2}{\cos\alpha} \quad \gg \gg T_1, T_2$$

3. Le commentaire: si $\alpha = 0$

$\beta = 0$ les forces T_1 et T_2 sont ∞ .

Dans la pratique on peut retrouver ce problème dans le cas au funiculaire où le fil ne doit pas être rectiligne.

6.

STATIQUE DU SOLIDE PARFAIT

6.1

STATIQUE DU SOLIDE PARFAIT LIBRE.

On appelle **SOLIDE PARFAIT** un système matériel de type milieu continu indéformable (la distance entre deux points quelconques du corps matériel reste toujours constante, indifféremment de la nature et de la grandeur des forces).

La statique du solide parfait étudie les conditions pour qu'un corps qui se trouve en repos reste en cet état sous l'action d'un système de forces. Ce système de forces s'appelle système équivalent à zéro ou système de forces en équilibre.

Un solide parfait peut se trouver en deux situations connues:

- solide parfait libre ;
- solide parfait soumis à des liaisons (géné).

Solide parfait libre est un corps matériel indéformable qui peut occuper toute position en espace sans aucune contrainte; cette position dépend seulement du système de forces actives qui agit sur ce corps. Aucun point du corps matériel ne connaît pas des restrictions géométriques (des liaisons).

On va établir le nombre de degrés de liberté d'un solide libre, c'est-à-dire le nombre des déplacements indépendants qui sont possibles; ce nombre de degrés de liberté est égal au nombre de paramètres scalaires indépendants qui sont nécessaires pour définir la position du corps matériel à un moment donné.

Pour déterminer la position d'un solide parfait en espace est nécessaire de connaître la position des trois points du solide donc 9 coordonnées. De ces 9 coordonnées, fig.6.1 seulement 6 sont indépendantes, car entre ces coordonnées il y en a 3 relations (qui résultent de l'hypothèse du solide parfait):

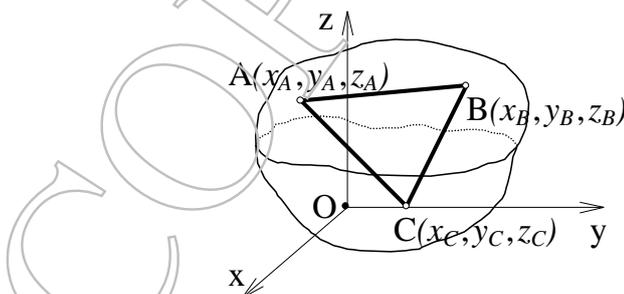


Fig. 6.1

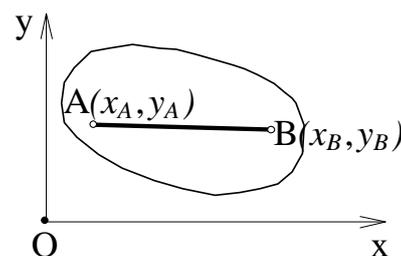


Fig. 6.2

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = C_1 \\ |\overline{AC}| &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = C_2 \\ |\overline{BC}| &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} = C_3 \end{aligned} \quad (6.1)$$

 9 - 3 = 6 paramètres scalaires indépendants

Un corps parfait libre en espace a 6 degrés de liberté.

Les 6 déplacements possibles sont:

- 3 translations sur la direction des axes OX, OY, OZ;
- 3 rotations autour de ses axes.

Pour le système matériel contenu dans un plan et sur lequel agit un système de forces contenu en ce plan, fig. 6.2, le nombre de degrés de liberté est 3.

Pour déterminer la position d'un solide parfait en plan est nécessaire de connaître la position des deux points du solide, donc 4 coordonnées.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = C_1 \quad (6.2)$$

 4 - 1 = 3 paramètres scalaires indépendants.

Un corps parfait libre en plan a 3 degrés de liberté.

Ces 3 possibilités distinctes de mouvement sont:

- 2 translations sur la direction des axes OX, OY;
- 1 rotation autour de l'axe OZ.

D'habitude le système de forces qui agit sur le corps est connu, donné; les inconnues sont les paramètres géométriques indépendants nécessaires pour définir la position du corps.

6.1.1 Les conditions de repos pour un solide parfait libre (les équations d'équilibre)

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un solide parfait libre se trouvant en repos reste dans cet état sous l'action d'un système de forces effectivement appliqué, est que ce système de forces soit un système équivalent à zéro:

$\tau_O \left\{ \begin{aligned} \overline{R}_a &= \sum_1^n \overline{F}_i = 0 \\ \overline{M}_{O,a} &= \sum_1^n \overline{M}_i = 0 \end{aligned} \right. \quad (6.3)$	\overline{F}_i les forces actives \overline{R}_a la résultante de forces actives $\overline{M}_{O,a}$ le moment résultant de forces actives
---	---

On peut prouver que si cette condition est satisfaite par rapport à un point quelconque O, elle est satisfaite par rapport à tout autre point.

$$\tau_{O1} \begin{cases} \bar{R}_a = \sum_1^n \bar{F}_i = 0 \\ \bar{M}_{O1,a} = \bar{M}_{O,a} + \bar{O}_1 \bar{O} \times \bar{R}_a = 0 \\ \quad \quad \quad \uparrow = 0 \quad \quad \quad \uparrow = 0 \end{cases}$$

Tableau 6.1

	Forces en espace	Forces coplanaires (xoy)	Forces parallèles (oz) en espace
$\bar{R} = 0$	$\begin{cases} X = \sum_1^n X_i = 0 \\ Y = \sum_1^n Y_i = 0 \\ Z = \sum_1^n Z_i = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} X = \sum_1^n X_i = 0 \\ Y = \sum_1^n Y_i = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$	$\begin{cases} \dots \dots \dots \\ Z = \sum_1^n Z_i = 0 \end{cases}$
$\bar{M}_O = 0$	$\begin{cases} M_{Ox} = \sum_1^n M_{Ox,i} = 0 \\ M_{Oy} = \sum_1^n M_{Oy,i} = 0 \\ M_{Oz} = \sum_1^n M_{Oz,i} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \dots \dots \dots \\ M_{Oz} = \sum_1^n M_{Oz,i} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} M_{Ox} = \sum_1^n M_{Ox,i} = 0 \\ M_{Oy} = \sum_1^n M_{Oy,i} = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$

REMARQUES:

Forces en espaces:

- 1) On constate que le nombre des équations d'équilibre – 6 - est égal au nombre de degré de liberté du solide libre.
- 2) Les 6 équations d'équilibre sont de deux catégories:
 - 3 équations de projections de forces et
 - 3 équations de moments (au rapport à des axes).
- 3) On peut prouver qu'une équation de projection est équivalente à une équation de moment (qui est plus avantageuse) avec certaines restrictions en ce qui

concerne la position des axes par rapport duquel on fait le calcul des moments. En conclusion on peut écrire 4 équations de moments et 2 de projections de forces, 5 équations de moments et 1 équation de projection de forces et même 6 équations de moments.

Forces coplanaires :

- 1) Les 3 équations d'équilibre distinctes sont de deux catégories :
 - 2 équations de projections de forces et
 - 1 équation de moment.
- 2) Le moment calculé par rapport à l'axe OZ normal au plan où se trouvent les forces, représente le moment calculé par rapport au point O où l'axe OZ croise le plan.
- 3) Les équations d'équilibre d'un système de forces coplanaires peuvent être écrites en 3 manières:

Tableau 6.2

	Les équations	Les restrictions
I	$\begin{cases} X = \sum_1^n X_i = 0 \\ Y = \sum_1^n Y_i = 0 \\ M_{Oz} = \sum_1^n M_{Oz,i} = 0 \end{cases}$	le point O ∈ au plan xoy
II	$\begin{cases} M_A = \sum_1^n M_{Az,i} = 0 \\ M_B = \sum_1^n M_{Bz,i} = 0 \\ \sum_1^n \Delta_i = 0 \end{cases}$	* les points A et B ∈ au plan xoy * Δ ≠ ⊥ AB (Δ ne soit pas perpendiculaire sur AB), fig. 6.3
III	$\begin{cases} M_A = \sum_1^n M_{Az,i} = 0 \\ M_B = \sum_1^n M_{Bz,i} = 0 \\ M_C = \sum_1^n M_{Cz,i} = 0 \end{cases}$	* les points A, B et C ∈ au plan xoy * A, B et C ne soient pas colinéaires, fig. 6.4

Explication en ce qui concerne ces restrictions :

1 - On sait qu'un système de forces coplanaires se réduit à une force unique \bar{R} . Supposons que par hasard les points A et B se trouvent sur l'axe central. Le théorème de Varignon nous dit que le moment résultant est égal au moment du vecteur résultant.

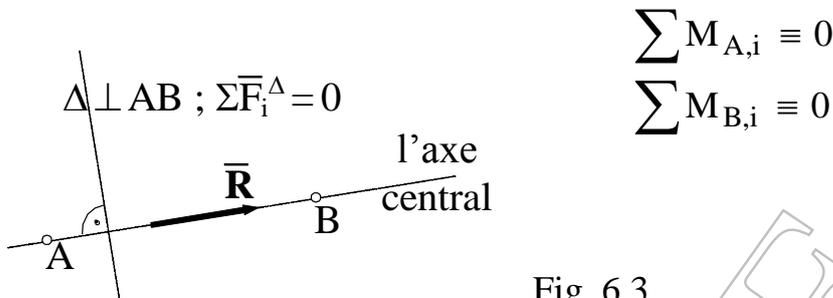


Fig. 6.3

Si par hasard on fait le choix de l'axe Δ perpendiculaire au droit AB, la somme des projections sera identique à zéro, $\sum \Delta_i \equiv 0$

Mais $\bar{R} \neq 0$, donc le système de forces n'est pas en équilibre.

2 - L'explication pour le troisième cas : $\bar{R} \neq 0$ mais les moments ($\bar{M}_A, \bar{M}_B, \bar{M}_C$) sont identiques à zéro.

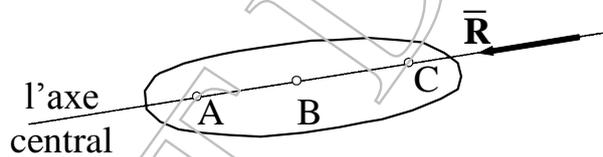


Fig. 6.4

6.2.

LA STATIQUE DU SOLIDE PARFAIT SOUMIS A DES LIAISONS

La liaison mécanique simple représente une contrainte imposée à un point d'un corps matériel de se trouver sur une surface, sur une courbe ou dans un certain point fixe de l'espace; une obligation géométrique imposée à un point du corps. Une liaison simple empêche un seul déplacement.

* On appelle liaison idéale la liaison ou les forces de frottement sont si petits (faible) qu'on peut les négliger.

* On appelle liaison bilatérale, la liaison qui empêche en double sens le déplacement; une liaison unilatérale empêche le déplacement dans un seul sens.

Les liaisons entre le corps et la base d'appuis sont dénommées des appuis.

L'effet mécanique d'un appui est d'empêcher un ou plusieurs déplacements du corps matériel. Donc, un appui réduit le nombre de degrés de liberté d'un corps matériel (la réduction est donnée par le nombre des possibilités distinctes de mouvement empêché).

L'AXIOME DES LIAISONS:

Toute liaison peut être supprimée et remplacée par des forces ou par des couples de liaison qui s'appellent réactions ayant le même effet mécanique que la liaison supprimée.

Il y a 3 modèles pour les liaisons:

D) L'APPUI SIMPLE C'est le type de liaison qui impose à un point du corps matériel de se trouver sur une surface fixe. Ce type de liaison empêche un seul déplacement du corps C ; c'est la translation sur la direction de la normale « n » au plan tangent commun, fig. 6.5.

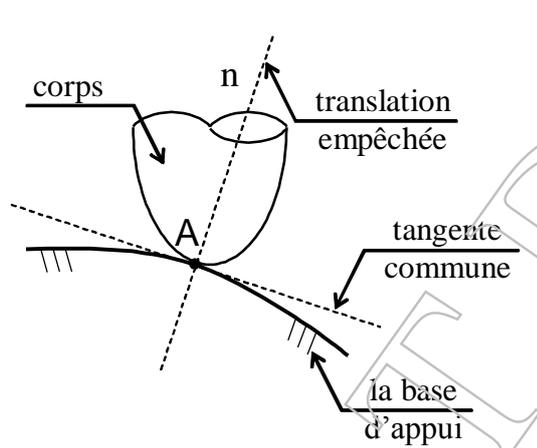


Fig. 6.5

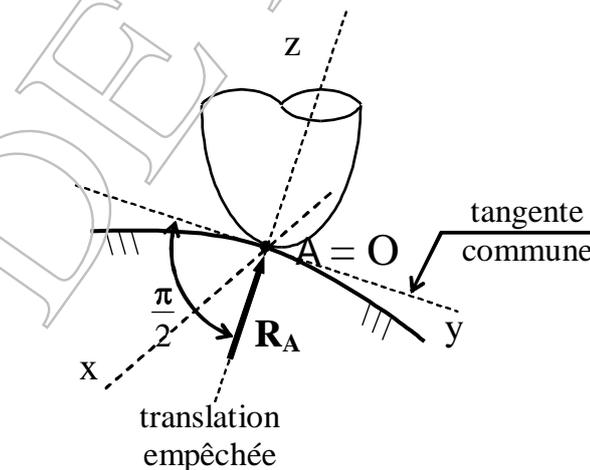


Fig. 6.6

Si la normale « n » est dirigée sur la direction de l'axe Oz, fig. 6.6, alors ils restent possibles deux translations sur la direction des axes Ox, Oy et trois rotations autour les axes Ox, Oy et Oz.

Conclusion: Un appui simple réduit avec une unité le nombre de degrés de liberté d'un corps matériel. Il en reste 5 degrés de liberté pour un corps en espace et 2 degrés de liberté pour un corps en plan. En utilisant l'axiome des liaisons un appui simple introduit dans les calculs une seule inconnue, le module de la réaction normale, fig. 6.6.

Le sens de la réaction résulte comme une conséquence de calculs.

Les symboles graphiques utilisés, fig. 6.7.a, b, c, d, pour un appui simple sont:

- la liaison unilatérale est réalisée par le fil, fig. 6.7.a qui est remplacée par un force de traction ;
- l'appui simple est considéré une liaison bilatérale, donc la réaction a un sens initial inconnu qui résulte après les calculs, fig. 6.7.b; il y a deux représentations graphiques d'un appui simple, fig. 6.7.c,d.

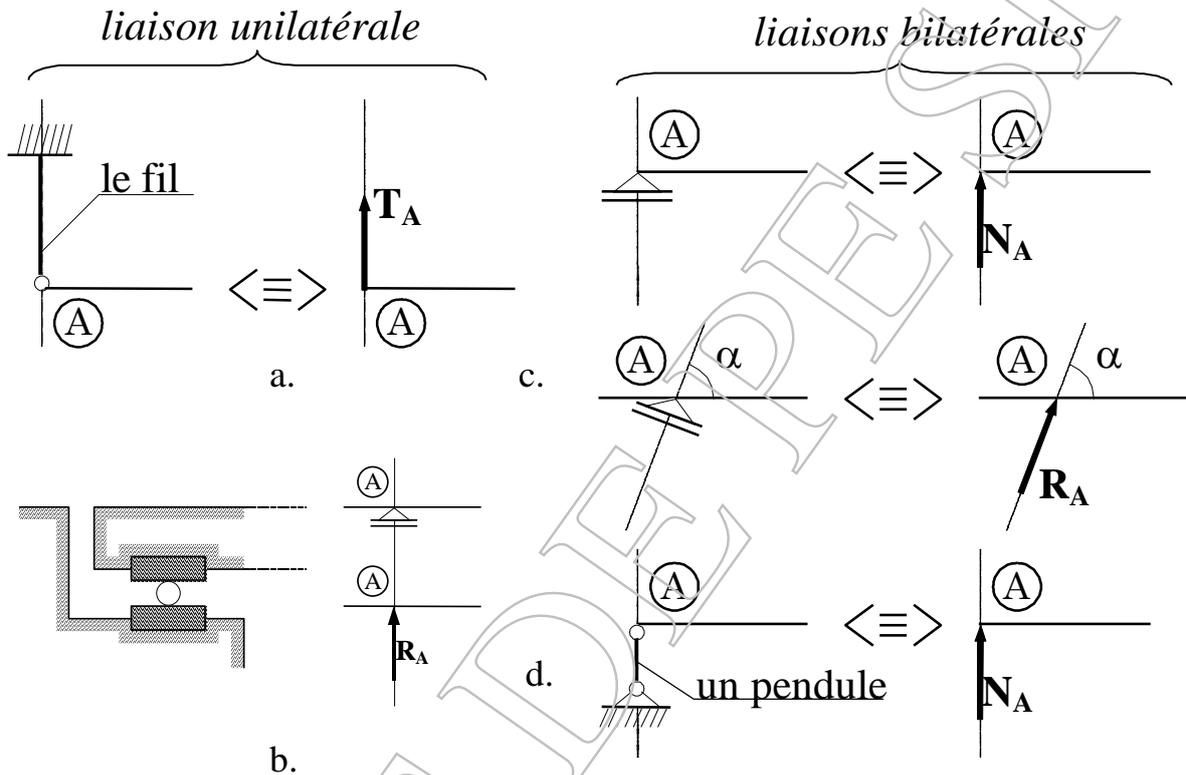


Fig. 6.7

II) ARTICULATION

II a) Articulation sphérique - ce type de liaison oblige un point du corps de se trouver en un point fixe de l'espace. Symbole graphique, fig. 6.8:

Si dans le point fixe (A) est placé un système de référence $xOyz$, on peut dire que :

- les déplacements empêchés sont: 3 translations sur des directions Ox , Oy et Oz ;
- les déplacements qui restent possibles sont: 3 rotations autour de ces axes.

Conclusion: Les degrés de libertés qui restent sont $6-3=3$. Une articulation sphérique réduit le nombre de degrés de liberté d'un corps avec 3 unités. Le corps reste avec 3 degrés de liberté.

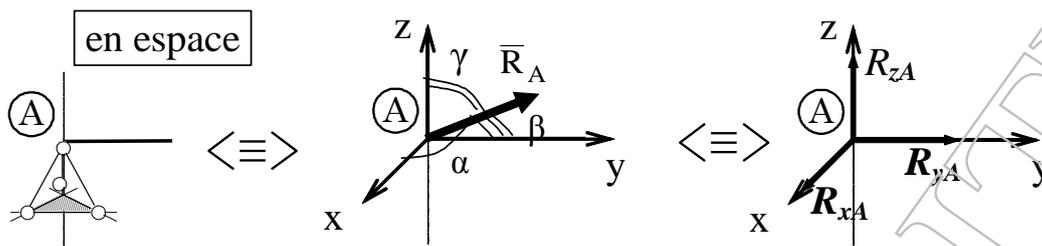


Fig. 6.8

En appliquant l'axiome de liaisons, l'articulation introduit une force de liaison qui a : le point d'application connue (A), le module et la direction inconnues, le sens résulte comme une conséquence de calculs. Pour les calculs la force de liaison sera décomposée suivant les axes de référence et maintenant il y a 3 inconnues: trois forces des liaisons sur trois axes perpendiculaires

II b) Articulation cylindrique - ce type d'appui empêche 4 degrés de libertés – deux translations et deux rotations.

Si dans le point (A) est placé un système de référence $xOyz$, on peut dire que les mouvements empêchés sont: les translations sur les axe Ox et Oz et les rotations autour de ces axes. Reste 2 possibilités du mouvement - translation et rotation sur Oy.

Symbole, fig. 6.9 :

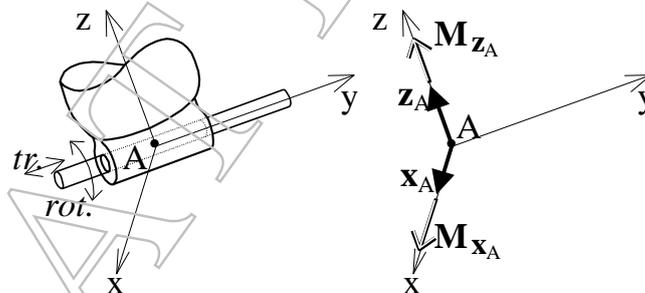


Fig. 6.9

Si le corps matériel se trouve dans **un plan** :

a) Articulation sphérique réduit avec 2 unités le nombre de degrés de liberté du corps - de type translation, (dans le plan de forces), donc reste un seul degré de liberté - de type rotation (sur l'axe perpendiculaire au plan), fig. 6.10 :

En appliquant l'axiome de liaison l'articulation sphérique en plan est remplacée par une force de liaison qui a : le point d'application connu, le module et la direction inconnus et le sens déterminé par le calcul.

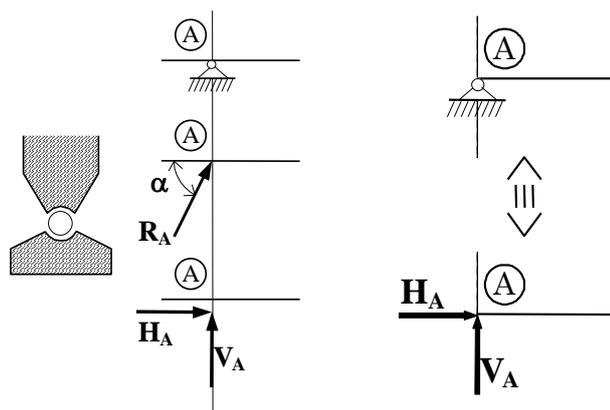


Fig. 6.10

Pour les calculs, la force \bar{R}_A est considérée décomposée suivant les axes de référence - H_A et V_A . Après on peut déterminer la réaction totale \bar{R}_A et l'angle α .

b1) Articulation cylindrique en plan yOz (voire fig. 6.9) se transforme dans un appui dénommée **encastrement glissant**. Il empêche deux mouvements : une translation sur la direction commune des pendules est la rotation suivant l'axe perpendiculaire au plan. Donc pour un corps matériel en plan ayant une articulation cylindrique reste un seul degré de liberté de type translation – la translation sur la direction perpendiculaire aux les pendules, fig. 6.11.

En appliquant l'axiome de liaison l'articulation cylindrique en plan est remplacée par :

- une force de liaison qui a : le point d'application et la direction connue, le module inconnu et le sens déterminé par le calcul ;
- un moment qui a : le point d'application et la direction connue, le module inconnu et le sens déterminé par le calcul

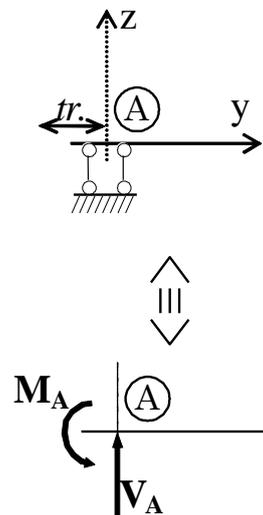


Fig.6.11

b2) Articulation cylindrique en plan xOz (voire fig. 6.9) se transforme dans un articulation sphérique.

III) ENCASTREMENT

Ce type de liaison représente une surface d'appui. De cette manière un encastrement appliqué à un corps matériel lui ôte toute possibilité de déplacement.

Conclusion: L'encastrement empêche toutes les translations et toutes les rotations du corps matériel, fig. 6.12.

Dans chaque point de la surface existe une force de liaison. Si on fait la réduction de système de forces de liaison par rapport au point A on va obtenir une force résultante et un moment résultat. Pour les calculs, les vecteurs \bar{R}_A et \bar{M}_A peuvent être considérés décomposés suivant les axes de références.

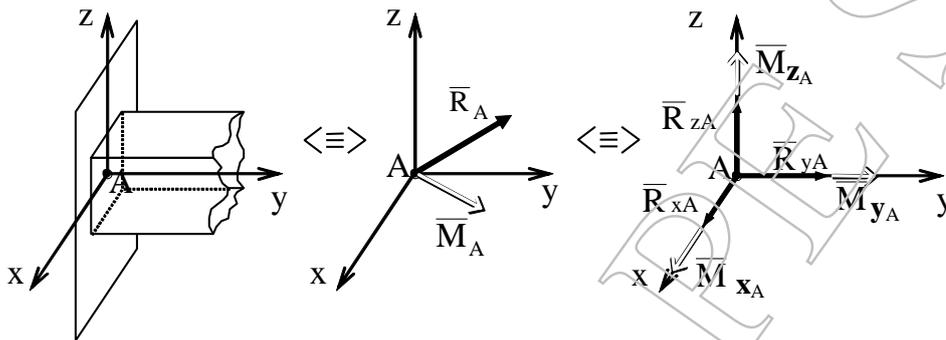


Fig.6.12

En plan, fig. 6.13, l'encastrement empêche 3 degrés de libertés: 2 translations dans le plan du corps et une rotation autour de l'axe perpendiculaire

En appliquant l'axiome de liaison l'encastrement peut être remplacé avec une force résultante qui a : le module, la direction et position inconnues. Pour les calculs cette force est remplacée avec deux composantes sur deux axes qui se trouvent dans le plan du corps (H_A , V_A) et un moment M_A sur l'axe perpendiculaire au plan.

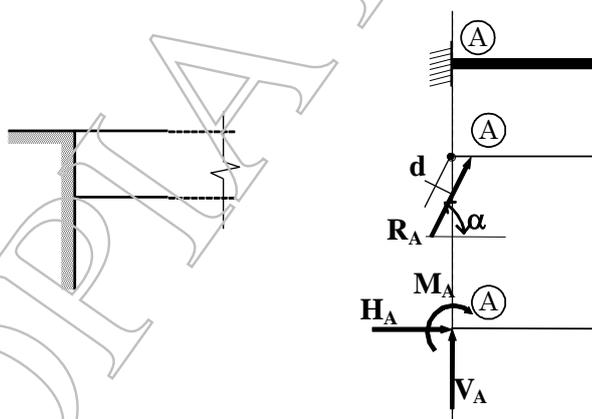


Fig.6.13

REMARQUE :

D) En génie civil, la préoccupation principale est d'imaginer des systèmes matériels fixés dans l'espace ou dans le plan.

2) Pour un corps matériel le nombre de liaisons doit empêcher 6 déplacements en espace et 3 déplacements en plans. Ces chiffres représentent le nombre minimum.

3) Un corps matériel en plan a trois degrés de liberté. En conclusion avec 3 liaisons simples on peut fixer un corps en plan.

ATTENTION:

Ces 3 liaisons simples doivent être placées d'une manière judicieuse:

1. Trois appuis simples:

1.a. Les directions de déplacement empêchées ne doivent pas être parallèles. Rien n'empêche la translation du corps sur l'axe perpendiculaire, fig. 6.14 ;

1.b. Les directions de déplacement empêchées ne doivent pas être concurrentes. Rien n'empêche la rotation de la plaque autour d'un axe perpendiculaire au plan, fig. 6.15 ;

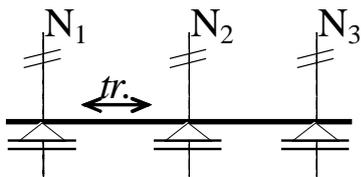


Fig. 6.14

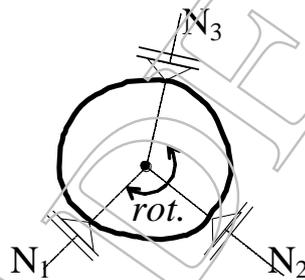


Fig. 6.15



Fig. 6.16

2. Un appui simple et une articulation sphérique:

La direction empêchée par l'appui simple ne doit pas passer par le point où se trouve l'articulation, fig. 6.16; est similaire avec le cas 1.b.

3. Un appui simple et une articulation cylindrique:

Les directions de déplacement empêchées sont parallèles. Rien n'empêche la translation du corps sur l'axe perpendiculaire, fig. 6.17; est similaire avec le cas 1.a.

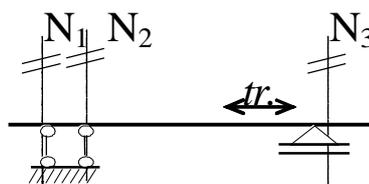


Fig. 6.17

Tableau récapitulatif

Tableau 6.3

Type d'appui		Le nombre des inconnues	Le nombre des degrés de liberté *
Simple	en espace	1	6-1=5
	en plan	1	3-1=2
Articulation sphérique	en espace	3	6-3=3
	en plan	2	3-2=1
Articulation cylindrique	en espace	4	6-4=2
	en plan	2	3-2=1
Encastrement	en espace	6	6-6=0
	en plan	3	3-3=0

*Le nombre des degrés de liberté $G_1 = G_1^o - 1_s$

6.3 LES EQUATIONS D'EQUILIBRE

Un solide parfait soumis à des liaisons est actionné par 2 catégories de forces:
 - les forces actives, effectivement appliquées,
 - les forces de liaison (les réactions).

En appliquant l'axiome des liaisons, le corps matériel peut être considéré comme corps matériel libre (sous l'action des forces effectivement appliquées et des forces de liaison) et on peut appliquer les conditions d'équilibre.

$$\tau_O \left\{ \begin{array}{l} \bar{R} = \sum_1^n \bar{R}_a + \sum_1^m \bar{R}_l = 0 \\ \bar{M}_O = \sum_1^n \bar{M}_{O,a} + \sum_1^m \bar{M}_{O,l} = 0 \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Voir le tableau 6.1

6.4 LE FROTEMENT DANS L'APPUI SIMPLE

Un solide parfait soumis à une liaison de type appui simple a, théoriquement, un seul point commun avec le corps d'appui. En réalité, il y a une surface d'appui. Le torseur de réduction pour les forces de liaison par rapport du centre de gravité de la surface d'appui - O, est composé par le vecteur résultant force de liaison - \bar{R}_l et le vecteur résultant moment de liaison - \bar{M}_l .

Les forces active ont aussi un torseur de réduction par rapport au centre de gravite de la surface d'appui - O, composé par la résultante force - \bar{R}_a , et le moment résultant - \bar{M}_a .

Les composantes des forces et des moments actifs et de liaison, fig. 6.18 a, b, c, sur les axes normal et tangent d'un plan tangent à l'appui mené par le point O, sont :

- pour les forces $\bar{R}_a \begin{cases} \bar{R}_n \\ \bar{R}_t \end{cases}$, $\bar{R}_l \begin{cases} \bar{N} \\ \bar{T} \end{cases}$

\bar{N} la réaction normale

\bar{T} la force de frottement de glissement

- pour le moment $\bar{M}_a \begin{cases} \bar{M}_n \\ \bar{M}_t \end{cases}$, $\bar{M}_l \begin{cases} \bar{M}_p \\ \bar{M}_r \end{cases}$

\bar{M}_p le moment de frottement de pivotait

\bar{M}_r le moment de frottement de roulement

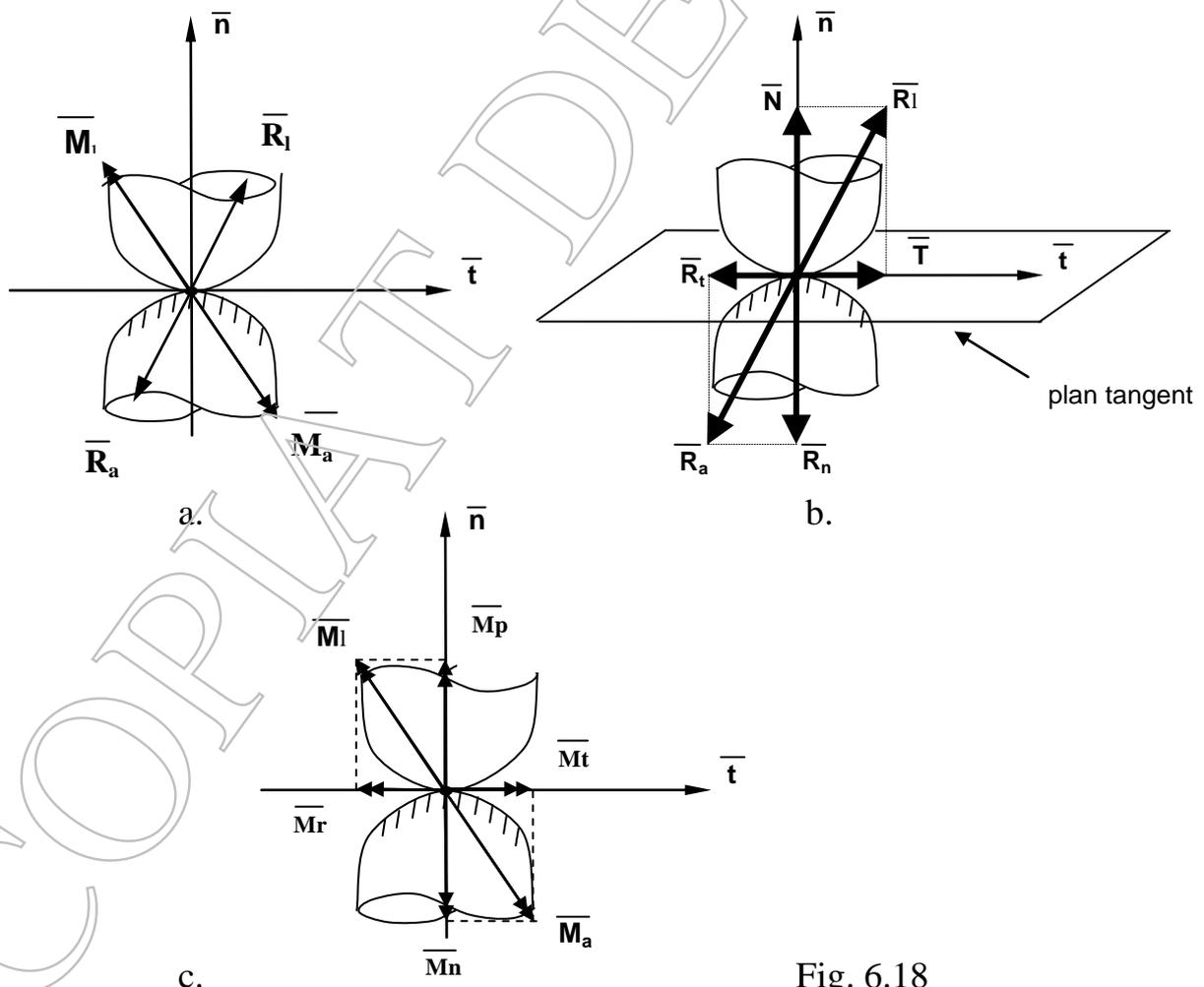


Fig. 6.18

$$\begin{cases} \overline{R}_a = \overline{R}_n + \overline{R}_t \\ \overline{R}_l = \overline{N} + \overline{T} \\ \overline{M}_a = \overline{M}_n + \overline{M}_t \\ \overline{M}_l = \overline{M}_p + \overline{M}_r \end{cases} \quad (6.5)$$

Pour l'équilibre les composantes doivent être égales deux par deux :

$$\begin{cases} \overline{R}_a + \overline{R}_l = 0 \\ \overline{M}_a + \overline{M}_l = 0 \end{cases}$$

Ou:

$$\begin{cases} \overline{R}_n + \overline{N} = 0 \\ \overline{R}_t + \overline{T} = 0 \\ \overline{M}_p + \overline{M}_n = 0 \\ \overline{M}_r + \overline{M}_t = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

Pour la force de frottement sont valables les connaissances de l'équilibre du point matériel.

Pour le moment de frottement de roulement on fait la discussion suivante :
Soit une roue appuyée sur un plan horizontal, fig. 6.19. Les forces active sont le poids \overline{G} est la force horizontale \overline{F} qui donne le mouvement.

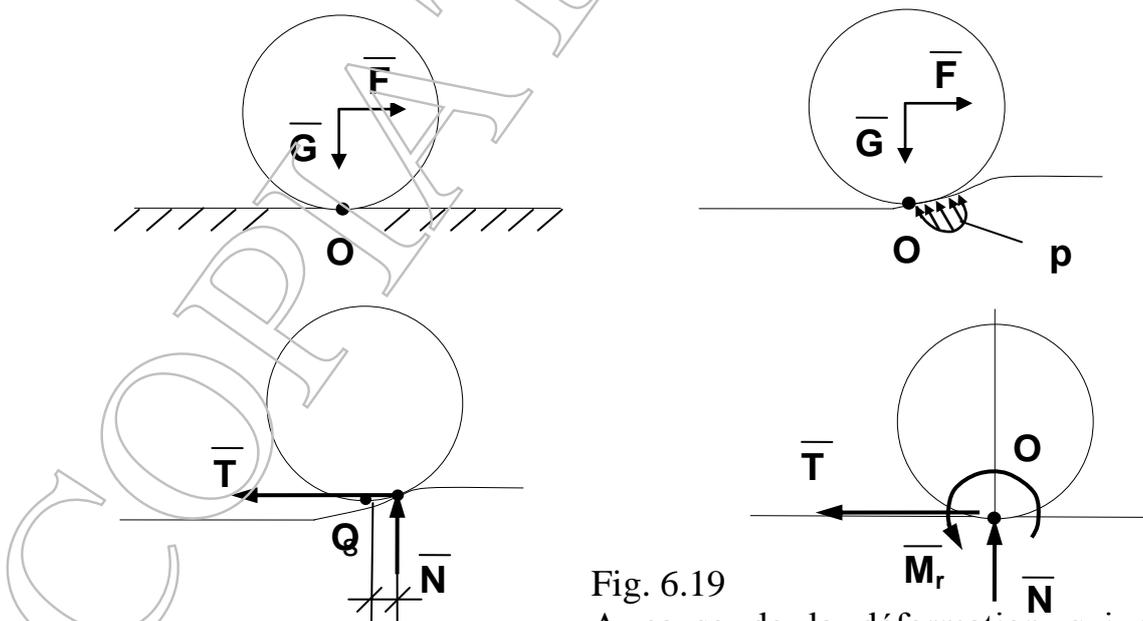


Fig. 6.19

A cause de la déformation qui n'est pas symétrique par rapport au point théorique d'appui - O, les forces élémentaires

de liaison \bar{p} ont la résultante appliquée dans un point quelconque et a une direction quelconque. La position du point d'application peut être précisée par la distance "s" dénommée coefficient de frottement de roulement. Ce coefficient a l'unité de mesure - la longueur.

La force et le moment de frottement de roulement ont de valeurs limite

$$T_{\max} = \mu \cdot N$$

$$M_{r \max} = s \cdot N$$

où : μ est le coefficient de frottement de glissement - adimensionnel
 s est le coefficient de frottement de roulement - l'unité de mesure la longueur.

Pour l'équilibre il y a encore deux équations

$$T \leq T_{\max}$$

$$M_r \leq M_{r \max}$$

APPLICATION 6.1. :

Déterminer les forces de liaison pour la plaque homogène en espace actionné seulement par le poids \bar{G} , fig. A.6.1.

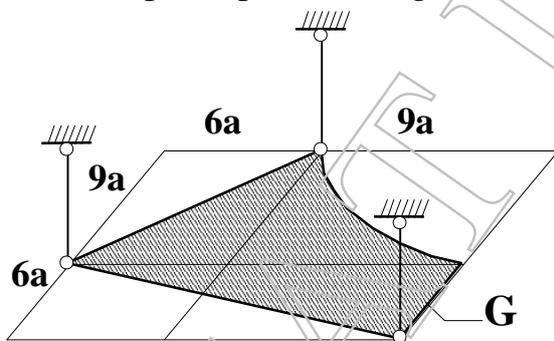
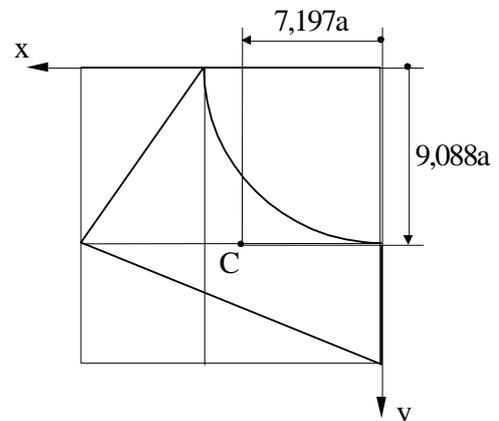
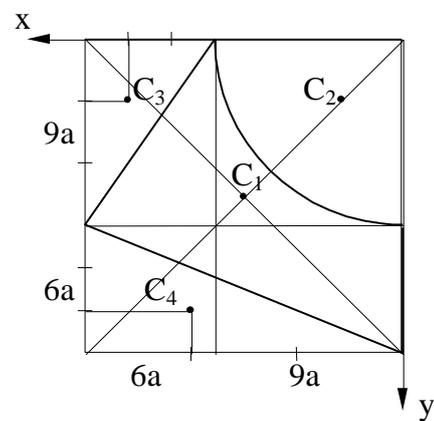
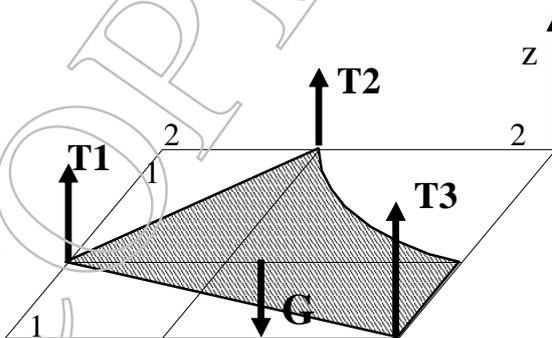


Fig. A.6.1



Solution :



Etape 1 : Détermination de la position du centre de gravite

$$x_C = 7,197a \quad ; \quad y_C = 9,088a$$

Etape 2 : Détermination des forces de liaison

Il y a une plaque suspendue par trois fils – en espace.

$$G_1 = 6 \times 1 - (3 \times 1) = 3$$

Du point de vue géométrique la plaque est un mécanisme avec 3 degrés de liberté ; mais les forces sont parallèles, donc les mouvements de type translation dans le plan horizontal et le mouvement de type rotation par rapport de l'axe vertical sont nulles

Les équations sont en nombre de trois

$$\begin{cases} \sum z = 0 \\ \sum M_{1-1} = 0 \\ \sum M_{2-2} = 0 \end{cases}$$

$E = 3 ; N = 3 ; E - N = 0$ du point de vue statique le corps est isostatique

Observation : Parce que le problème est en espace, les équations du moment sont par rapport aux axes non par rapport aux points.

$$\begin{cases} T_1 + T_2 + T_3 - G = 0 \\ T_2 \times 6a - G \times (15a - 7,197a) + T_3 \times 15a = 0 \\ -T_1 \times 6a + G \times 9,088a - T_3 \times 15a = 0 \end{cases}$$

$$T_1 = 0,38G \quad T_2 = 0,17G \quad T_3 = 0,45G$$

APPLICATION 6.2. :

Déterminer les forces de liaison pour la plaque homogène en plan actionnée seulement par le poids propre \bar{G} , fig. A.6.2.a.

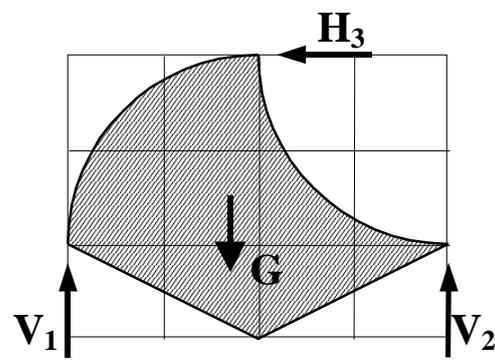
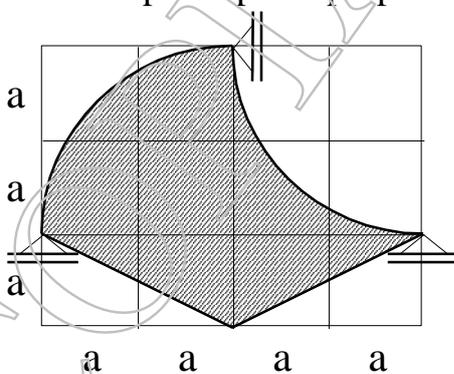


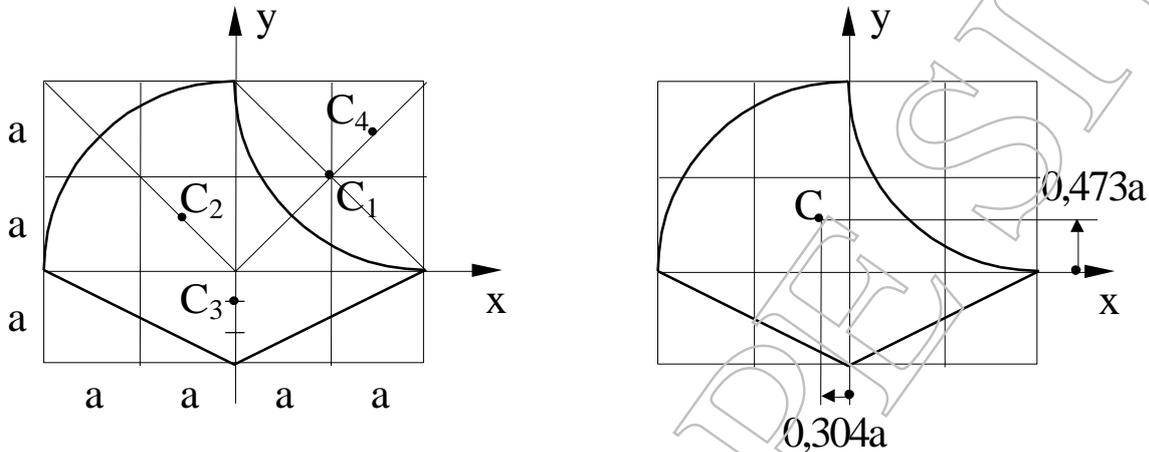
Fig. A.6.2

Solution :

Etape 1 : Détermination de la position du centre de gravite de la plaque :

On choisit le plan xOy pour la plaque :

$$x_C = -0,304 a \quad ; \quad y_C = 0,473 a$$



Etape 2 : Détermination des forces de liaison

Il y a une plaque en plan avec trois appuis simple.

$G_1 = 3 \times 1 - (3 \times 1) = 0$ du point de vue géométrique le corps est strictement invariable

Les équations sont en nombre de trois

$$\begin{cases} \sum x = 0 \\ \sum y = 0 \\ \sum M_{z(l)} = 0 \end{cases}$$

$E = 3 ; N = 3 ; E - N = 0$ du point de vue statique le corps est isostatique

Le schéma de forces est donne dans la figure A.6.2.b

$$\begin{cases} - H3 = 0 \\ V1 + V2 - G = 0 \\ - G \times (2a - 0,304a) + V2 \times 4a + H3 \times 3a = 0 \end{cases}$$

$$H3 = 0 \quad ; \quad V1 = 0,576 G \quad ; \quad V2 = 0,424 G$$

Vérification :

$$\sum M_{z(G)} = -0,576G \times (2a - 0,304a) + 0,424G \times (2a + 0,304a) = 0$$

APPLICATION 6.3.

Une roue homogène de poids G et de rayon R se trouve sur un plan incliné. L'angle du plan avec l'horizontale est α et le coefficient de frottement pour le glissement μ et pour le roulement s . La roue est soumise à une force \vec{F} qui est parallèle avec le plan et appliquée dans le centre de la roue, fig. A.6.3. Déterminer les valeurs de la force F pour lesquelles la roue est en équilibre.

Application numérique: $G = 2000 \text{ N}$; $R = 0.5\text{m}$; $\alpha = 30^\circ$; $\mu = 0.2$; $s = \frac{R}{10}$

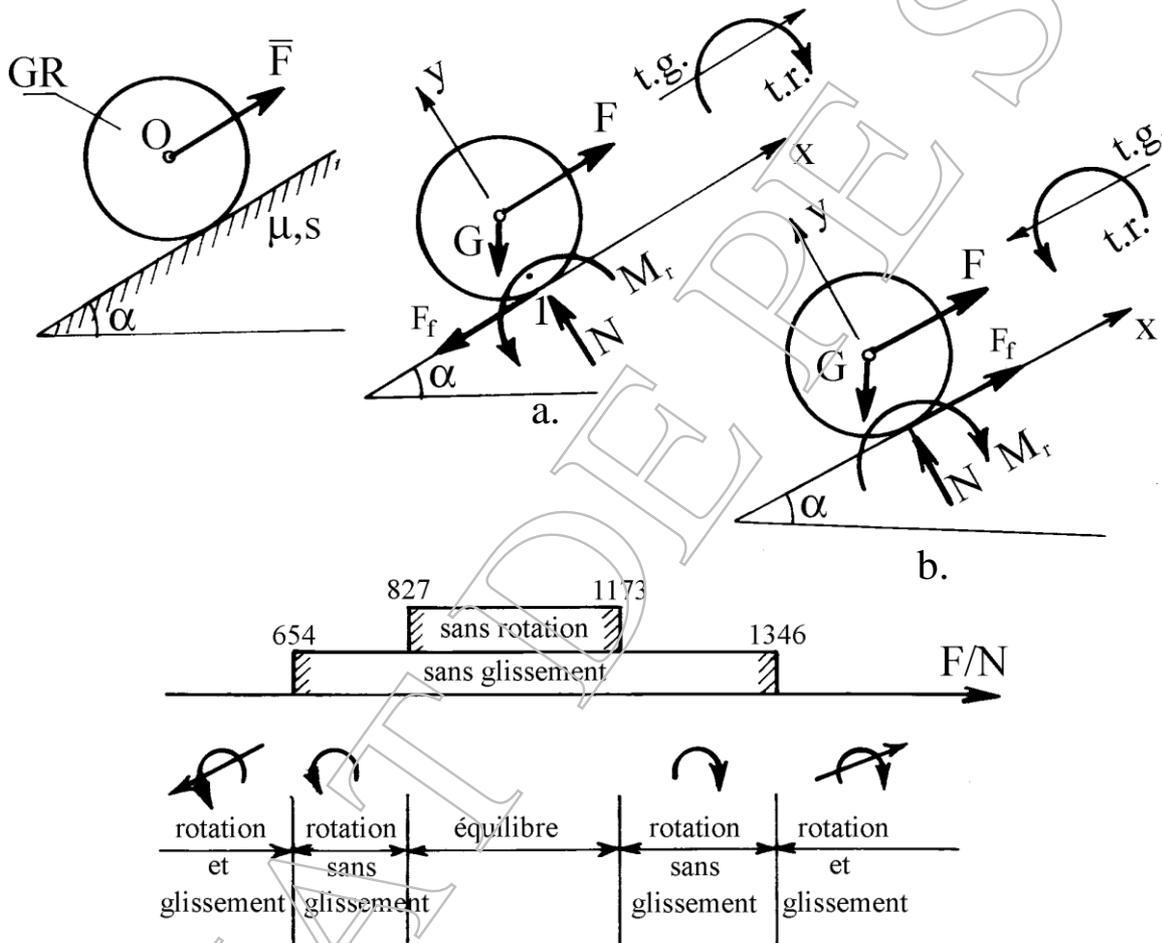


Fig. A.6.3

Solution :

$$G_1 = 3 \times 1 - (1 \times 1) = 2$$

- du point de vue géométrique le corps a deux degrés de liberté; les conditions géométriques sont transformées dans deux conditions mécaniques – les valeurs de la force \vec{F} pour équilibre;
- parce que la tendance n'est pas sûre on va étudier ces deux possibilités:
 la tendance de glissement et de roulement en haut – situation « a »
 la tendance de glissement et de roulement en bas – situation « b »

Le système est composé par 5 équations : trois équations d'équilibres et deux inégalités de frottement :

$$\begin{cases} \sum x = 0 \\ \sum y = 0 \\ \sum M_{z(1)} = 0 \\ F_f \leq \mu N \\ M_r \leq s N \end{cases}$$

Pour la situation « a » les équations sont

$$\begin{cases} F - G \sin \alpha - F_f = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \\ M_r - G \sin \alpha \cdot R + F \cdot R = 0 \\ F_f \leq \mu N \\ M_r \leq s N \end{cases}$$

Pour la situation « b » les équations sont

$$\begin{cases} F - G \sin \alpha + F_f = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \\ M_r - G \sin \alpha \cdot R + F \cdot R = 0 \\ F_f \leq \mu N \\ M_r \leq s N \end{cases}$$

On observe que les systèmes diffèrent seulement par la première équation.

La condition pour que la roue ne glisse pas :

$$G (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \leq F \leq G (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

et qu'elle ne roule pas :

$$G \left(\sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha \right) \leq F \leq G \left(\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha \right)$$

Pour l'application numérique:

654 N ≤ F ≤ 1346 N la roue ne glisse pas

827 N ≤ F ≤ 1173 N la roue ne roule pas

*l'équilibre est assuré pour 827 N ≤ F ≤ 1173 N

*si F > 1173 N la roue roule dans le sens des aiguilles d'une montre sans glissement

* si F < 827 N la roue roule dans le sens trigonométrique.

APPLICATION 6.4.

Soit une barre homogène de longueur l et poids propre G articulée en O et liée par un ressort en A . Dans le point A il y a un poids Q . Le coefficient de proportionnalité est k (le point B est sur la même droite avec le point A à la hauteur l).

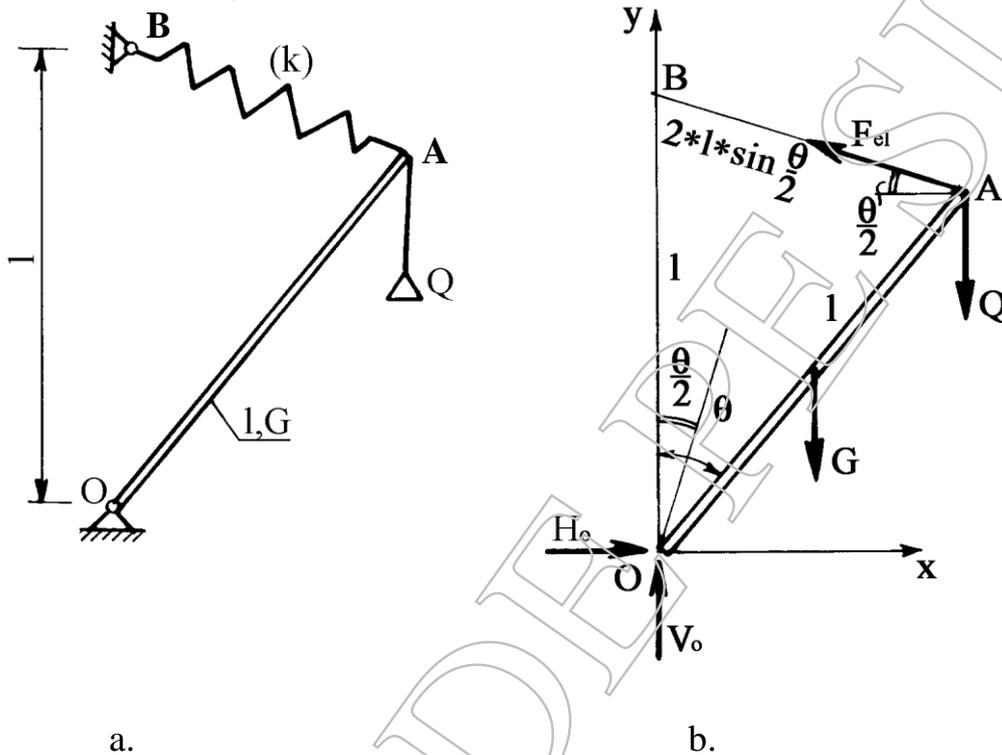


Fig. A.6.4

Solution :

1. Caractérisation géométrique et statique :

Géométrique : $G_L = 3 - (2 \times 1) = 1$

La barre est un mécanisme avec un degré de liberté (le ressort n'est pas une liaison)

Les inconnues sont de deux types :

- géométrique = 1, on peut choisir comme inconnu l'angle θ
- mécanique = 2, on peut choisir comme inconnues les réactions dans l'articulation

Statique : $E = N$

Du point de vue statique la barre est isostatique

La force élastique a l'expression : $F_{el} = k(AB) = k\left(2l \sin \frac{\theta}{2}\right)$

Les équations sont :

$$\sum x = 0 ; H_0 - F_{el} \cos \frac{\theta}{2} = 0 \quad (1)$$

$$\sum y = 0 ; V_0 + F_{el} \sin \frac{\theta}{2} - G - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_0 = 0 ; -G \sin \theta \cdot \frac{1}{2} - Q \sin \theta \cdot 1 + F_{el} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\theta}{2} = 0 \quad (3)$$

De la troisième équation résulte :

$$\sin \theta \cdot (2kl - P - 2Q) = 0$$

Il y a deux solutions :

I. $\sin \theta = 0$ $\theta = 0$
 $\theta = \pi$

II. $2kl = P + 2Q$ l'équilibre est possible pour n'importe quelle position

Les réactions ont les expressions :

$$H_0 = kl \sin \theta$$

$$V_0 = P + Q - 2kl \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

7.

STATIQUE DES SYSTEMES MATERIELS

7.1 DEFINITIONS.

On appelle système matériel un ensemble de points matériels et/ou de corps matériels indéformables, liés entre eux par des articulations ou des appuis simples, et avec le milieu extérieur par des appuis simples, des articulations ou des encastremements.

On appelle système matériel coplanaire quand le système matériel et les forces extérieures effectivement appliquées sont contenus dans le même plan, fig. 7.1.

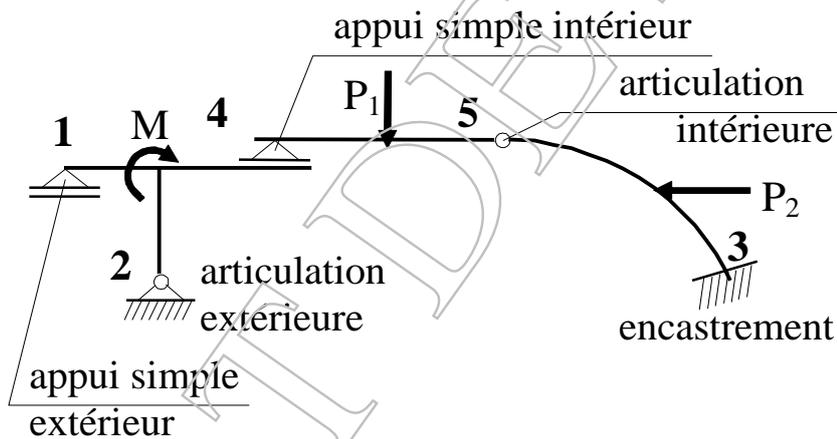


Fig. 7.1

Forces → Extérieures → effectivement appliquées, $\{\bar{F}_i\}$, d'habitude données
 → réactions, $\{\bar{R}_i\}$ – dans les liaisons avec le milieu extérieur (1, 2, 3). Elles sont inconnues
 → Intérieures de liaison (4, 5), liaisons entre les corps, $\{\bar{L}_i\}$, elles sont aussi inconnues.

Les forces de liaison intérieures peuvent être mises en évidence seulement quand on divise le système en parties composants. Elles mesurent l'effet d'une partie sur l'autre partie.

La plus importante propriété de forces intérieure est qu'elles sont deux par deux égales et de sens contraire.

Dans la figure 7.2 est donné le schéma des forces avec tous les types des forces pour le système matériel présenté dans la figure 7.1.

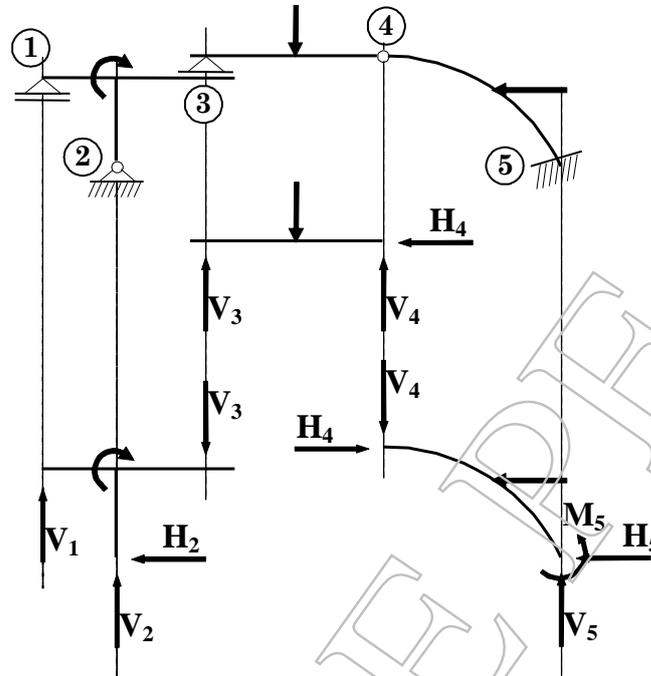


Fig. 7.2

Les inconnues mécaniques: sont toutes les forces de liaison (intérieures ou extérieures).

Les inconnues d'un problème d'équilibre d'un système matériel sont:

- les inconnues géométriques - les paramètres de position
- les inconnues mécaniques - les forces de liaison extérieures (réactions) et intérieures

Notations :

G_1^0 = le nombre de degrés de liberté pour le système de corps si les corps sont libres;

p = le nombre de points matériels;

c = le nombre de corps matériels;

L_s = le nombre des forces de liaison - extérieures et intérieures = le nombre des inconnues de type mécanique;

e = le nombre d'appuis de type encastrement ;

as = le nombre d'appuis de type articulation sphérique simple ;

ac = le nombre d'appuis de type articulation cylindrique ;

s = le nombre d'appuis de type simple ;

G_1 = le nombre de degrés de liberté pour le système de corps avec des liaisons;

N = le nombre des inconnues: mécaniques (L_s) + géométriques (G_1);

E - le nombre des équations indépendantes d'équilibre.

EN ESPACE

$$G_1^0 = 3p + 6c \quad L_s = 6e + 3as + 4ac + 1s \quad (7.1)$$

EN PLAN

$$G_1^0 = 2p + 3c \quad L_s = 3e + 2as + 2ac + 1s \quad (7.2)$$

L'équation de calcul
$$G_1 = G_1^0 - L_s \quad (7.3)$$

Du point de vue géométrique: (1)

- Si $L_s = G_1$ le système a le nombre minime de liaisons pour être fixé;
- $L_s < G_1$ le système n'a pas de liaisons suffisantes pour être fixé - le système est un mécanisme;
- $L_s > G_1$ le système a des liaisons supplémentaires - le système est fixé.

Du point de vue statique: (2)

- Si $N = E$ le système isostatique
- $N < E$ le système isostatique
- $N > E$ le système hyperstatique.

REMARQUE:

La relation (7.3) est une relation quantitative. Il faut analyser aussi l'aspect qualitatif qui concerne l'emplacement correct des liaisons : fig. 7.3, 7.4, 7.5.

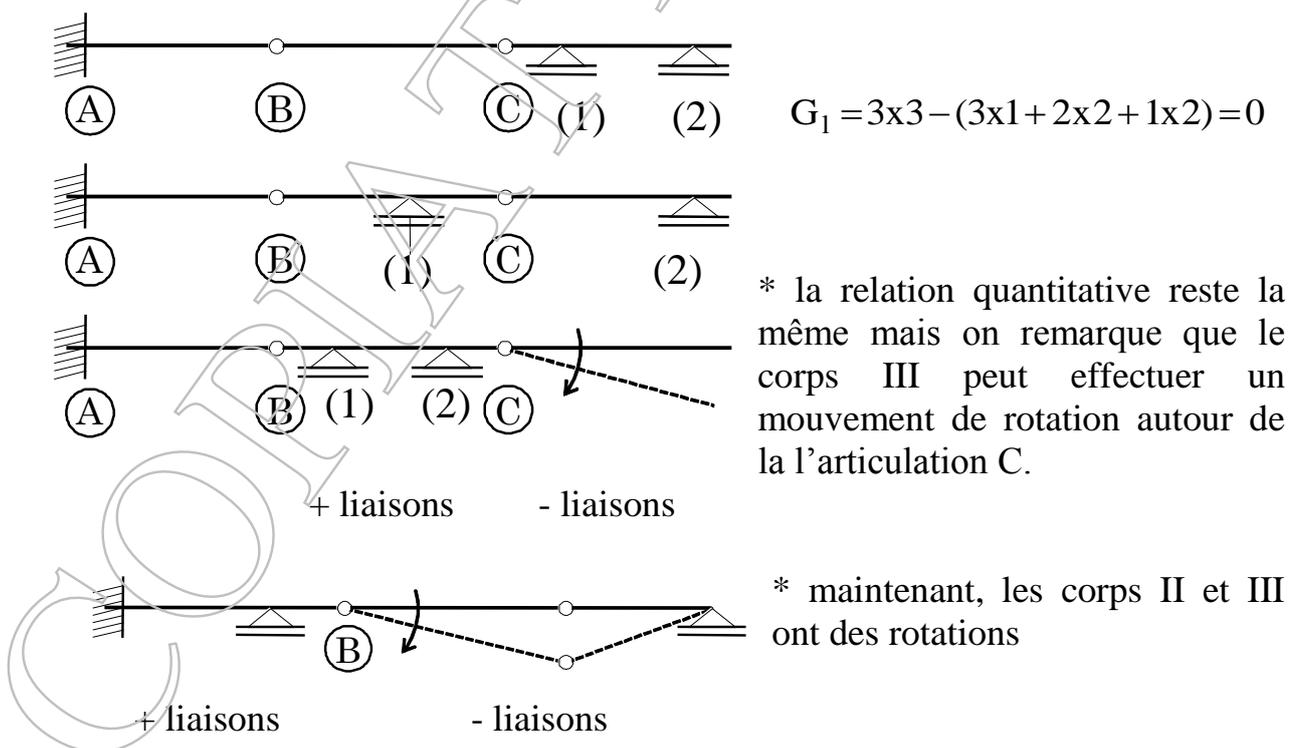


Fig. 7.3

Le système de la fig.7.4 se tourne autour du point I, il est dénommé système critique.

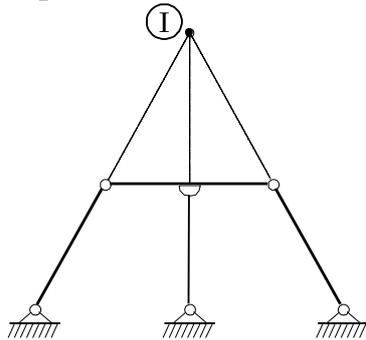


Fig. 7.4

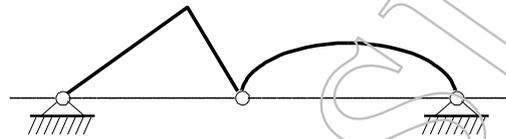


Fig. 7.5

Une situation critique est aussi quand trois articulations se trouvent sur la même ligne, fig. 7.5.

7.2

LES THEOREMES UTILISES DANS LA STATIQUE DES SYSTEMES DE CORPS MATERIELS

En général le problème de statique des systèmes de corps implique la détermination des forces de liaison inconnues. D'habitude d'intérêt sont les valeurs des forces de liaison extérieures.

Pour déterminer les inconnues, on dispose de deux théorèmes:

1. Le théorème de la solidification,
2. Le théorème de l'équilibre des parties.

Le théorème de la solidification.

Pour qu'un système de corps matériels soit en équilibre le système de forces extérieures (effectivement appliquées

$$\bar{\mathbf{R}}_a = \sum_1^n \bar{\mathbf{F}}_i) \text{ et les forces de liaisons extérieures } (\bar{\mathbf{R}}_{l,e} = \sum_1^n \bar{\mathbf{R}}_i)$$

doit être un système équivalent à zéro

$$\tau_O \left\{ \begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} &= \sum_1^n \bar{\mathbf{R}}_a + \sum_1^m \bar{\mathbf{R}}_{l,e} = 0 \\ \bar{\mathbf{M}}_O &= \sum_1^n \bar{\mathbf{M}}_{O,a} + \sum_1^m \bar{\mathbf{M}}_{O,l,e} = 0 \end{aligned} \right.$$

En regardant la fig. 7.1 le système de forces effectivement appliquées et les réactions en 1, 2 et 3 ($V_1, V_2, H_2, V_3, H_3, M_3$), fig. 7.6, doit être un système équivalent à zéro.

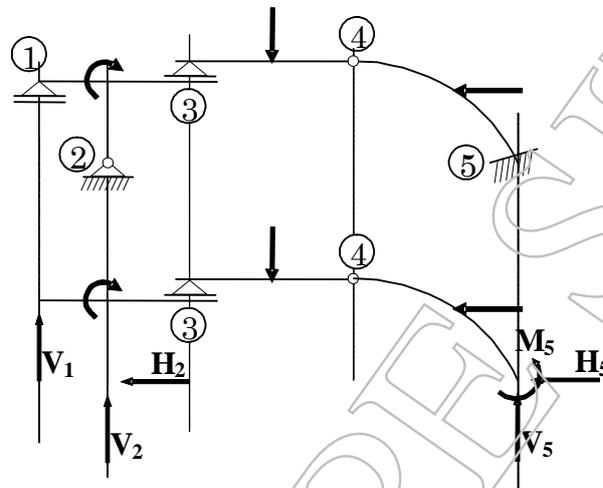


Fig. 7.6

Explication: Pour prouver ce théorème on regarde la fig. 7.2 en remarquant qu'un système en ensemble peut être en équilibre si chaque corps du système se trouve en équilibre. Les équations sont :

$$C1 \begin{cases} \sum \bar{F}_a^1 + \sum \bar{F}_{l,e}^1 + \sum \bar{F}_{l,i}^1 = 0 \\ \sum \bar{M}_a^1 + \sum \bar{M}_{l,e}^1 + \sum \bar{M}_{l,i}^1 = 0 \end{cases}$$

$$C2 \begin{cases} \sum \bar{F}_a^2 + \sum \bar{F}_{l,e}^2 + \sum \bar{F}_{l,i}^2 = 0 \\ \sum \bar{M}_a^2 + \sum \bar{M}_{l,e}^2 + \sum \bar{M}_{l,i}^2 = 0 \end{cases}$$

$$C3 \begin{cases} \sum \bar{F}_a^3 + \sum \bar{F}_{l,e}^3 + \sum \bar{F}_{l,i}^3 = 0 \\ \sum \bar{M}_a^3 + \sum \bar{M}_{l,e}^3 + \sum \bar{M}_{l,i}^3 = 0 \end{cases}$$

$\sum \bar{F}_{l,i}^1 = \sum \bar{F}_{l,i}^2$ On remarque que dans l'ensemble de ce système d'équations, les forces de liaison intérieures sont deux par deux égales et de sens contraire et pour ça elles peuvent être éliminées.

Donc :

$$C1+2+3 \begin{cases} \sum \bar{F}_a^{1,2,3} + \sum \bar{F}_{l,e}^{1,2,3} = 0 \\ \sum \bar{M}_a^1 + \sum \bar{M}_{l,e}^1 = 0 \end{cases}$$

On arrive à la conclusion que le système des forces extérieures (données et réactions) doit être un système équivalent à zéro.

LE THEOREME DE LA SOLIDIFICATION prend en considération l'ensemble du système.

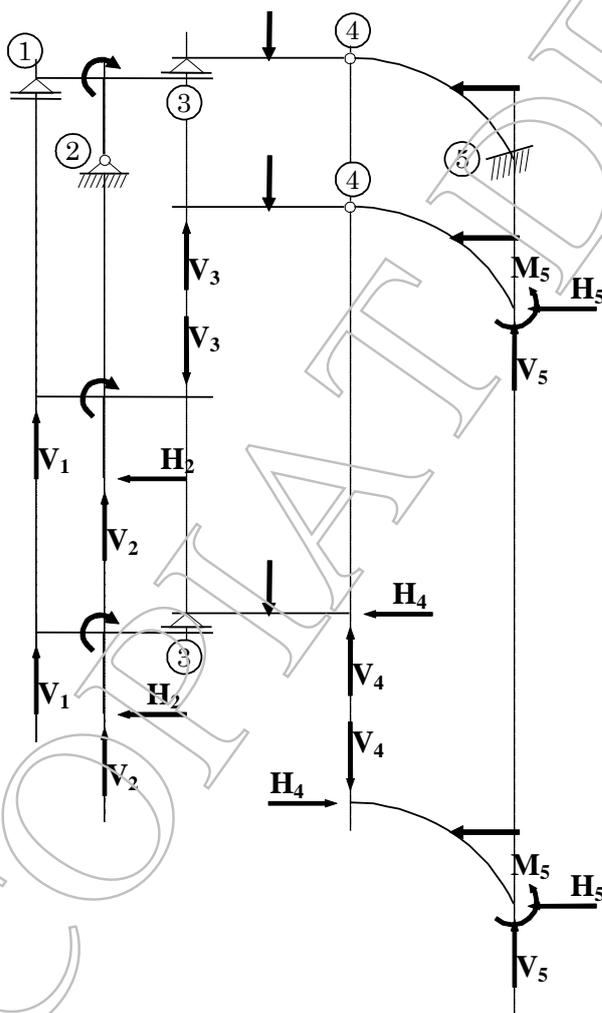
OBSERVATION : Si les forces extérieures se trouvent dans un plan, le théorème de la solidification offre seulement 3 équations distinctes d'équilibre, donc seulement 3 inconnues peuvent être déterminées.

Ce théorème donne la possibilité de déterminer quelques-unes réactions dans les liaisons extérieures en éliminant les calculs pour les forces intérieures de liaison.

Le théorème de l'équilibre des parties.

Pour qu'un système de corps matériels soit en équilibre chaque partie doit être en équilibre sous l'action des forces extérieures effectivement appliquées, des forces extérieures de liaison (réactions) et des forces de liaison intérieures.

Pour le système de corps de la fig. 7.1 on peut faire encore deux schémas de forces, fig. 7.7.a, b:



a.

b.

Fig. 7.7

Le schéma 7.7.a :

Le corps 1-2-3 est départagé et les corps 3-4 et 4-5 sont liés

Les équations sont trois pour le corps 1-2-3 est trois pour l'ensemble des corps 3-4-5

Le schéma 7.7.b :

Les corps 1-2-3 + 3-4 sont liés et le corps 4-5 est départagé. Les équations sont trois pour l'ensemble des corps 1-2-3 + 3-4 est trois pour le corps 4-5

Les 6 équations d'équilibre pour chaque situation se retrouvent parmi les 9 équations qui expriment l'équilibre du chaque corps.

REMARQUE :

Si une articulation lie un nombre « **n** » de corps elle a la fonction de $n-1$ articulations simples, fig. 7.8. Elle est dénomme articulation multiple.

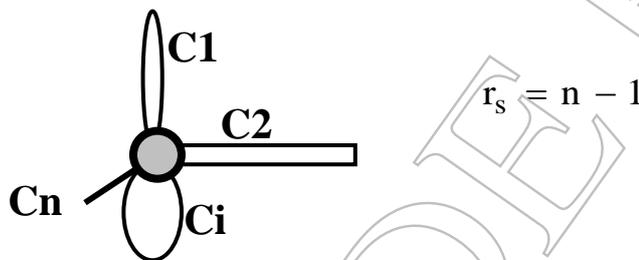


Fig. 7.8

7.3

LES METHODES UTILISEES DANS LA STATIQUE DES SYSTEMES DE CORPS MATERIELS

I. La méthode de l'isolement

La méthode a à la base le théorème de l'équilibre des parties en considérant comme partie chaque corps du système, fig. 7.2.

Les étapes de calcul :

- 1) La caractérisation géométrique et statique du système de corps.
- 2) On divise le système en corps composants.
- 3) On représente sur chaque corps les forces extérieures et intérieures qui agissent sur lui.
- 4) On écrit les équations d'équilibre pour chaque corps (6 équations en espace et 3 équations en plan).

- 5) On doit résoudre le système des équations pour déterminer les inconnues.
- 6) La vérification des résultats: se fait en écrivant toutes les équations qui ne se retrouvent pas parmi les équations d'équilibre utilisées.

REMARQUE:

Au commencement on a choisit arbitrairement un sens pour les réactions et pour les forces intérieures de liaison. Si les inconnues ont une valeur positive le sens choisit est correct, si les inconnues sont négatives on doit refaire la figure et représenter ces réactions avec leur sens correct.

L'avantage de la méthode est de permettre le calcul de toutes les forces de liaison extérieures et intérieures inconnues du problème.

Le désavantage de la méthode est le grand nombre des équations et des inconnues qu'on doit déterminer.

APPLICATION 7.1. :

Il y a un système de corps, fig. A.7.1.a. Il est composé par deux barres ABC et DC et un disc qui a deux roues. Les rayons des roues sont $r_1 = \frac{a}{2}$ et $r_2 = a$. Les

barres n'ont pas de poids propre. La barre DC est suspendue par deux fils verticaux. La barre ABC a une articulation dans le point A et un sabot de frein d'épaisseur $0,2a$. Le sabot est appuyé sur le disque avec frottement, (le coefficient de frottement est μ).

Sur la barre DC agit une force P qui a une position inconnue.

Déterminer la position de la force P pour laquelle la barre DC reste horizontale. Déterminer les forces de liaison.

Solution :

Etape I : Caractérisation géométrique et statique :

$$G_1 = 3 \times 3 - (2 \times 2 + 1 \times 1 + 2 + 1) = 1$$

Les liaisons sont : 2 articulations (A, O), 1 appui simple avec frottement (B) et 2 fils. Il y a aussi une restriction à ce qui concerne le mouvement de barre DC sur la direction horizontale qui est négligeable.

Le système a un degré de liberté – la position « x » de la force \bar{P} pour équilibre dans la position donné.

$$E = 3 + 3 + 2 = 8$$

$$N = 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 8$$

Les inconnues sont : - l'inconnue géométrique - x

- les forces de liaison qui sont : (i) les réactions – H_A, V_A, H_O, V_O ; (ii) les forces de liaisons intérieures dans l'appui simple B – N_B, F_f ; (iii) les tentions dans les fils – S_E, S_D .

$E = N$ le système de corps est isostatique

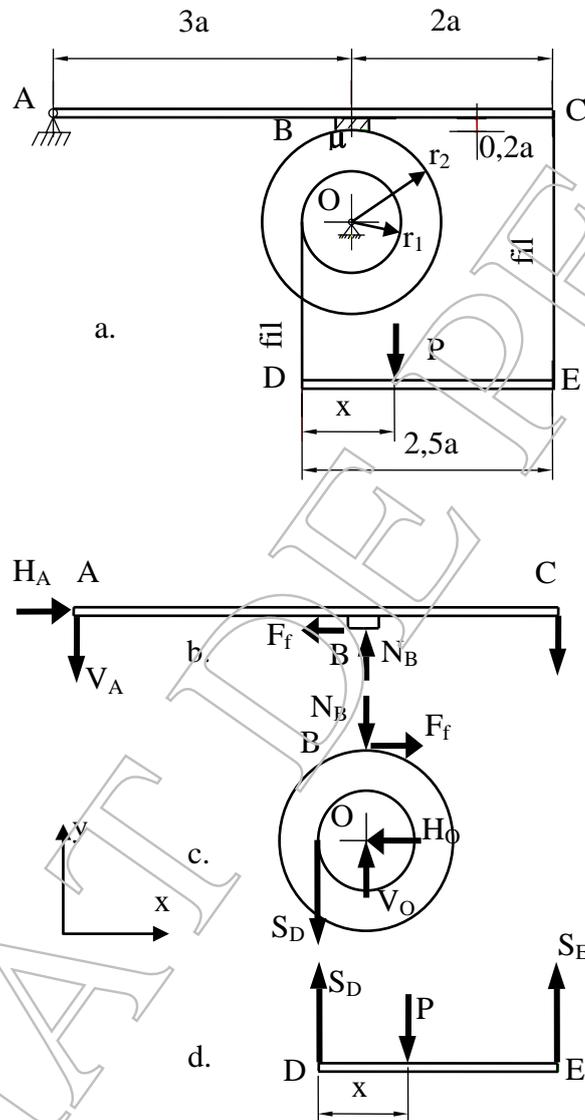


Fig. A.7.1

Etape II – Détermination des forces de liaison

On applique la méthode de l'isolement. Le schéma des forces est dans les figures A.7.1.b,c,d.

L'équilibre du corps O :

- (1) $\sum M_O = 0$; $0,5aS_D - aF_f = 0$
- (2) $\sum X_i = 0$; $F_f - H_O = 0$

$$(3) \sum Y_i = 0 ; V_O - S_D - N_B = 0$$

L'équilibre du corps DE :

$$(4) \sum M_E = 0 ; P(2,5a - x) - 2,5aS_D = 0$$

$$(5) \sum M_D = 0 ; -Px + 2,5aS_E = 0$$

L'équilibre du corps AC :

$$(6) \sum M_A = 0 ; -5aS_E + 3aN_B - 0,2aF_f = 0$$

$$(7) \sum M_B = 0 ; 3aV_A - 0,2aH_A - 2aS_E = 0$$

$$(8) \sum X_i = 0 ; H_A - F_f = 0$$

Relation du frottement :

$$(9) F_f \leq \mu N_B$$

Des équations (1) et (4) résulte $F_f = P(0,5 - 0,2x/a)$

De l'équation (5) résulte $S_E = 0,4Px/a$

De l'équation (6) résulte $N_B = \frac{2}{3}P\frac{x}{a} + \frac{1}{30}P\left(1 - \frac{x}{2,5a}\right)$

De l'équation (9) résulte x

Résultats :

$$x \geq \frac{2,5(15 - \mu)}{15 + 49\mu}a$$

D'habitude de toutes les inconnues (les forces de liaison extérieures et intérieures) d'intérêt sont les forces de liaison extérieures (les réactions) dans les liaisons avec le milieu extérieur.

2. La méthode combinée

Cette méthode donne la possibilité de déterminer seulement les réactions dans les liaisons extérieures en éliminant les calculs des forces intérieures.

La méthode utilise les deux théorèmes (le théorème de la solidification et le théorème d'équilibre des parties)

L'avantage de la méthode: elle permet de réduire sensiblement le nombre des inconnues donc le nombre des équations.

Les étapes de calcul:

1) La caractérisation géométrique et statique du système de corps.

- 2) Le schéma des forces (seulement les forces extérieures - données et réactions)
- 3) Les équations d'équilibre en appliquant les deux théorèmes (l'ordre d'application des théorèmes et le type d'équations sont spécifiques pour chaque application).
- 4) On doit résoudre le système d'équations pour déterminer les inconnues.
- 5) La vérification des résultats: se fait en écrivant toutes les équations qui ne se retrouvent pas parmi les équations d'équilibre utilisées.

APPLICATION 7.2. :

En appliquant la méthode mixte, déterminer la position d'équilibre du système donné dans la figure. A.7.2.a et les réactions.

Le système est composé par trois barres de différentes longueurs. Les forces qui agissent sur le système sont les poids propre des barres Q et la force horizontale P .

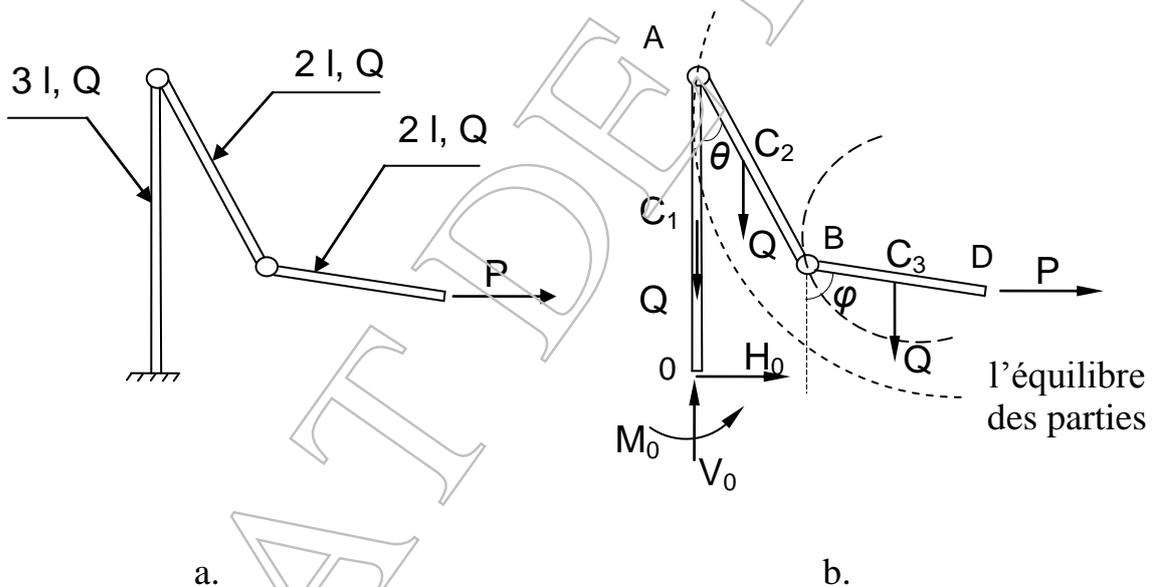


Fig. A.7.2

Solution :

Le schéma des forces – fig. A.7.2.a

Etape I : Caractérisation géométrique et statique

$$G_1 = 3 \times 3 - (3 \times 1 + 2 \times 2) = 2$$

Le système a deux degrés de liberté

Les inconnues sont – géométriques : θ et φ

- mécaniques : $H_0, V_0, M_0, H_A, V_A, H_B, V_B$.

Etape II : On applique le théorème d'équilibre des parties pour déterminer les inconnues:

L'équilibre du corps BD :

$$(1) \sum M_B^{dr} = 0 ; P \cdot 2l \cos \varphi - Q \cdot l \sin \varphi = 0$$

L'équilibre du corps AB :

$$(2) \sum M_A^{dr} = 0 ;$$

$$P(2l \cos \varphi + 2l \cos \theta) - Q(2l \sin \theta + l \sin \varphi) - Q \cdot l \sin \theta = 0$$

Etape III : Le théorème de la solidification :

L'équilibre du système OABD :

$$(3) \sum M_O = 0 ;$$

$$M_O - P(3l - 2l \cos \theta - 2l \cos \varphi) - Q \cdot l \sin \theta - Q(2l \sin \theta + l \sin \varphi) = 0$$

$$(4) \sum Y = 0 ; V_O - Q - Q - Q = 0$$

$$(5) \sum X = 0 ; H_O + P = 0$$

De l'équation (1) résulte φ

De l'équation (2) résulte θ

De l'équation (4) résulte V_O

De l'équation (5) résulte H_O

Des équations (3) et (2) résulte M_O

Résultats :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2P}{Q} ; \operatorname{tg} \theta = \frac{2P}{3Q}$$

$$V_O = 3Q ; H_O = -P ; M_O = 3Pl$$