

8.

CALCUL PRATIQUE DES FORCES DE LIAISON

8.1 POUTRES DROITES

La poutre droite est un corps unidimensionnel caractérisé par un axe qui est une ligne droite et une section transversale.

8.1.1 Poutre droite simplement appuyée

Est une poutre droite avec un appui simple et une articulation, les appuis étant situés aux extrémités.

EXEMPLE 1 :

Déterminer les réactions pour la poutre droite simplement appuyée, figure 8.1.

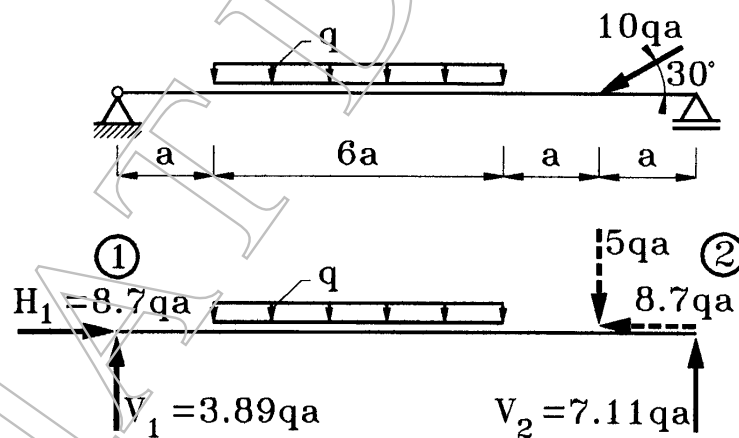


Fig. 8.1

Caractérisation géométrique et statique :

$$G_1 = 3 \times 1 - (2 \times 1 + 1 \times 1) = 0 \quad \text{géométrique strictement invariable}$$

$$E = 3 ; N = 3 ; E - N = 0 \quad \text{isostatique}$$

Le système des équations d'équilibre :

$$\sum x = 0 \gg H_1$$

$$\sum M_1 = 0 \gg V_2$$

$$\sum M_2 = 0 \gg V_1$$

$$\text{vérification : } \sum y$$

$$\begin{aligned} \Sigma x = 0 & \quad ; H_1 - 10qa \cos 30^\circ = 0 & H_1 = 8.7 qa \\ \Sigma M_1 = 0 & \quad ; -(q \ 6a) (a + 3a) - 10qa \sin 30^\circ 8a + V_2 9a = 0 & V_2 = 7.11qa \\ \Sigma M_2 = 0 & \quad ; +10qa \sin 30^\circ a + (q \ 6a) (2a + 3a) - V_1 9a = 0 & V_1 = 3.89qa \\ \text{vérification.} & \quad : \Sigma y = 3.89qa + 7.11qa - 10qa \sin 30^\circ - (q \ 6a) = 0 \end{aligned}$$

8.1.2 Poutre droite en console

Est une poutre droite qui a un appui de type encastrement à une extrémité.

EXEMPLE 2 :

Déterminer les réactions pour la poutre droite en console, figure 8.2.

Caractérisation géométrique et statique :

$G_1 = 3 \times 1 - (3 \times 1) = 0$ géométrique strictement invariable

$E = 3 ; N = 3 ; E - N = 0$ isostatique

Le système des équations

d'équilibre :

$$\Sigma x = 0 \quad \gg H_1$$

$$\Sigma y = 0 \quad \gg V_1$$

$$\Sigma M_1 = 0 \quad \gg M_1$$

vérif. : ΣM_A

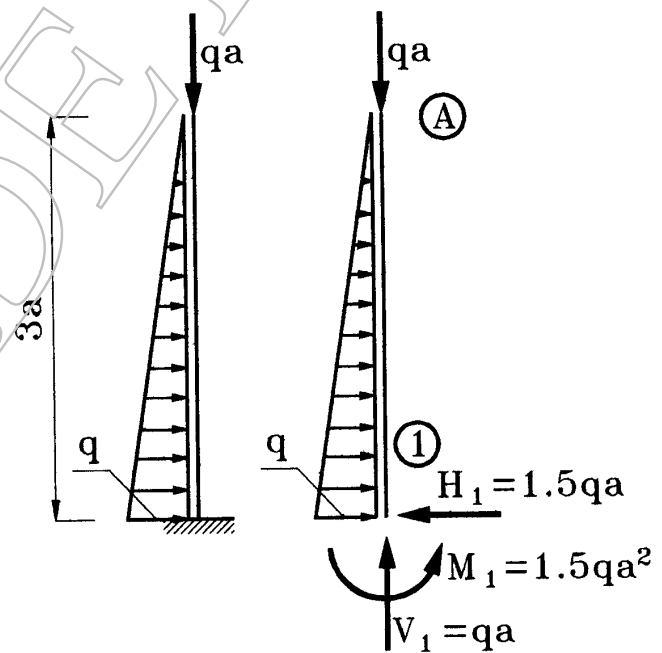


Fig. 8.2

$$\Sigma x = 0 \quad ; -H_1 + \left(\frac{1}{2}q \ 3a\right) = 0$$

$$H_1 = 1.5qa$$

$$\Sigma y = 0 \quad ; V_1 - qa = 0$$

$$V_1 = qa$$

$$\Sigma M_1 = 0 \quad ; M_1 - \left(\frac{1}{2}q \ 3a\right) \left(\frac{1}{3} \ 3a\right) = 0$$

$$M_1 = 1.5qa^2$$

$$\text{vérif.} : \Sigma M_A = 1.5qa^2 + \left(\frac{1}{2}q \ 3a\right) \left(\frac{2}{3} \ 3a\right) - 1.5qa \ 3a = 0$$

8.1.3 Poutre droite avec console

Est une poutre droite avec un appui simple et une articulation situent suivent l'axe.

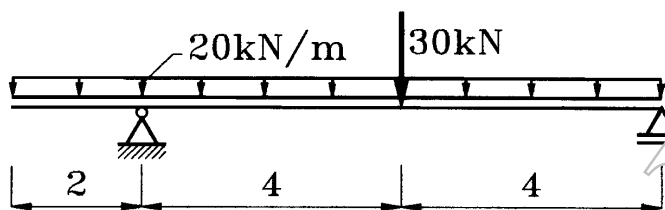
EXEMPLE 3 :

Déterminer les réactions pour la poutre droite avec console, figure 8.3.

Caractérisation géométrique et statique :

$G_1 = 3 \times 1 - (2 \times 1 + 1 \times 1) = 0$ géométrique strictement invariable

$E = 3 ; N = 3 ; E - N = 0$ isostatique



Le système des équations d'équilibre:

$$\Sigma x = 0 \quad \gg H_1$$

$$\Sigma M_1 = 0 \quad \gg V_2$$

$$\Sigma M_2 = 0 \quad \gg V_1$$

vérif. : Σy

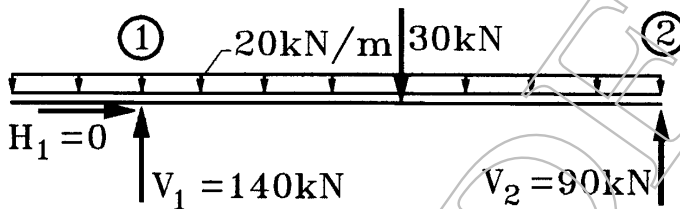


Fig. 8.3

$$\Sigma x = 0$$

$$H_1 = 0$$

$$\Sigma M_1 = 0 ; -(20 \times 10) (5 - 2) - 30 \times 4 + V_2 \times 8 = 0$$

$$V_2 = 90 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0 ; (20 \times 10)5 + 30 \times 4 - V_1 \times 8 = 0$$

$$V_1 = 140 \text{ kN}$$

$$\text{vérif. : } \Sigma y = 140 - (20 \times 10) - 30 + 90 = 0$$

EXEMPLE 4 :

Déterminer les réactions pour la poutre droite, figure 8.4.

Observation : l'appuy simple (2) a une direction inclinée. L'inconnue R_2 est décomposée en deux composants – verticale et horizontale.

Caractérisation géométrique et statique :

$G_1 = 3 \times 1 - (2 \times 1 + 1 \times 1) = 0$ géométrique strictement invariable

$E = 3 ; N = 3 ; E - N = 0$ isostatique

Le système des équations d'équilibre:

$$\begin{aligned} \Sigma x = 0 &>> H_1 \\ \Sigma M_1 = 0 &>> R_2 \\ \Sigma M_2 = 0 &>> V_1 \end{aligned}$$

vérif. : Σy

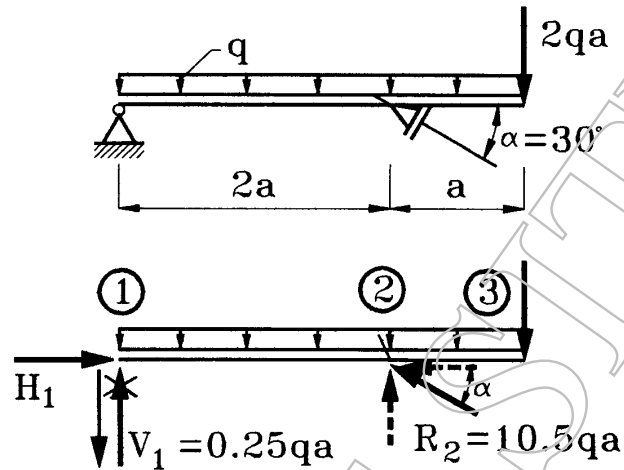


Fig. 8.4

$$\begin{aligned} \Sigma x = 0 & ; H_1 - R_2 \cos 30^\circ = 0 & H_1 = 9.09 qa \\ \Sigma M_1 = 0 & ; -(q \ 3a) \ 1.5a - 2qa \times 3a + R_2 \sin 30^\circ \times 2a = 0 & R_2 = 10.5qa \\ \Sigma M_2 = 0 & ; +(q \ 3a) (1.5a - a) - 2qa \times a - V_1 \ 2a = 0 & V_1 = -0.25qa \end{aligned}$$

vérif. : $\Sigma y = -(q \ 3a) - 2qa - 0.25qa + 10.5qa \sin 30^\circ = 0$

8.2 STRUCTURES

8.2.1 Structure simplement appuyée

EXEMPLE 5 :

Déterminer les réactions pour la structure de la figure 8.5.

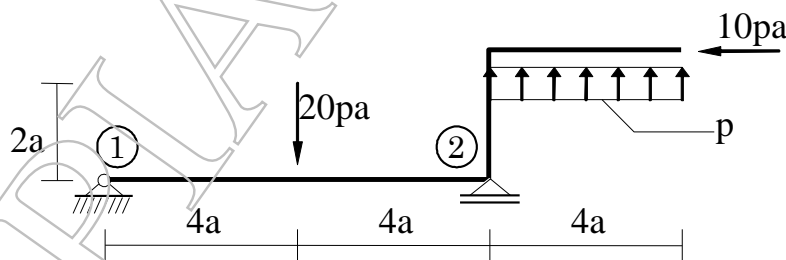


Fig. 8.5

Caractérisation géométrique et statique :

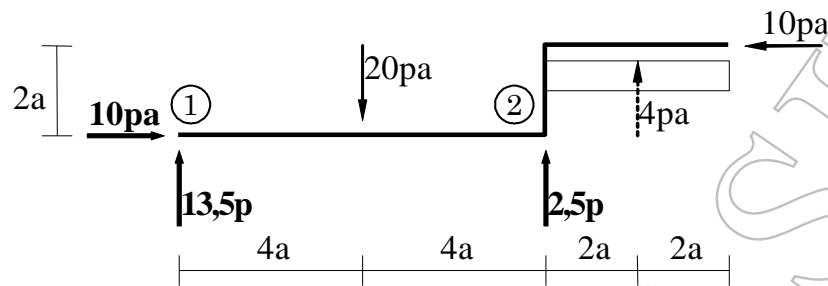
$G_1 = 3 \times 1 - (2 \times 1 + 1 \times 1) = 0$ géométrique strictement invariable

$E = 3 ; N = 3 ; E - N = 0$ isostatique

Les équations : $\Sigma x = 0 >> H_1$

$\Sigma M_1 = 0 >> V_2$

$$\frac{\Sigma M_2 = 0 \gg V_1}{\text{vérif. : } \Sigma y}$$



$$\begin{aligned} \Sigma x = 0 & ; H_1 + 10 pa = 0 & H_1 = 10 pa \\ \Sigma M_1 = 0 & ; - 20 pa 4a + V_2 8a + (p 4a) 10a + 10 pa 2a = 0 & V_2 = 2,5 pa \\ \Sigma M_2 = 0 & ; - V_1 8a + 20 pa 4a + (p 4a) 2a + 10 pa 2a = 0 & V_1 = 13,5 pa \\ \text{vérif. : } \Sigma y & = 13,5 pa - 20 pa + 2,5 pa + (p 4a) = 0 \end{aligned}$$

8.2.2 Structure en console

EXEMPLE 6 :

Vérifier vos calculs, fig. 8.6 :

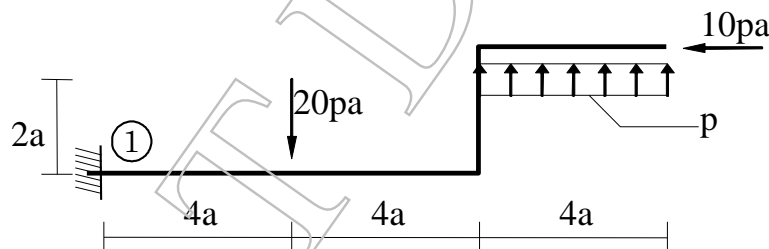


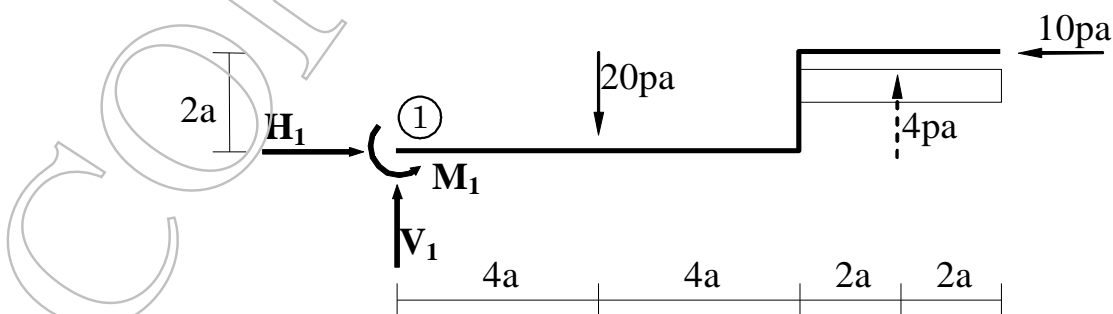
Fig. 8.6

Caractérisation géométrique et statique :

$G_1 = 3 \times 1 - (3 \times 1) = 0$ géométrique strictement invariable

$E = 3 ; N = 3 ; E - N = 0$ isostatique

Le schéma de forces :



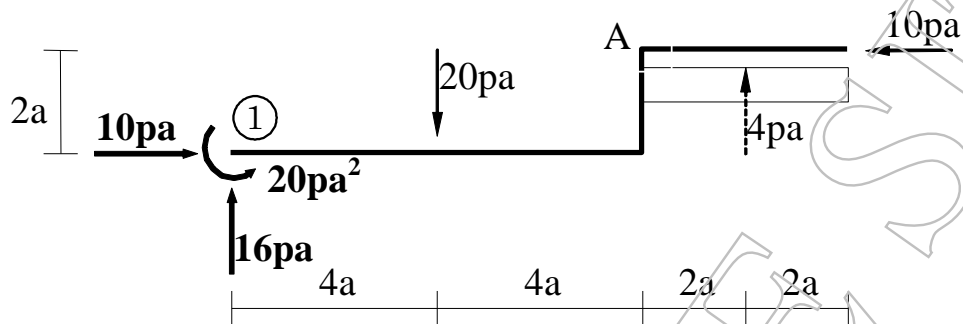
Les équations et les résultats :

$$\Sigma x = 0 \gg H_1$$

$$\Sigma y = 0 \gg V_1$$

$$\Sigma M_1 = 0 \gg M_1$$

vérif. : ΣM_A



8.2.3 Structure avec trois appuis simples

EXEMPLE 7 :

Vérifier vos calculs, fig. 8.7 :

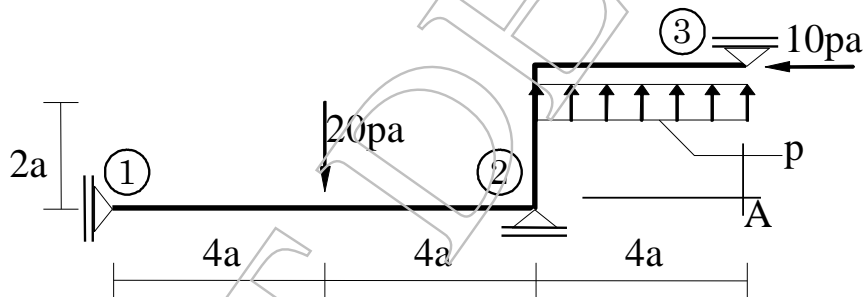
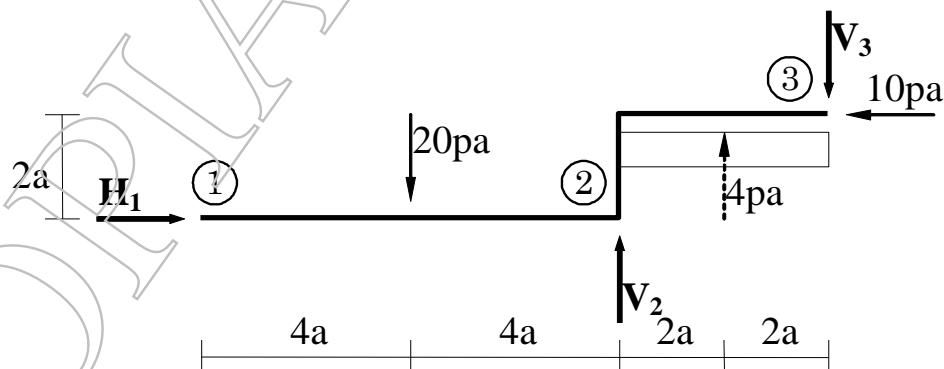


Fig. 8.7

Le schéma de forces



Caractérisation géométrique et statique :

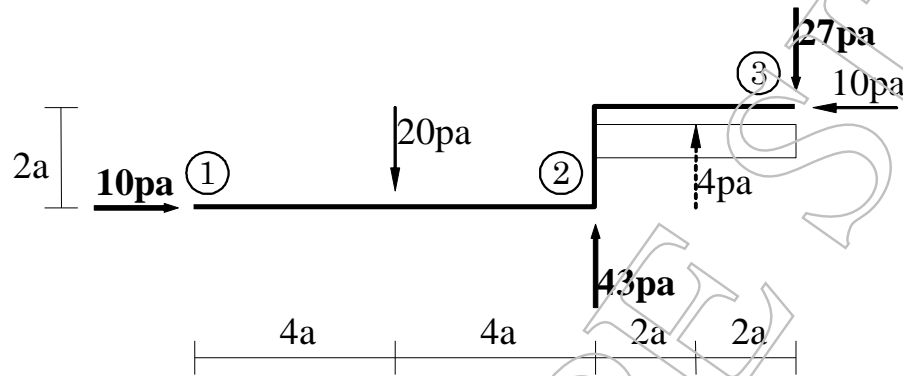
$$G_1 = 3 \times 1 - (2 \times 1 + 1 \times 1) = 0 \quad \text{géométrique strictement invariable}$$

$$E = 3 ; N = 3 ; E - N = 0 \quad \text{isostatique}$$

$$\begin{aligned} \Sigma x = 0 &>> H_1 \\ \Sigma M_A = 0 &>> V_2 \\ \Sigma M_2 = 0 &>> V_3 \end{aligned}$$

vérif. : Σy

Les résultats :



8.3 POUTRES CONSSOLEE

EXEMPLE 8 :

Déterminer les forces de liaisons pour la structure de la figure 8.8.

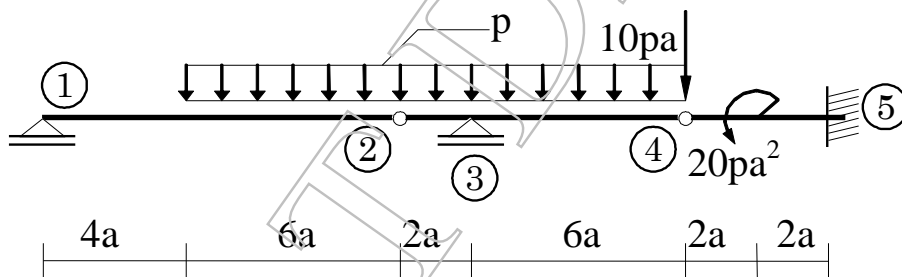


Fig. 8.8

Caractérisation géométrique et statique :

$$G_1 = 3 \times 3 - (3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 2) = 0 \quad \text{géométrique strictement invariable}$$

$$E = 3 \times 3 \quad ; \quad N = 3 + 4 + 2 \quad ; \quad E - N = 0 \quad \text{isostatique}$$

I. En appliquant la méthode d'isolation des corps,

Le schéma de forces est donné dans la fig. 8.8.a

La structure est composée par trois barres droites. La barre 1-2 est portée à droite ; la barre 2-3-4 est porteuse à gauche et portée à droite ; la barre 4-5 est le corps porteur.

En appliquant la méthode d'isolation des corps toutes les forces de liaisons (extérieures et intérieures) sont mises en évidence.

Pour chaque corps on va écrire trois équations d'équilibre.

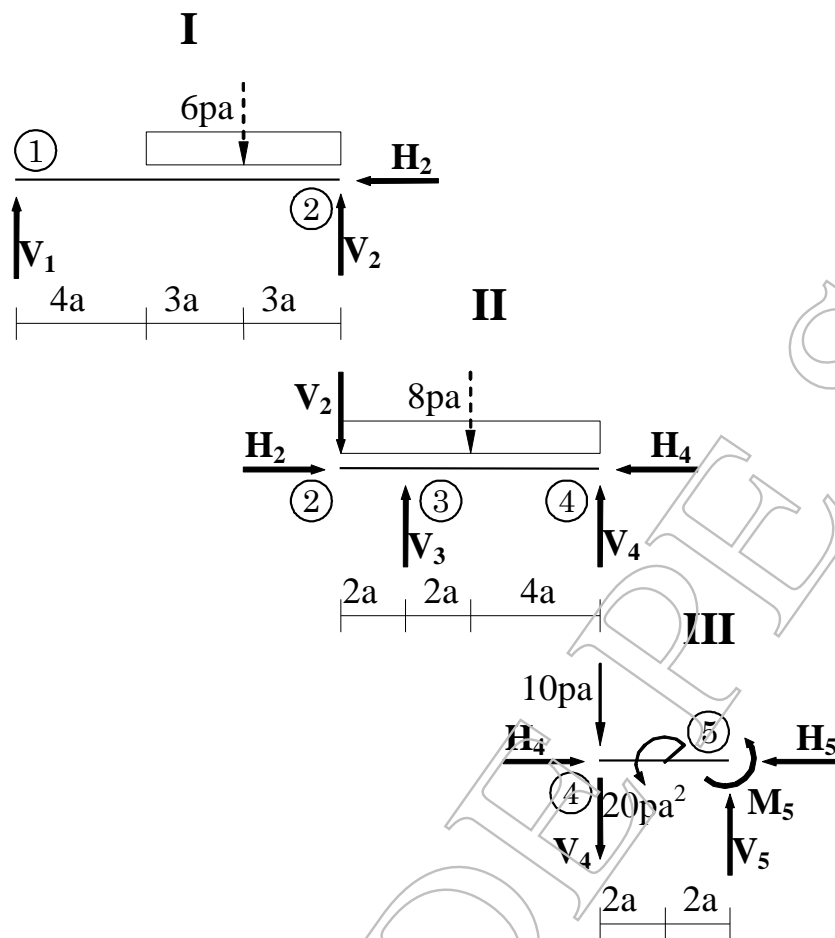


Fig. 8.8.a

Corps I

$$\begin{aligned} \sum x = 0 & & H_2 = 0 \\ \sum M_1 = 0 & V_2 \cdot 10a - (p \cdot 6a) \cdot (4a + 3a) = 0 & V_2 = 4,2 \text{ pa} \\ \sum M_2 = 0 & -V_1 \cdot 10a + (p \cdot 6a) \cdot 3a = 0 & V_1 = 1,8 \text{ pa} \end{aligned}$$

vérification : $1,8 \text{ pa} - (p \cdot 6a) + 4,2 \text{ pa} = 0$

Corps II

$$\begin{aligned} \sum x = 0 & H_2 - H_4 = 0 & H_4 = 0 \\ \sum M_3 = 0 & 4,2 \text{ pa} \cdot 2a + V_4 \cdot 6a - (p \cdot 8a) \cdot (4a - 2a) = 0 & V_4 = 1,27 \text{ pa} \\ \sum M_4 = 0 & 4,2 \text{ pa} \cdot 8a - V_3 \cdot 6a + (p \cdot 8a) \cdot 4a = 0 & V_3 = 10,93 \text{ pa} \end{aligned}$$

vérification : $-4,2 \text{ pa} + 10,93 \text{ pa} - (p \cdot 8a) + 1,27 \text{ pa} = 0$

Corps III

$$\begin{aligned} \sum x = 0 & & H_5 = 0 \\ \sum y = 0 & -10 \text{ pa} - 1,27 \text{ pa} + V_5 = 0 & V_5 = 11,27 \text{ pa} \\ \sum M_5 = 0 & 10 \text{ pa} \cdot 4a + 1,27 \text{ pa} \cdot 4a + 20 \text{ pa}^2 + M_5 = 0 & M_5 = -65,08 \text{ pa}^2 \end{aligned}$$

vérification : $\sum M_4 = 20 \text{ pa}^2 + 11,27 \text{ pa} \cdot 4a - 65,08 \text{ pa}^2 = 0$

II. Ou, en appliquant la méthode mixte :

Le schéma de forces comprend seulement les forces extérieures : actives et de liaisons (réactions), fig. 8.8.b.

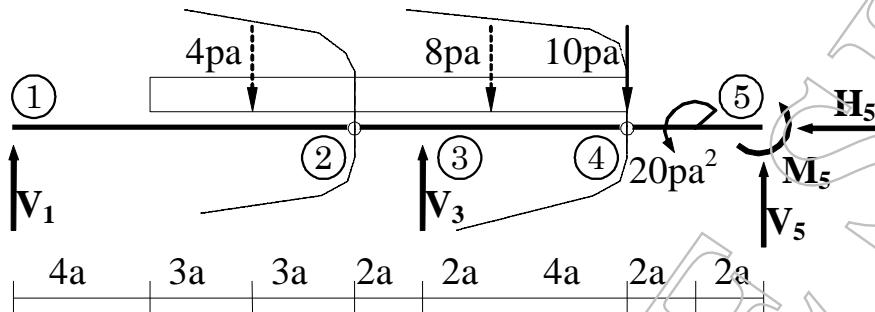


Fig. 8.8.b

Pour calculer les réactions on commence avec les parties portées : 1-2, 2-3-4.

Le théorème de l'équilibre des parties $\begin{cases} \sum M_2^{gh} = 0 \gg V_1 \\ \sum M_4^{gh} = 0 \gg V_3 \end{cases}$

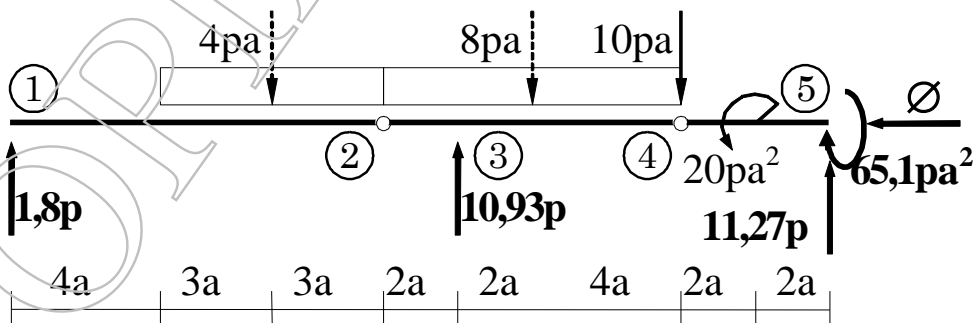
Une fois les réactions sur les parties portées connues, il est possible de déterminer les réactions sur la partie porteuse.

Le théorème de la solidification $\begin{cases} \sum y = 0 \gg V_5 \\ \sum x = 0 \gg H_5 \\ \sum M_5 = 0 \gg M_5 \end{cases}$

Vérification d'ensemble :

$\sum M_2 = 0$ l'équation de vérification doit être une équation de type moment parce qu'une inconnue M₅ est de type moment.

Les résultats :



8.4
SYSTEMES DE CADRES (ossatures)

8.4.1. Portique à trois articulations, avec des appuis au même niveau

EXEMPLE 9 :

Déterminer les réactions pour le portique à trois articulations de la figure 8.9.

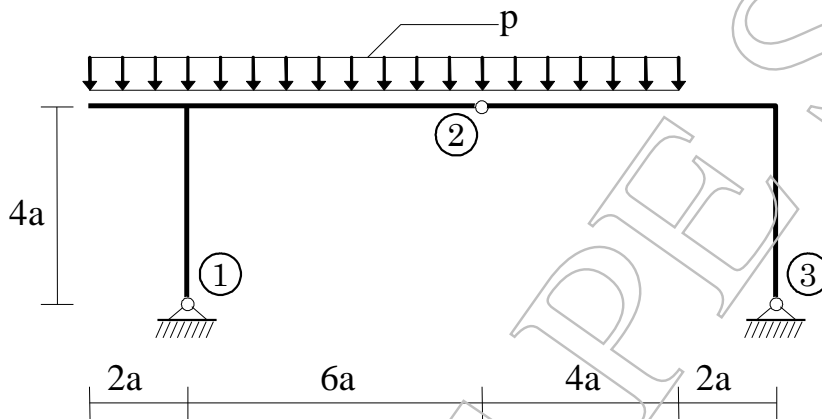


Fig. 9.9

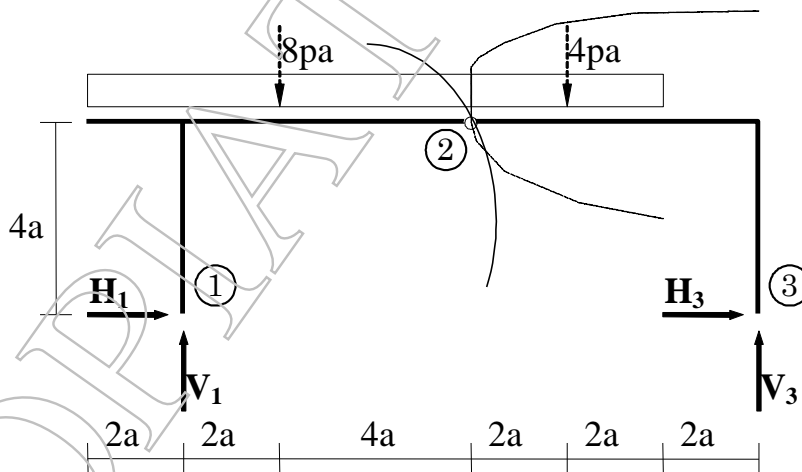
Caractérisation géométrique et statique :

$G_1 = 3 \times 2 - (3 \times 0 + 2 \times 3 + 1 \times 0) = 0$ géométrique strictement invariable

$E = 3 \times 2$; $N = 2 + 2 + 2$; $E - N = 0$ isostatique

On applique la méthode mixte :

Le schéma des forces :



a) Le théorème de la solidification $\begin{cases} \sum M_1 = 0 \gg V_3 \\ \sum M_3 = 0 \gg V_1 \end{cases}$

Vérification pour les forces verticales : $\sum y$

b) Le théorème de l'équilibre des parties $\begin{cases} \sum M_2^{gh} = 0 \gg H_1 \\ \sum M_2^{dr} = 0 \gg H_3 \end{cases}$

Vérification pour les forces horizontales : $\sum x$

$$-8pa \times 2a - 4pa \times 8a + V_2 \times 12a = 0$$

$$4pa \times 4a + 8pa \times 10a - V_1 \times 12a = 0$$

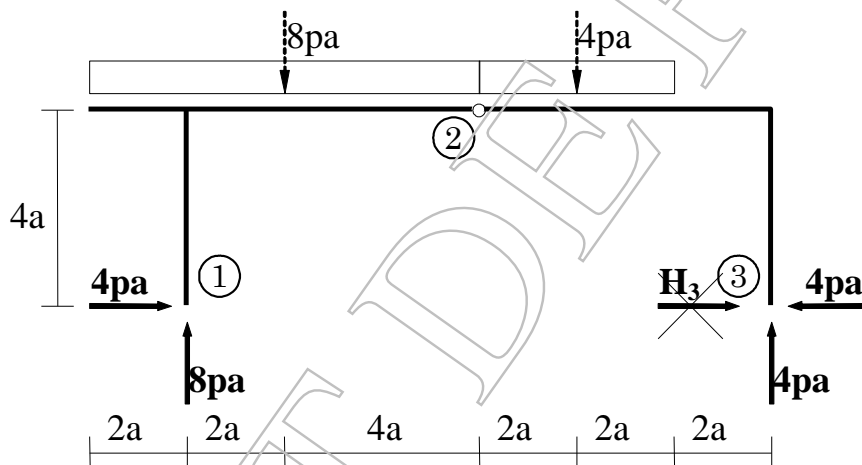
$$\text{vérification : } \sum y = 8pa - (p \times 8a) - 9p \times 4a + 4pa = 0$$

$$8pa \times 4a - 8pa \times 6a + H_1 \times 4a = 0$$

$$-4pa \times 2a + 4pa \times 6a + H_3 \times 4a = 0$$

$$\text{vérification : } \sum x = 4pa - 4pa = 0$$

Les résultats :



8.4.2. Portique à trois articulations, avec des appuis dénivelés

EXEMPLE 10 :

Déterminer les réactions pour le portique à trois articulations de la figure 8.10.

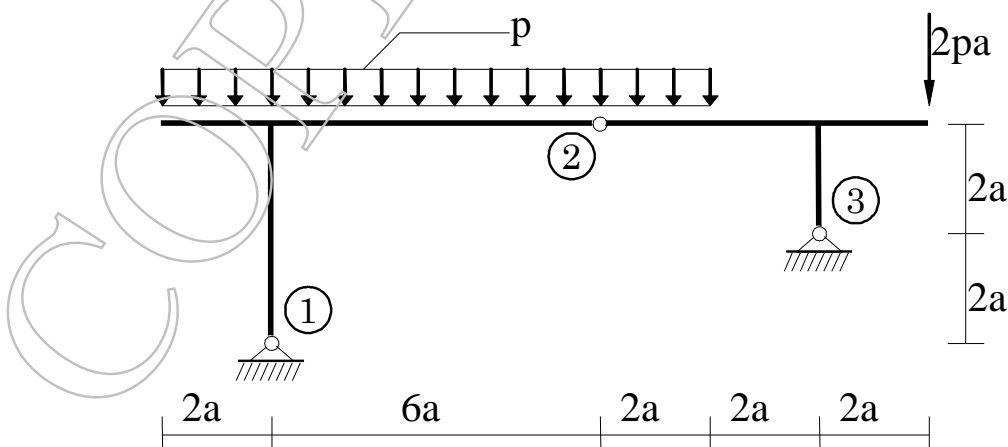


Fig. 8.10

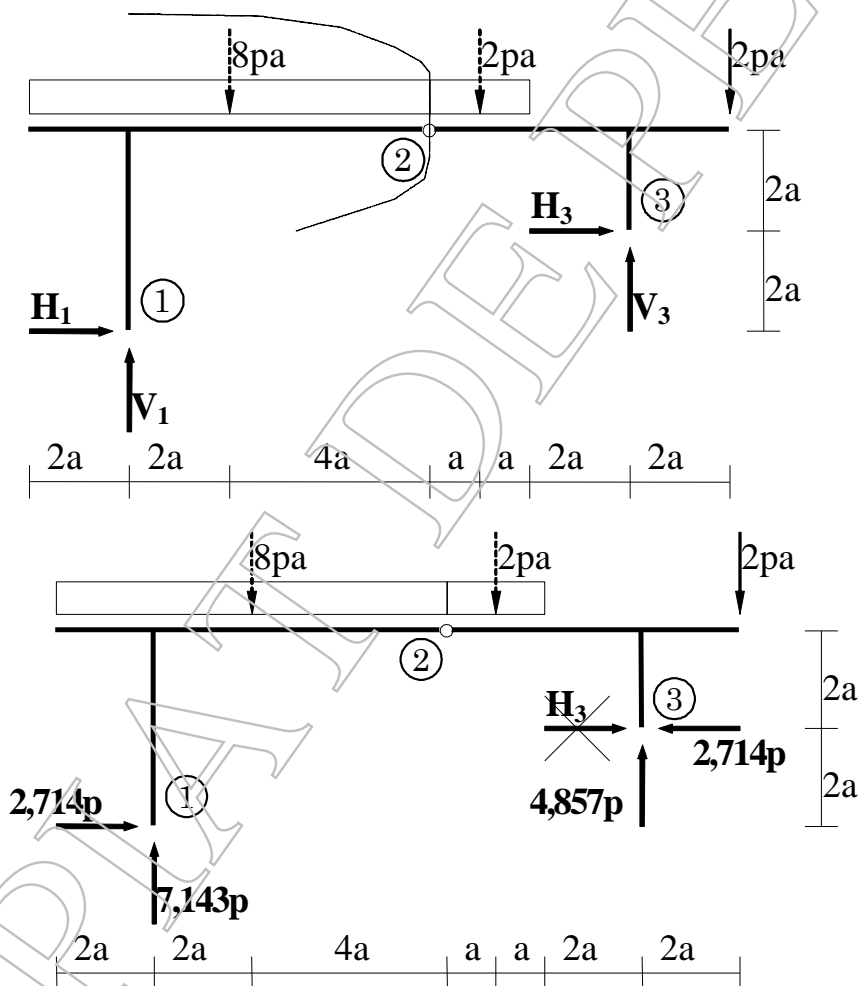
On applique les mêmes équations mais elles sont couplées deux par deux. La vérification est au finale en appliquant le théorème de la solidification:

$$\begin{cases} \sum M_1 = 0 \\ \sum M_2^{dr} = 0 \end{cases} \gg V_3, H_3$$

$$\begin{cases} \sum M_3 = 0 \\ \sum M_2^{gh} = 0 \end{cases} \gg V_1, H_1$$

Vérification $\begin{cases} \sum^x \\ \sum^y \end{cases}$

Faire les calculs et vérifier les résultats :



8.4.3. Portique à trois articulations, avec des appuis totalement dénivelés

EXEMPLE 11 :

Déterminer les réactions pour le portique à trois articulations avec des appuis totalement dénivelés de la figure 8.11.

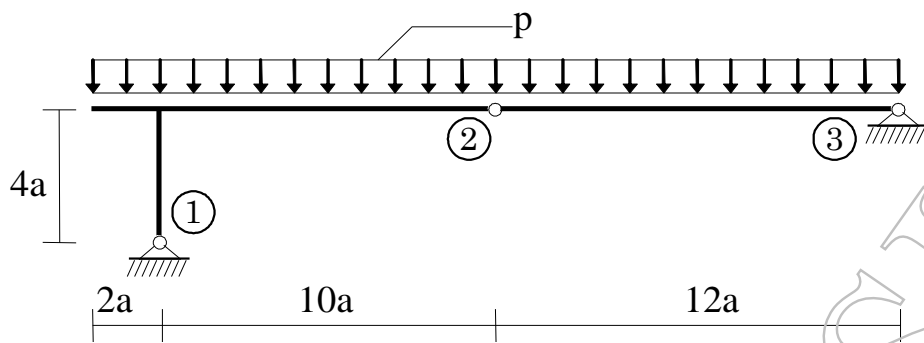


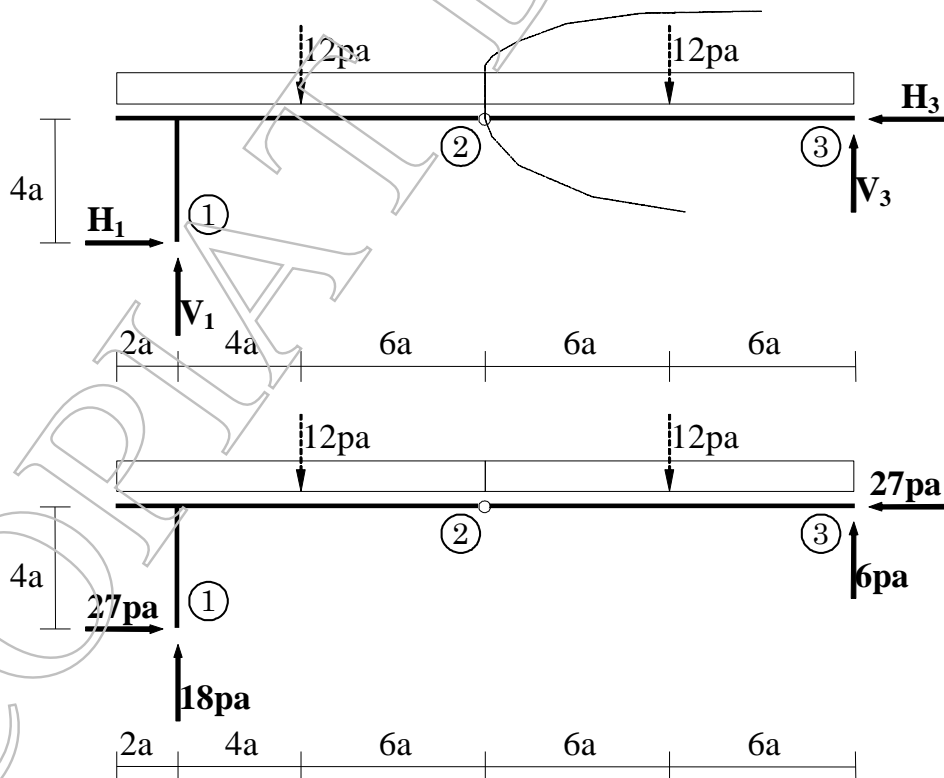
Fig. 8.11

On applique les mêmes équations, mais elles sont utilisées de la manière suivante :

$$\begin{cases} \sum M_2^{dr} = 0 & \gg V_3 \\ \sum M_1 = 0 & \gg H_3 \\ \sum M_3 = 0 & \gg V_1, H_1 \\ \sum M_2^{gh} = 0 & \gg V_1, H_1 \end{cases}$$

Vérification $\begin{cases} \sum x \\ \sum y \end{cases}$

Faire les calculs et vérifier les résultats :



APPLICATION 8.1. :

Déterminer les forces de liaisons extérieures (les réactions) pour la structure donnée dans la figure A.8.1

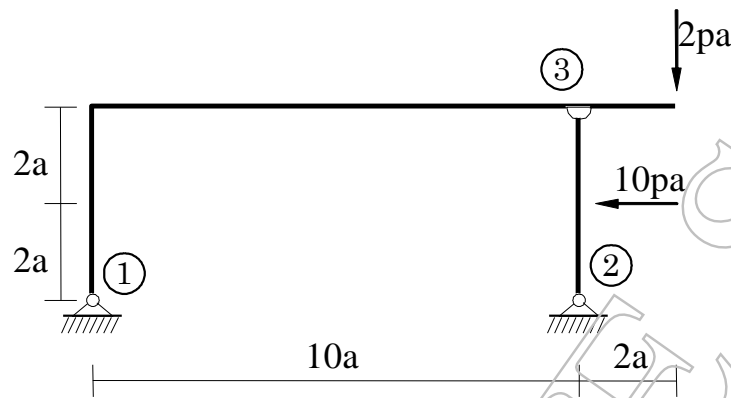


Fig. A.8.1

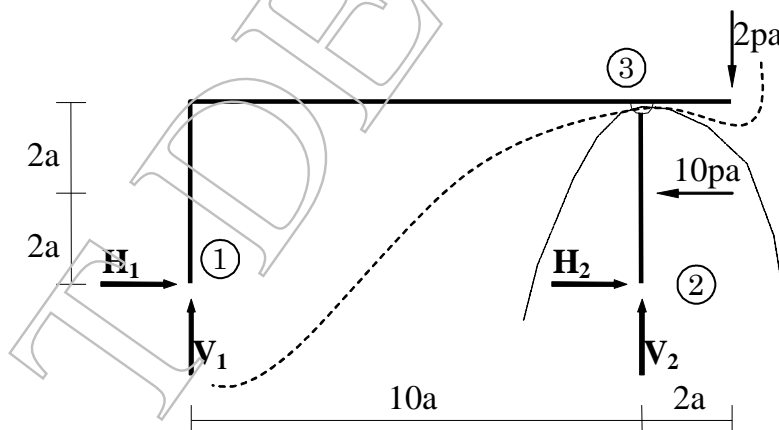
Solution :

Caractérisation géométrique et statique :

$G_1 = 3 \times 2 - (2 \times 3) = 0$ géométrique strictement invariable

$E = 3 \times 2$; $N = 2 \times 3$; $E - N = 0$ isostatique

Le schéma des forces :



Les équations :

$$\begin{cases} \sum M_{3,ba} = 0 & \gg H_2 \\ \sum M_1 = 0 & \gg V_2 \\ \sum M_{3,ha} = 0 & \gg V_1, H_1 \\ \sum M_2 = 0 & \end{cases}$$

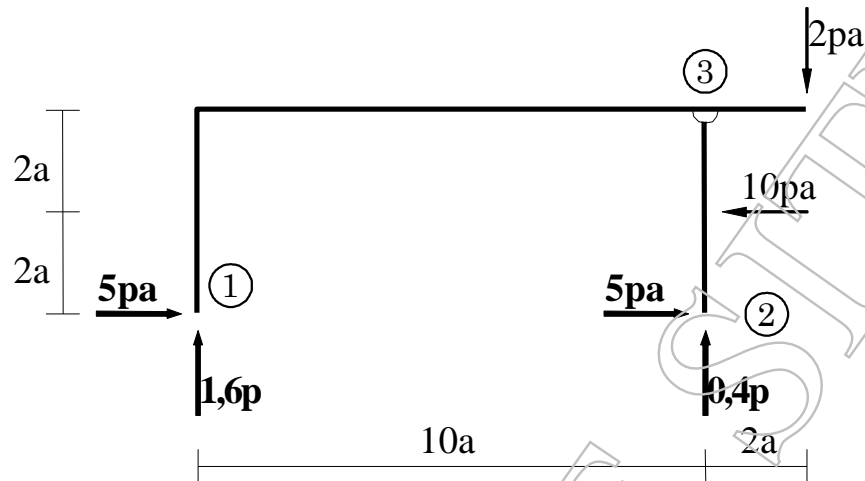
$$\begin{aligned} -10pa \times 2a + H_2 \times 4a &= 0 \\ -2pa \times 12a + 10pa \times 2a + V_2 \times 10a &= 0 \\ -V_1 \times 10a + H_1 \times 4a - 2pa \times 2a &= 0 \\ -V_1 \times 10a - 2pa \times 2a + 10pa \times 2a &= 0 \end{aligned}$$

Verification : $\begin{cases} \sum x \\ \sum y \end{cases}$

Vérification :

$$\begin{aligned} 5pa + 5pa - 10pa &= 0 \\ 1,6pa + 0,4pa - 2pa &= 0 \end{aligned}$$

Les résultats :



APPLICATION 8.2. :

Déterminer les réactions pour la structure donnée dans la figure A.8.2.

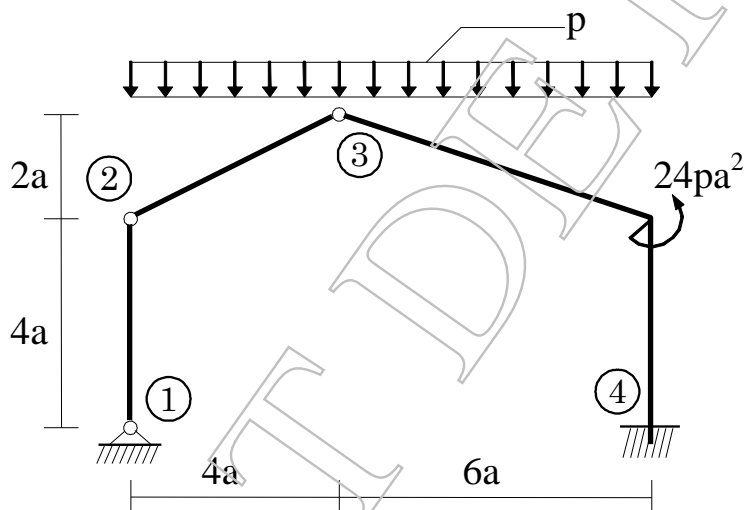


Fig. A.8.2

Solution :

La structure de la figure A.8.2 est composée par un portique encastree porteur et un portique à trois articulations portée à droite.

Caractérisation géométrique et statique :

$$G_1 = 3 \times 3 - (3 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times 0) = 0 \text{ géométrique strictement invariable}$$

$$E = 3 \times 3 \quad ; \quad N = 2 + 2 + 2 + 3 \quad ; \quad E - N = 0 \quad \text{isostatique}$$

On commence les calculs avec la partie portée 1-2-3, en appliquant le théorème de l'équilibre des parties :

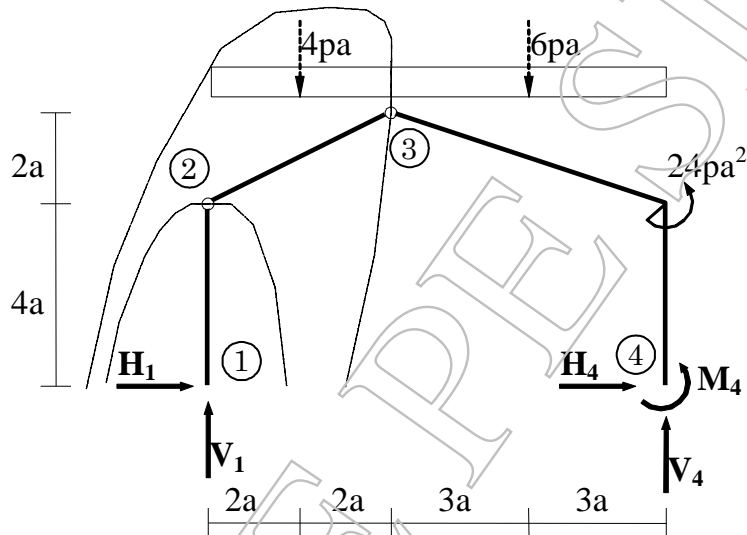
$$\begin{cases} \sum M_{2,gh} = 0 \\ \sum M_{3,gh} = 0 \end{cases} \gg H_1, V_1$$

Après la structure porteuse, en appliquant le théorème de la solidification :

$$\begin{cases} \sum x = 0 \\ \sum y = 0 \\ \sum M_4 = 0 \end{cases}$$

Vérification : $\sum M_3$

Le schéma des forces :



$$H_1 \times 4a = 0$$

$$H_1 \times 6a - V_1 \times 4a + 4pa \times 2a = 0$$

$$H_4 + 0 = 0$$

$$2pa + V_4 - 4pa - 6pa = 0$$

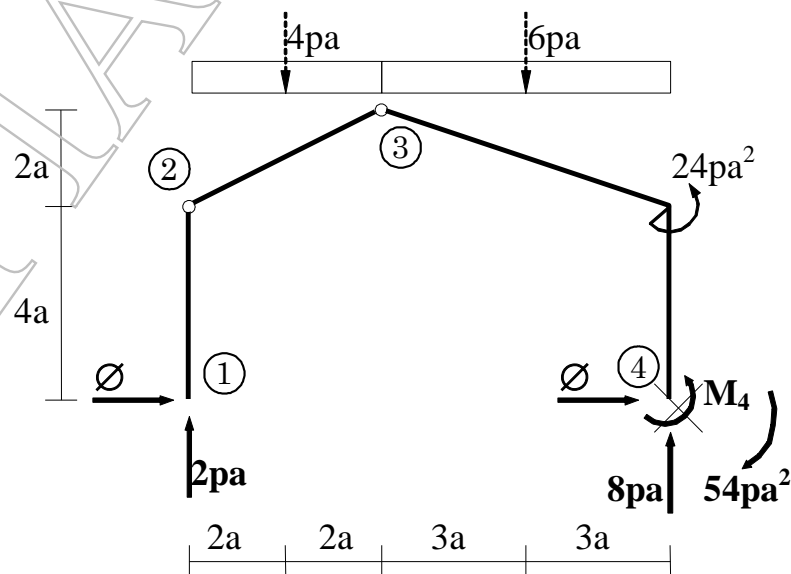
$$M_4 + 24pa^2 + 6pa \times 3a + 4pa \times 8a - 2pa \times 10a = 0$$

$$\gg H_1 = 0, V_1 = 2pa$$

$$\gg H_4 = 0, V_4 = 8pa, M_4 = -54pa^2$$

$$\text{Vérification: } -2pa \times 4a + 4pa \times 2a - 6pa \times 3a + 24pa^2 + 8pa \times 6a - 54pa^2 = 0$$

Les résultats :



APPLICATION 8.3. :

Déterminer les forces de liaisons intérieures et extérieures pour la structure de la figure A.8.3

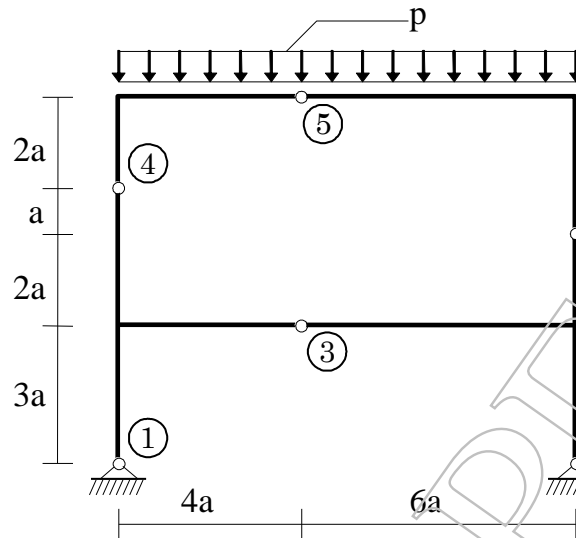


Fig. A.8.3

Solution :

La structure est composée par deux portiques à trois articulations.

La structure 4-5-6 est totalement portée et la structure 1-2-3 est porteuse.

La structure portée forme un contour fermé. Pour déterminer les réactions est nécessaire d'ouvrir le contour.

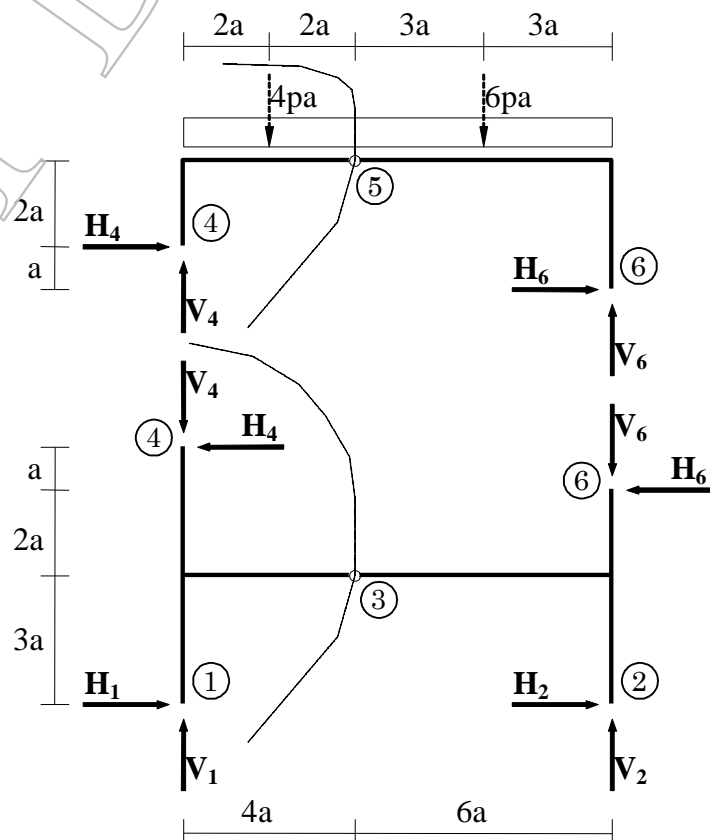
On doit commencer les calculs avec la structure 4-5-6. Donc est nécessaire de déterminer des forces de liaisons intérieures dans les articulations 4 et 6.

Structure 4-5-6 – portique à trois articulations avec des appuis dénivelés :

$$\begin{cases} \sum M_4 = 0 \\ \sum M_5^{dr} = 0 \end{cases} \Rightarrow V_6, H_6$$

$$\begin{cases} \sum M_6 = 0 \\ \sum M_5^{gh} = 0 \end{cases} \Rightarrow V_4, H_4$$

Vérification $\begin{cases} \sum x \\ \sum y \end{cases}$



La structure 1-2-3 – portique à trois articulations avec les appuis au même niveau :

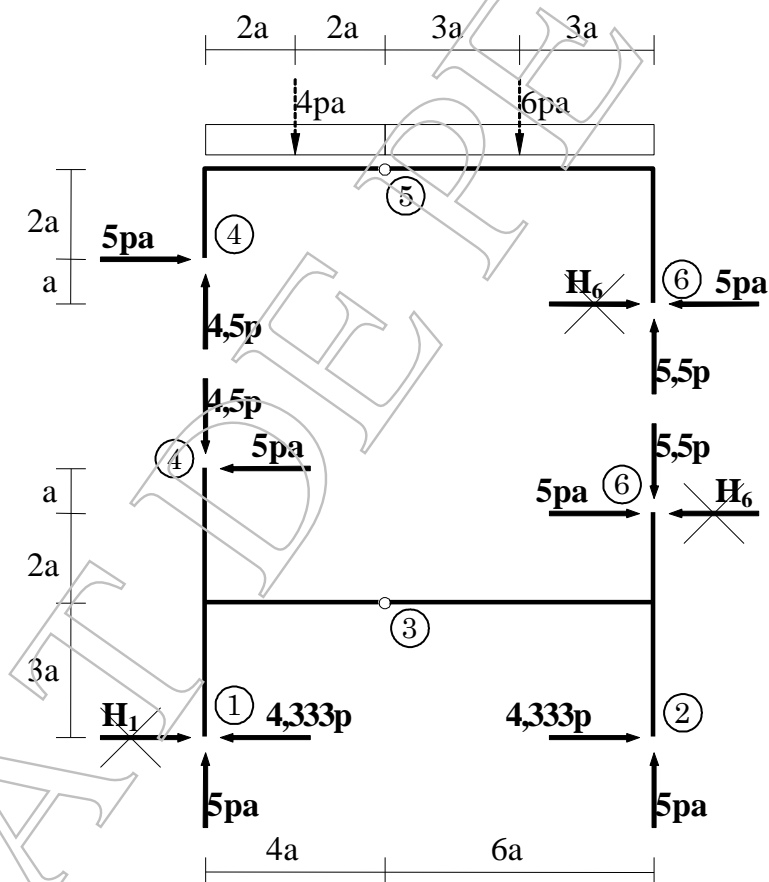
$$\begin{cases} \sum M_1 = 0 \gg V_3 \\ \sum M_3 = 0 \gg V_1 \end{cases}$$

Vérification pour les forces verticales : $\sum y$

$$\begin{cases} \sum M_2^{gh} = 0 \gg H_1 \\ \sum M_2^{dr} = 0 \gg H_3 \end{cases}$$

Vérification pour les forces horizontales : $\sum x$

Vérifier vos calculs :



APPLICATION 8.4. :

Déterminer les réactions en calculant le nombre minime des forces de liaisons intérieures, fig. A.8.4.

Solution :

La structure est composée par quatre sous ensembles :

- la barre 4-6 est une barre droite avec des articulations aux extrémités pas chargée - elle porte le nome « le pendule » et représente une seule liaisonne qui a la direction de la barre ; la force de liaison port le nome « effort axial » ;
- aussi la barre 3-5 ;

- la partie 6-5 est totalement portée ;
- la partie 1-4 est simplement appuyée et portée à droite ;
- la barre 4-5 est totalement portée ;
- la barre 2-4 est une console - la structure porteuse.

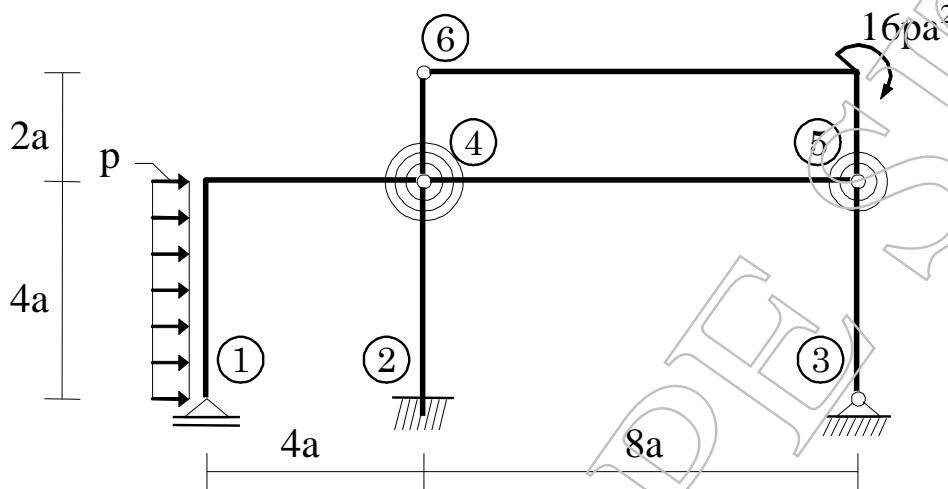
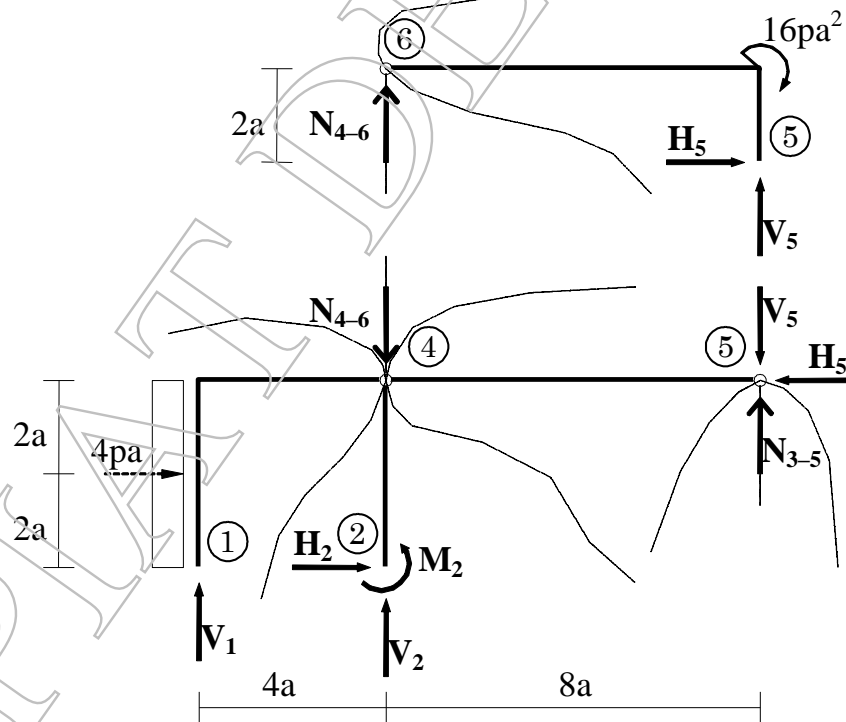


Fig. A.8.4

Le schéma des forces :



Les équations :

La structure 5-6

$$\begin{cases} \sum M_5 = 0 \gg N_{46} \\ \sum x = 0 \gg H_5 \\ \sum M_6 = 0 \gg V_5 \end{cases}$$

Vérification: $\sum y$

La structure 1-2-3-4-5

- en appliquant le théorème d'équilibre des partis :

$$\begin{cases} \sum M_4^{dr} = 0 \gg N_{35} \\ \sum M_4^{gh} = 0 \gg V_1 \end{cases}$$

- en appliquant le théorème de la solidification :

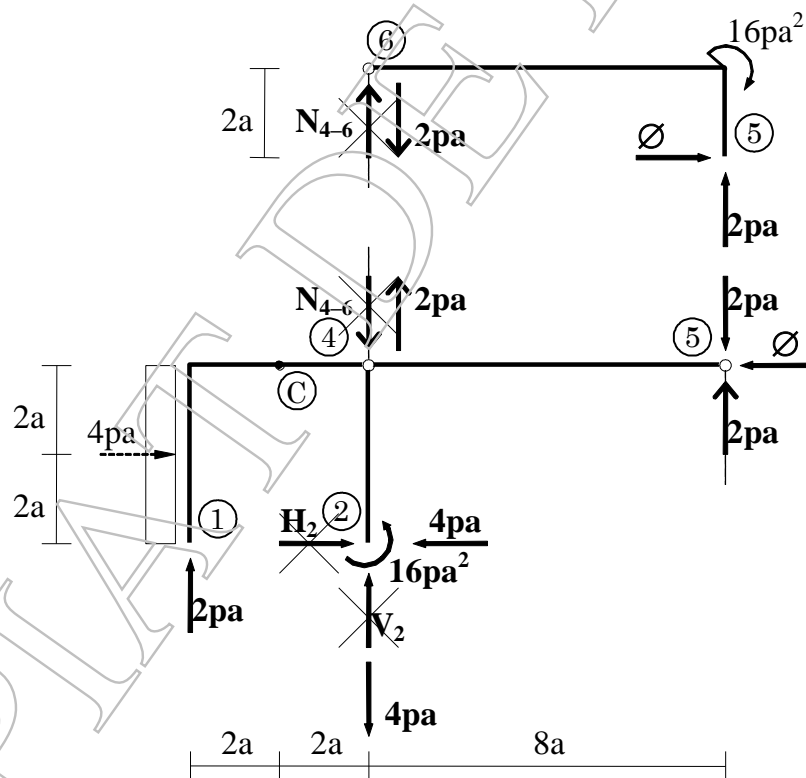
$$\begin{cases} \sum x = 0 \gg H_2 \\ \sum y = 0 \gg V_2 \\ \sum M_4 = 0 \gg M_2 \end{cases}$$

Vérification : $\sum M_C$

$$-N_{46} \times 8a - 16pa^2 = 0$$

$$H_5 = 0 \gg N_{46} = -2pa ; V_5 = 2pa$$

$$-16pa^2 + V_5 \times 8a = 0$$



$$N_{45} \times 8a - 2pa \times 8a = 0$$

$$(p4a) \times 2a - V_1 \times 4a = 0$$

$$\gg N_{45} = 2pa ; V_1 = 2pa$$

$$(p4a) + H_1 = 0$$

$$2pa + 2pa + V_2 + 2pa - 2pa = 0$$

$$-2pa \times 4a - (p4a) \times 2a + M_2 - 2pa \times 8a + 2pa \times 8a = 0$$

$$\gg H_1 = -4pa ; V_2 = -4pa ; M_2 = 16pa^2$$

Vérification d'ensemble : $\sum M_C$
 $+(p \cdot 4a) \times 2a - 16pa^2 - 2pa \times 2a + 16pa^2 - 4pa \times 4a - 4pa \times 2a + 2pa \times 10a = 0$

APPLICATION 8.5. :

Déterminer les réactions en calculant le nombre minime des forces de liaisons intérieures, fig. A.8.5.

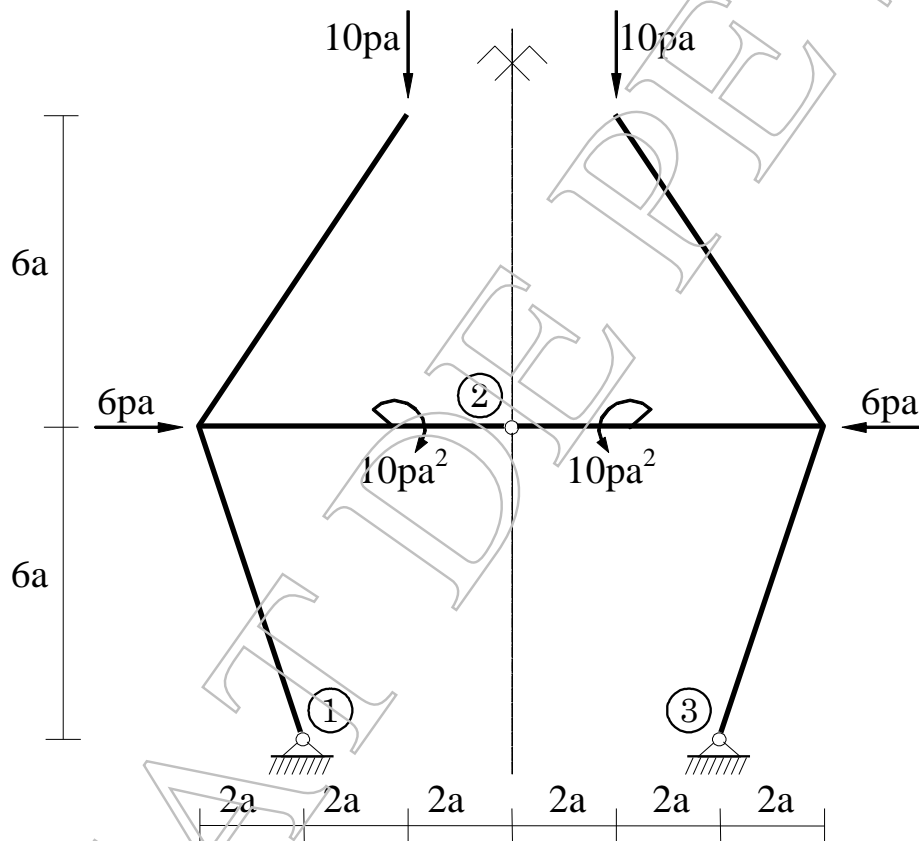


Fig. A.8.5

Solution :

La structure est composée symétrique et chargée symétrique.

On peut faire le schéma des forces par moitié parce qu'on connaît que :

- les forces de liaison extérieures sont symétriques ;
- dans l'articulation qui est placée sur l'axe de la symétrie il y a seulement une force de liaison intérieure – la force horizontale H (la force verticale intérieure est nulle).

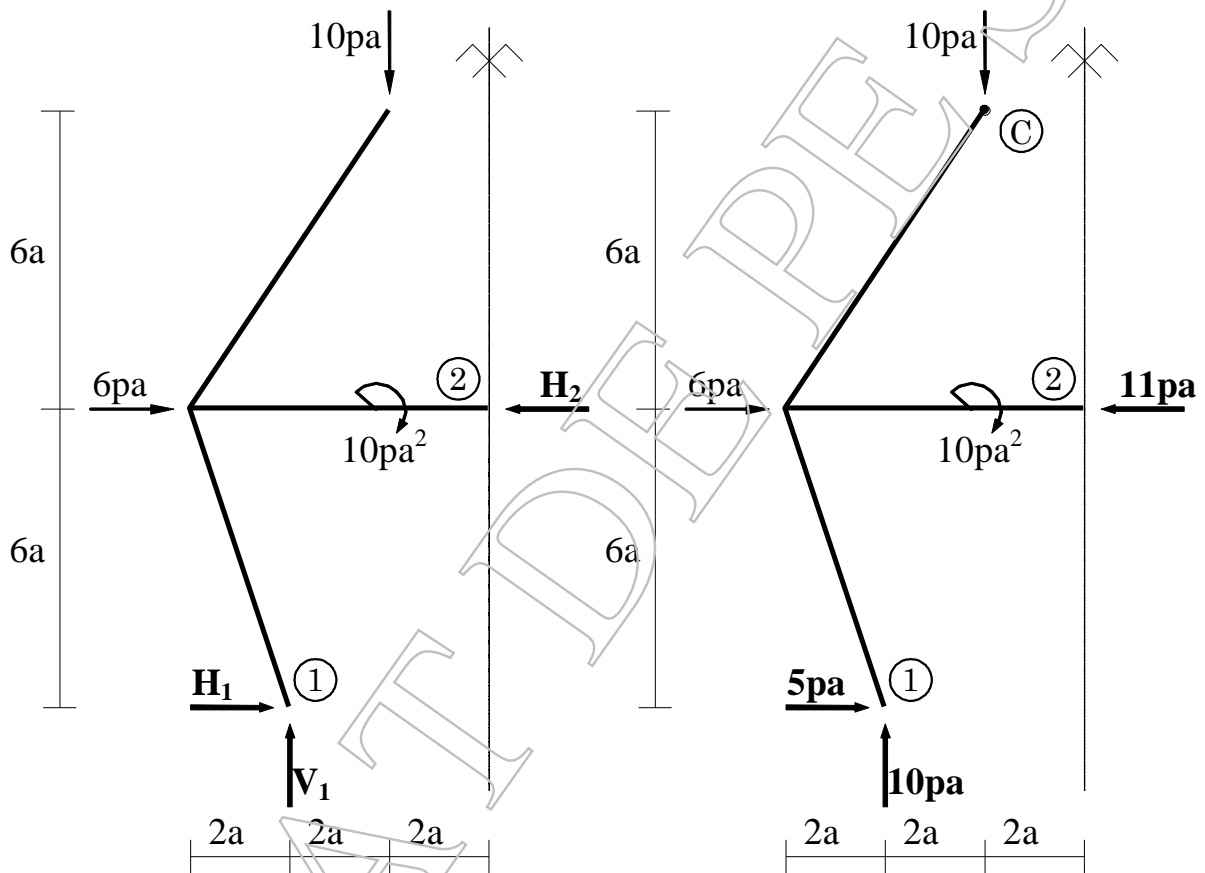
Les équations :

$$\begin{cases} \sum M_1 = 0 \gg H_2 \\ \sum y = 0 \gg V_1 \\ \sum M_2 = 0 \gg H_1 \end{cases}$$

Vérification: $\sum M_C$

Le schéma des forces

Les résultats



$$-6pa \times 6a - 10pa^2 - 10pa \times 2a + H_2 \times 6a = 0$$

$$-10pa + V_1 = 0$$

$$-10pa \times 4a + H_1 \times 6a - 10pa^2 + 10pa \times 2a = 0$$

$$\gg H_2 = 11pa ; V_1 = 11pa ; H_1 = 5pa$$

$$\text{Vérification: } 6pa \times 6a - 11pa \times 6a - 10pa^2 + 5pa \times 12a - 10pa \times 2a = 0$$

9.

POUTRES A TREILLIS

Poutre à treillis est un système plan de barres liées entre elles par des rotules et qui est lié avec le milieu extérieur par un nombre de liaisons suffisant pour la fixer dans son plan, fig. 9.1.

Les poutres à treillis sont utilisées comme poutres pour les ponts de voie ferrée, poutres pour les haies industrielles, pour les poteaux qui soutiennent les câbles, pour les grues, pour les coupôles des pavillons d'exposition et pour d'autres structures à grande portée.

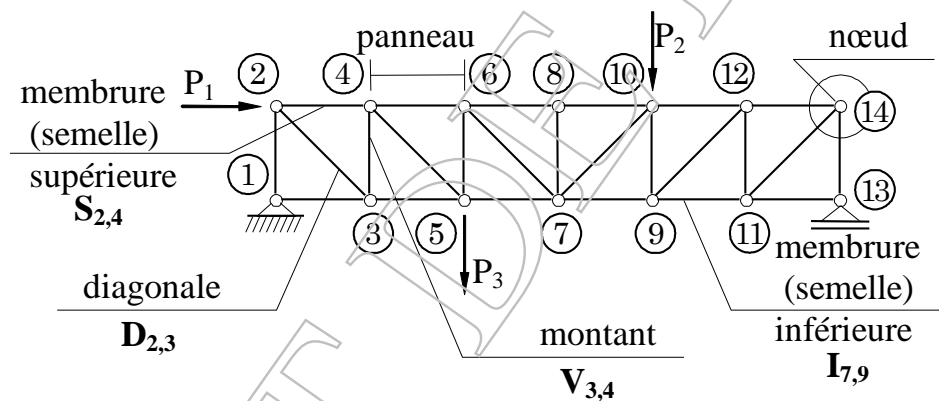


Fig. 9.1

Les dénominations caractéristiques sont: les nœuds, les membrures (semelles) inférieure et supérieure, les diagonales, les montants, les panneaux [15]. Les nœuds sont numérotés; les barres portent aussi des nombres différents. On remarque que ce système de corps peut être aussi composé spatial. Le terme poutre à treillis est utilisé seulement pour les systèmes plans.

Au point de vu de la forme les poutres à treillis sont très variées, fig. 9.2. Elles peuvent être classifiées:

- a) poutres à treillis simples, fig. 9.2.a
- b) poutres à treillis composées, fig. 9.2.b
- c) poutres à treillis complexes, fig. 9.2.c.

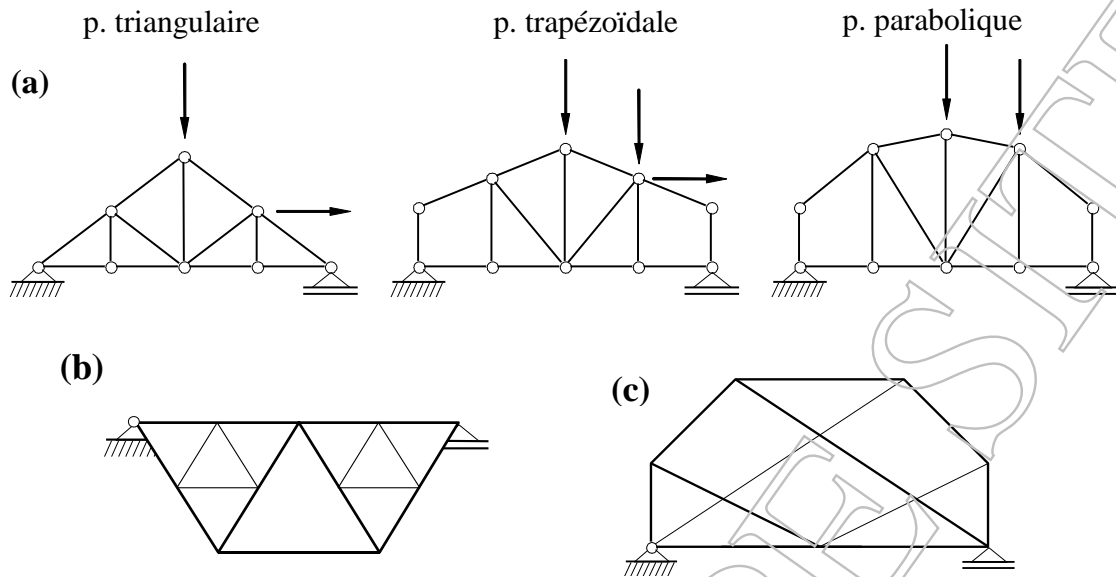


Fig. 9.2

9.1 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

Les hypothèses qui sont en générale faites pour le calcul des poutres à treillis sont les suivantes :

- 1) Les **nœuds** sont considérés comme des **articulations idéales** en permettant sans aucune restriction la rotation, fig. 9.3.

REMARQUE :

En réalité, par la manière de réaliser le nœud, la liaison empêche en certaines limites la rotation, elle offre une certaine rigidité.

* L'effet de la rigidité des nœuds change les résultats dans des limites acceptables, donc l'hypothèse "le nœud = articulation parfaite" est utilisée pour les poutres à treillis avec une portée < 70.0 m.

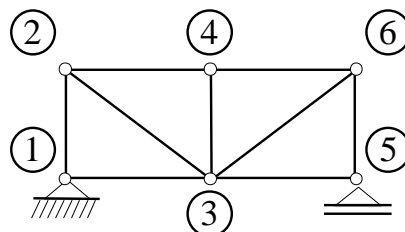


Fig. 9.3

- 2) Les **axes des barres** sont concourants aux nœuds (cela dépend de la solution constructive).
- 3) Les **barres** sont des éléments **droits** entre chaque nœud.

4) Les forces extérieures effectivement appliquées et les forces de liaison extérieures agissent seulement dans les nœuds.

Les conséquences de ces hypothèses:

1. Toute barre d'une poutre à treillis est une barre qui a deux articulations à ses bouts et aucune force entre ces deux points, fig. 9.4.a.

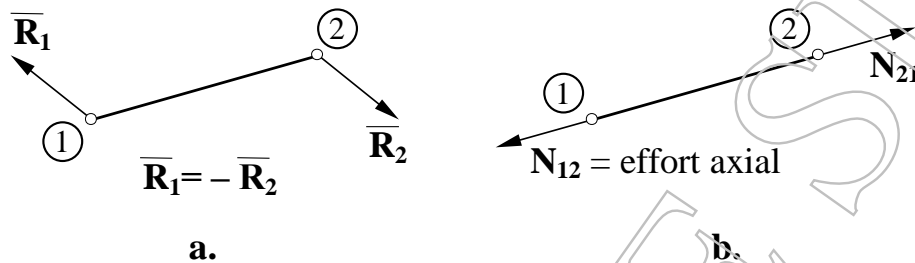


Fig. 9.4

2. Chaque barre se trouve en équilibre sous l'action des forces de liaison dans les articulations. Ces deux forces ont comme support l'axe de la barre, fig. 9.4.b

Conclusion: Chaque barre d'une poutre à treillis est sollicitée par une force qui a la direction de la barre, nommée effort axial, qui peut être de tension ou de compression.

Par convention on travail avec l'effort qui agit sur le nœud, pas au bout de la barre, fig. 9.5.

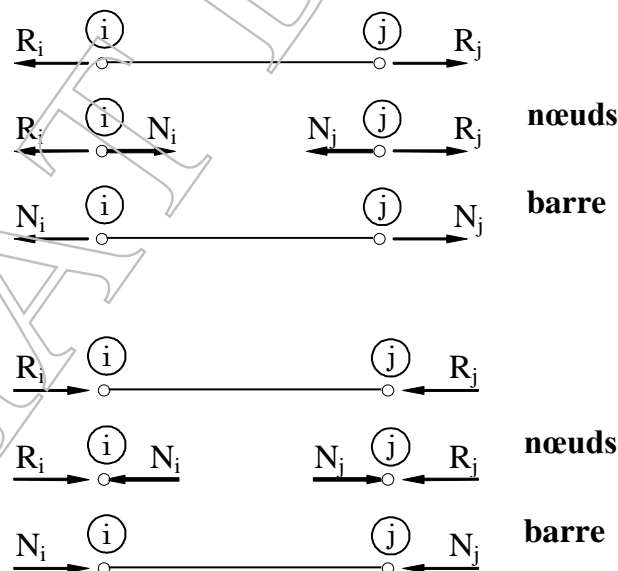


Fig. 9.5

9.2 CARACTERISATION GEOMETRIQUE ET STATIQUE

Pour qu'une poutre à treillis soit en équilibre, chaque nœud de la poutre doit être

en équilibre. Le nœud isolé est actionné par un système de forces concourantes et coplanaires.

Dans ce cas on peut écrire deux équations d'équilibre pour chaque nœud.

$n \rightarrow$ le nombre de nœuds

$2n \rightarrow$ le nombre d'équations distinctes d'équilibre.

* LES INCONNUES

b - les efforts dans les barres (le nombre des barres)

r - les réactions dans les liaisons avec le milieu extérieur ($r = 3$, le nombre minime nécessaire pour fixer la poutre en plan est 3).

$$2n = b + r \tag{9.1.a}$$

$$2n = b + 3 \tag{9.1.b}$$

\Rightarrow la condition pour que la poutre soit isostatique.

Exemple, fig. 9.6:

$$n = 10 ; 2n = 20$$

$$\left. \begin{array}{l} b = 17 \\ r = 3 \end{array} \right\} = 20$$

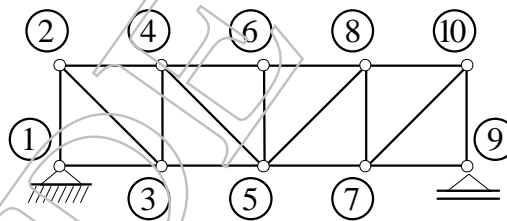


Fig. 9.6

Conclusion: la poutre est isostatique.

Attention! Cette relation est une relation quantitative, il faut faire attention à la modalité de placer les barres. Par exemple, fig. 9.7: la relation (9.1) continue à être satisfaite mais l'ensemble n'est pas bien conçu.

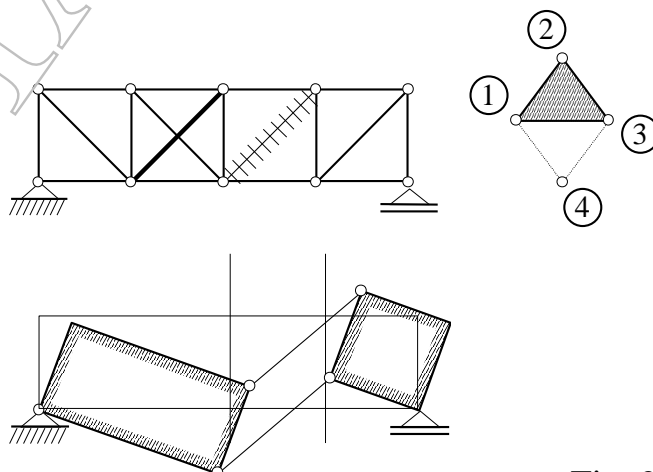


Fig. 9.7

9.3

METHODES POUR LE CALCUL DES EFFORTS DANS LES BARRES.

Pour les poutres à treillis simples, les méthodes de calcul sont :

- la méthode des nœuds ;
- la méthode de la section simple.

Nous allons considérer une poutre à treillis avec 3 conditions extérieures d'appuis et la première étape est de déterminer ces 3 forces de liaison extérieures en écrivant 3 équations d'équilibre pour l'ensemble de la poutre. On applique le théorème de la solidification, fig. 9.8 :

$$\begin{aligned} \sum x &= 0 \\ \sum M_1 &= 0 &>> H_{16} ; V_{16} ; V_1 \\ \sum M_{16} &= 0 \end{aligned}$$

vérification $\sum y$

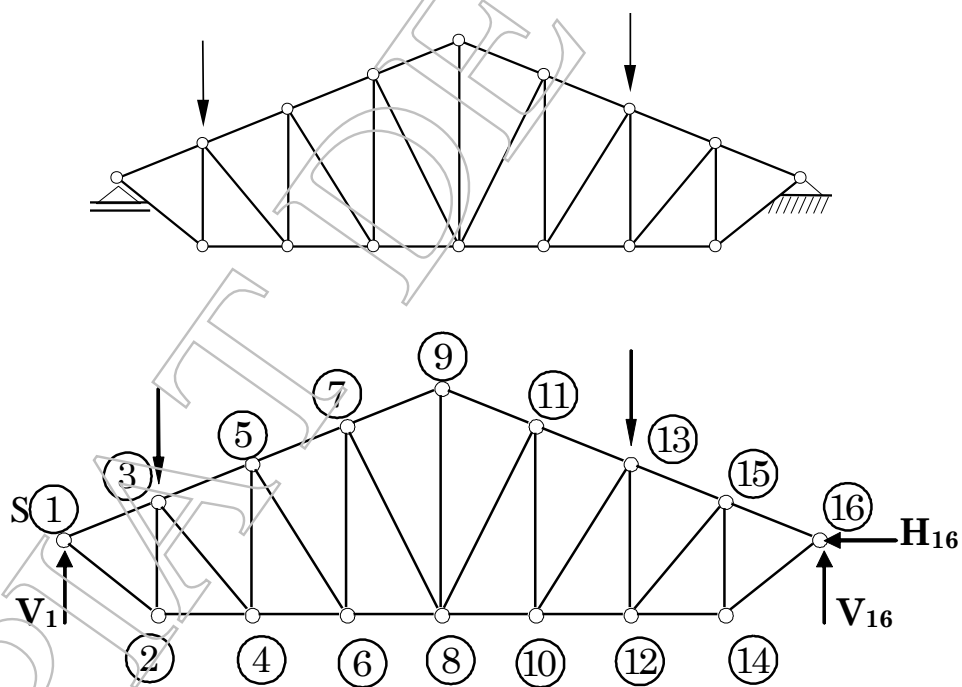


Fig. 9.8

1. La méthode des nœuds.

Chaque nœud de la poutre est isolé. Il doit être en équilibre sous l'action des forces extérieures et des efforts des barres.

Dans chaque nœud, les forces connues et inconnues forment un système de

forces concourantes en plans. Donc on peut écrire deux équations d'équilibre pour chaque nœud :

$$(\text{nœud } i) \begin{cases} \sum x = 0 \\ \sum y = 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

Soit la poutre à treillis donnée dans la figure 9.8. Dans quelques barres on aura des efforts de tension, dans d'autres barres on aura des efforts de compression, mais pour les calculs on considère les efforts inconnus comme des efforts de tension, fig. 9.9. Bien sûr qu'après l'effectuation des calculs résulte le sens réel des efforts (voire l'application 9.2).

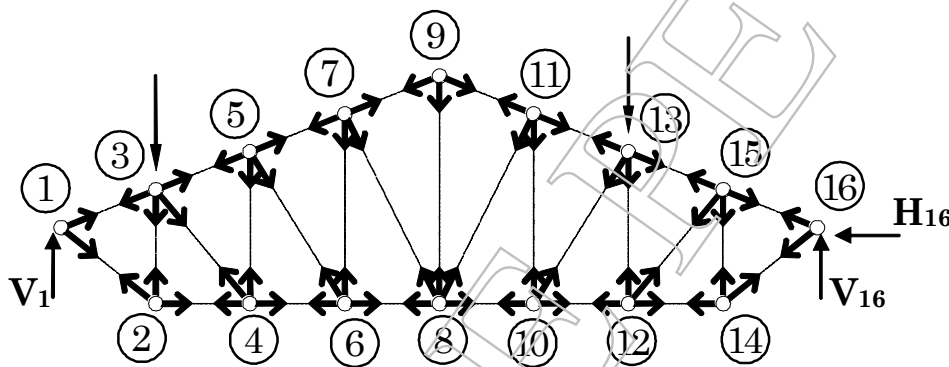


Fig. 9.9

Pour la poutre donnée on peut écrire $2 \times 16 = 32$ équations d'équilibre pour déterminer 29 inconnues - les efforts dans les barres. La différence entre 32 équations et 29 inconnues représente 3 équations qui doivent être satisfaites, donc la possibilité de vérifier les résultats.

REMARQUE:

La succession des nœuds n'est pas aléatoire. Parce qu'on peut écrire seulement deux équations d'équilibre, il faut commencer et continuer par de nœuds où il y a seulement deux barres d'effort inconnu.

L'avantage de la méthode: elle permet de calculer les efforts dans toutes les barres. Elle se trouve à la base de tous les logiciels spécialisés dans le calcul de ce type de structure en barre.

Le désavantage: le grand nombre d'inconnues qu'on doit déterminer sans avoir la possibilité de vérifier la correction qu'à la fin.

2. La méthode de la section simple

Cette méthode utilise le théorème d'équilibre des parties, en comprenant par partie un ensemble de barres et de nœuds, fig. 9.10.b.

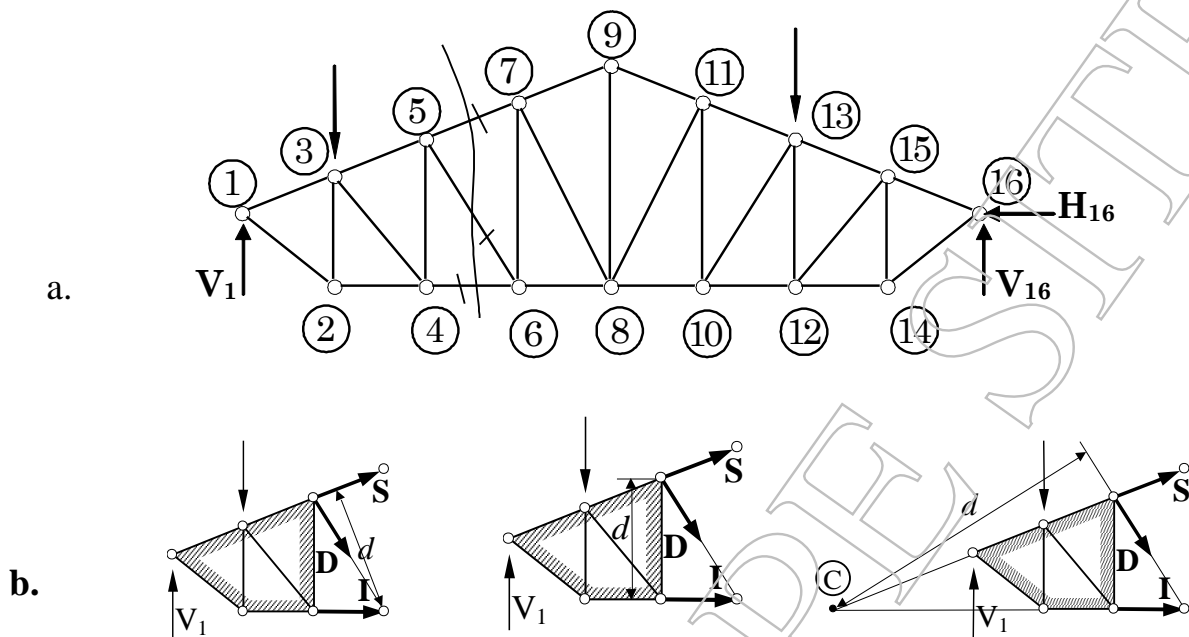


Fig. 9.10

On pratique une section, fig. 9.10.a, qui doit satisfaire les conditions suivantes:

1. La section doit diviser la poutre en deux parties distinctes,
2. De sectionner au maximum trois barres d'effort inconnu.

On choisit une de ces deux parties, fig. 9.10.b, qui doit être en équilibre sous l'action des forces extérieures (connues) et des efforts dans les barres sectionnées (inconnus).

Sur cette partie agit un système de forces coplanaires. On peut écrire trois équations distinctes d'équilibre.

L'avantage de la méthode: elle permet de calculer directement l'effort dans une barre sans connaître les efforts d'autres barres.

La méthode est aussi utilisée surtout pour vérifier les résultats.

9.4

L'IDENTIFICATION DES BARRES AYANT L'EFFORT EGAL A ZERO

Il y a les situations suivantes:

I. Si dans un nœud se rencontrent deux barres de directions différentes, il y a deux situations:

I.a On n'agit aucune force extérieure, les efforts dans ces deux barres sont égaux à zéro, fig. 9.11.a.

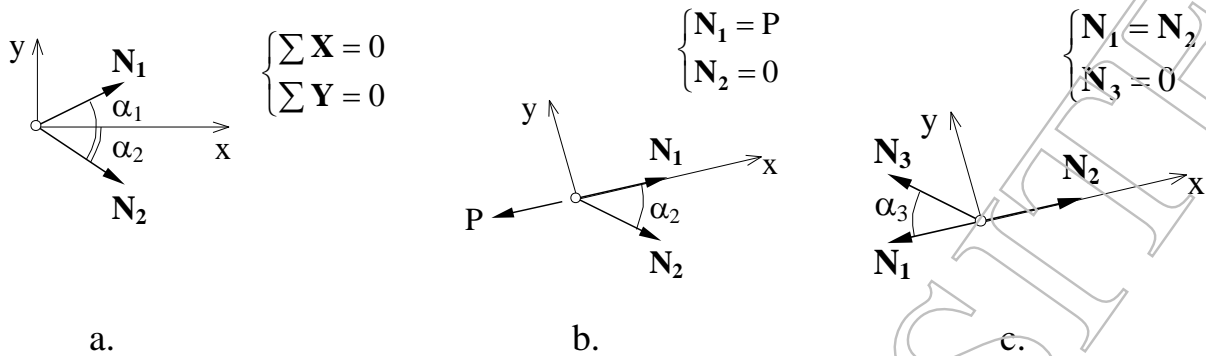


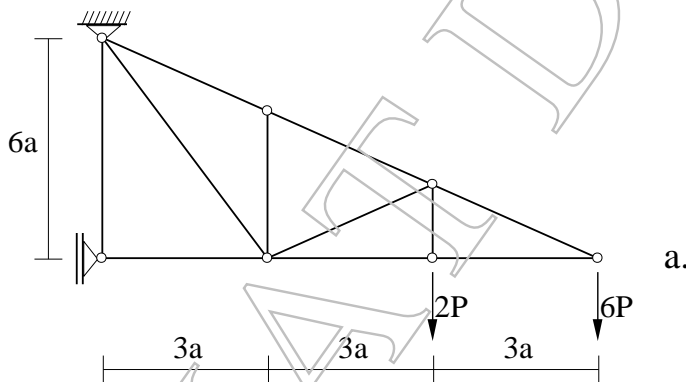
Fig.9.11

I.b La force extérieure a la direction d'une barre, l'effort dans la deuxième barre est égale a zéro, fig. 9.11.b

II. Si dans un nœud se rencontrent trois barres dont deux ont la même direction et la troisième a une direction quelconque et sur le nœud n'agit aucune force extérieure, fig. 9.11.c, les efforts dans les barres colinéaires sont égaux et l'effort dans la troisième barre est nul.

APPLICATION 9.1. :

Déterminer les efforts dans les barres de la poutre à treillis, fig. A.9.1.a



Les étapes de calcul:

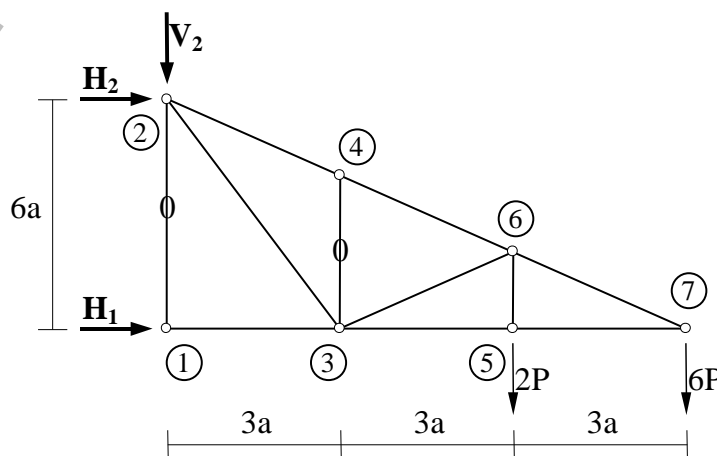


Fig. A.9.1

1. Vérification de la condition pour laquelle la poutre est isostatique

$$2n (b + 3) = 2 \times 7 - (11 + 3) = 0 \quad \text{géométrique : strictement invariable}$$

2. Déterminer les réactions dans les liaisons extérieures. Le schéma des forces est donné dans la figure 9.1.b

$$\sum y = 0 \gg V_2 = -8P$$

$$\sum M_1 = 0 \gg H_2 = -11P$$

$$\sum M_2 = 0 \gg H_1 = 11P$$

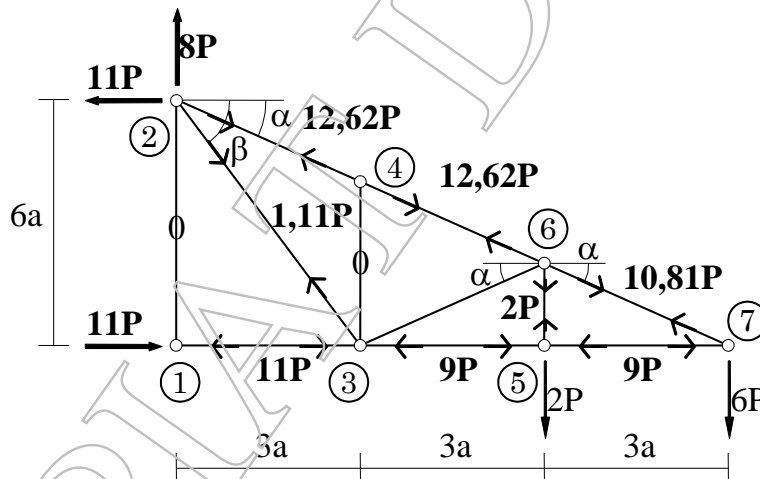
 Verif : $\sum x$

3. Identifier les barres ayant l'effort égal à zéro

$$V_{1,2} = 0 - \text{le cas Ib} \quad ; \quad V_{3,4} = 0 - \text{le cas II}$$

4. Déterminer les efforts dans les barres en utilisant une de deux méthodes de calcul.

** en appliquant la méthode des nœuds*

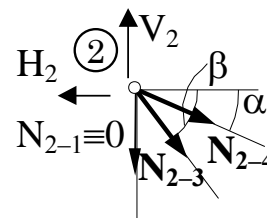


$$\cos \beta = 0,447 \ ; \ \sin \beta = 0,895 \ ; \ \cos \alpha = 0,832 \ ; \ \sin \alpha = 0,555$$

L'isolation du nœud 1 donne la valeur de l'effort $N_{1-3} = -11P$

On peut passer au nœud 2 :

$$(2) \begin{cases} \sum x = 0 \\ \sum y = 0 \end{cases} \gg N_{2-3} \ ; \ N_{2-4}$$



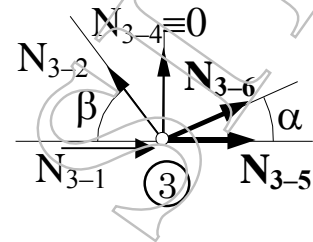
$$N_{2-4} \cos \alpha + N_{2-3} \cos \beta - 11P = 0$$

$$8P - 0 - N_{2-4} \sin \alpha - N_{2-3} \sin \beta = 0$$

$$\gg N_{2-3} = 1,11P ; N_{2-4} = 12,62P$$

Maintenant le nœud 3 :

$$(3) \begin{cases} \sum x = 0 \\ \sum y = 0 \end{cases} \gg N_{3-6} ; N_{3-5}$$



$$N_{3-6} \cos \alpha + N_{3-5} - 1,11P \cos \beta + 11P = 0$$

$$N_{3-6} \sin \alpha + 1,11P \cos \beta = 0$$

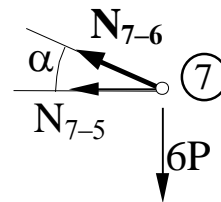
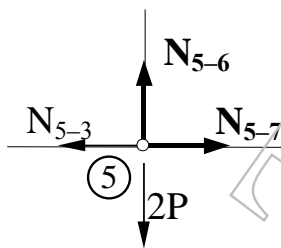
$$\gg N_{3-6} = -1,8P ; N_{3-5} = -9P$$

Le nœud 4

$$N_{3-4} = 0 ; N_{2-4} = 12,62P \gg \gg \gg N_{4-6} = N_{2-4} = 12,62P$$

Le nœud 5

$$(5) \begin{cases} \sum x = 0 \\ \sum y = 0 \end{cases} \gg N_{5-3} = N_{5-7} = -9P ; N_{5-6} = 2P$$



Le nœud 7

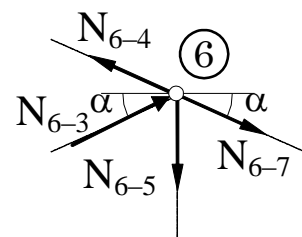
$$(7) \begin{cases} \sum x = 0 \\ \sum y = 0 \end{cases} \gg N_{7-5} = N_{7-6}$$

$$-N_{7-6} \cos \alpha + N_{7-5} = 0$$

$$-6P + N_{7-6} \sin \alpha = 0$$

$$\gg N_{7-6} = -10,81P ; N_{7-5} = -9P$$

L'équilibre du nœud 6 peut être utilisé comme vérification :



$$(6) \begin{cases} \sum x = -12,61P \cos \alpha + 1,8P \cos \alpha + 10,81P \cos \alpha = 0 \\ \sum y = +1,8P \sin \alpha - 10,81P \sin \alpha + 12,62P \sin \alpha - 2P = 0 \end{cases}$$

APPLICATION 9.2. :

En utilisant les schémas suivants déterminer les efforts dans les barres notées de la poutre a treillis de la figure A.9.2

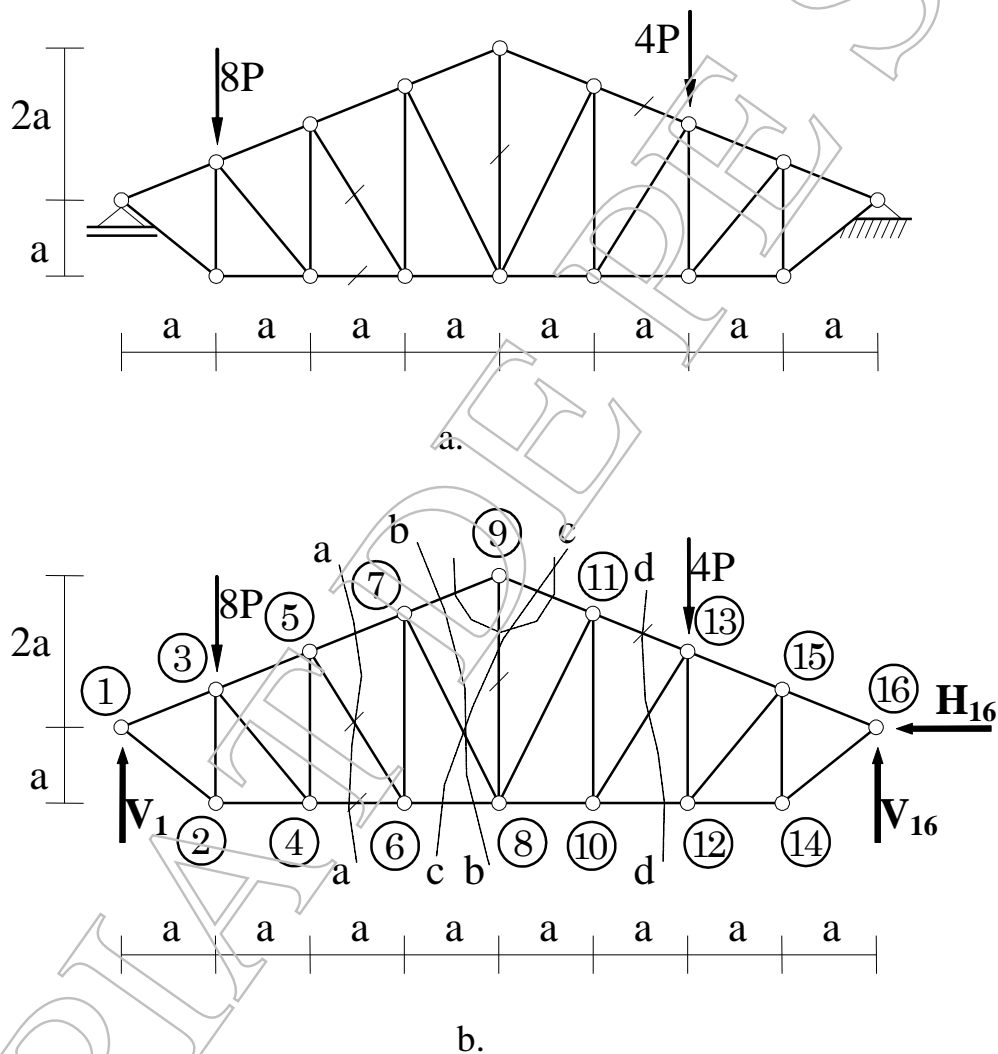


Fig. A.9.2

Solution :

Vérification de la condition pour laquelle la poutre est isostatique

$$2n (b + 3) = 2 \times 16 - (29 + 3) = 0 \quad \text{géométrique : strictement invariable}$$

Le schéma des forces est donné dans la figure 9.1.b.

La détermination des réactions dans les liaisons extérieures :

$$\sum x = 0 \gg H_{16}$$

$$\sum M_1 = 0 \gg V_{16}$$

$$\sum M_{16} = 0 \gg V_1$$

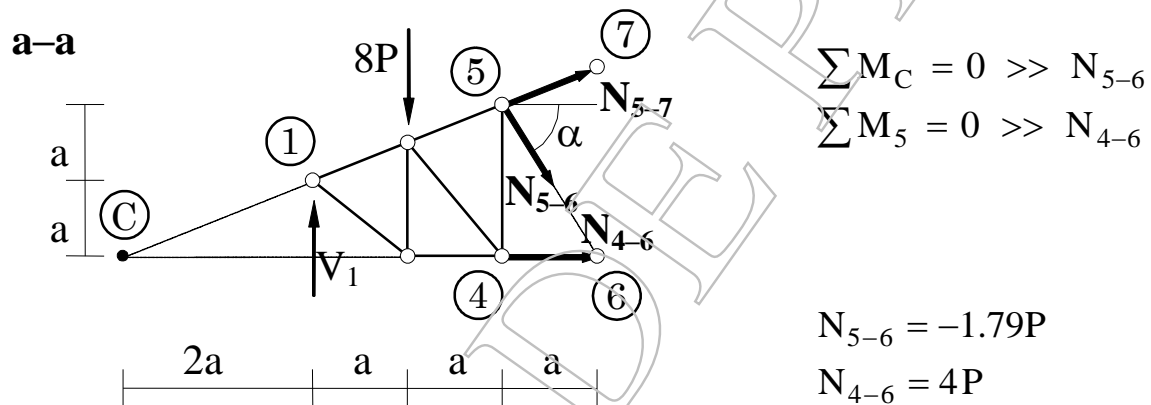
$$H_{16} = 0; \quad V_{16} = 4P; \quad V_1 = 8P$$

Verif : $\sum y$

L'identification des barres ayant l'effort égal à zéro – aucune barre

La détermination des efforts dans les barres en utilisant une des deux méthodes de calcul.

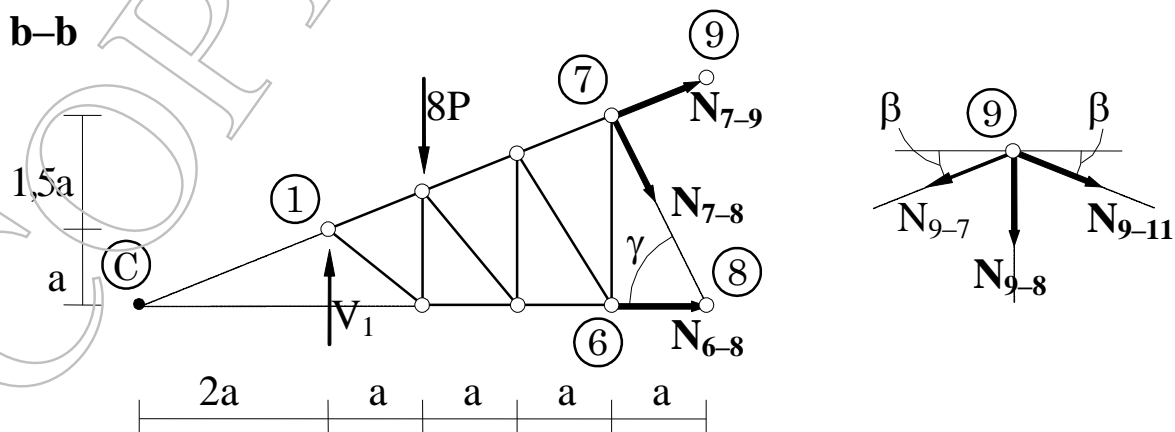
Pour déterminer les efforts dans les barres 5-6 et 4-6 – la section a-a



$$\cos \alpha = \frac{a}{a\sqrt{5}} = 0.447; \quad \sin \alpha = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = 0.894$$

On peut déterminer l'effort dans la barre 8-9 en deux modes :

i) la section b-b pour déterminer l'effort dans la barre 7-9 et après l'isolement du nœud 9 pour déterminer l'effort dans la barre 8-9



$$\sum M_8 = 0 \gg N_{7-9} \qquad \sum x = 0 \gg N_{9-11}; N_{9-8}$$

$$\sum y = 0$$

$$N_{7-9} = -2.98P \qquad N_{9-11} = -2.98P; N_{9-8} = 2.67P$$

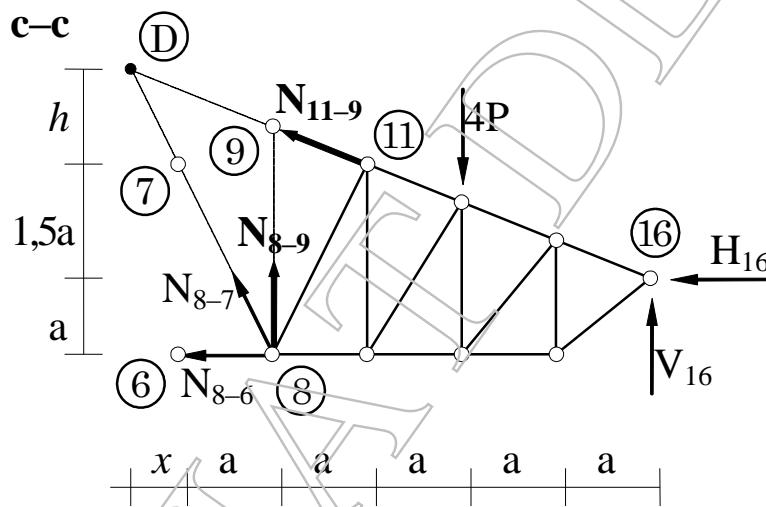
$$\cos \gamma = \frac{a}{a\sqrt{7.25}} = 0.371; \sin \gamma = \frac{2.5a}{a\sqrt{7.25}} = 0.929$$

$$\cos \beta = \frac{a}{a\sqrt{1.25}} = 0.894; \sin \beta = \frac{0.5a}{a\sqrt{1.25}} = 0.447$$

ii) la section b-b pour déterminer l'effort dans la barre 6-8 et après la section c-c pour déterminer l'effort dans la barre 8-9

$$\sum M_7 = 0 \gg N_{6-8}$$

$$N_{6-8} = 3.20P$$



$$\sum M_D = 0 \gg N_{8-9}$$

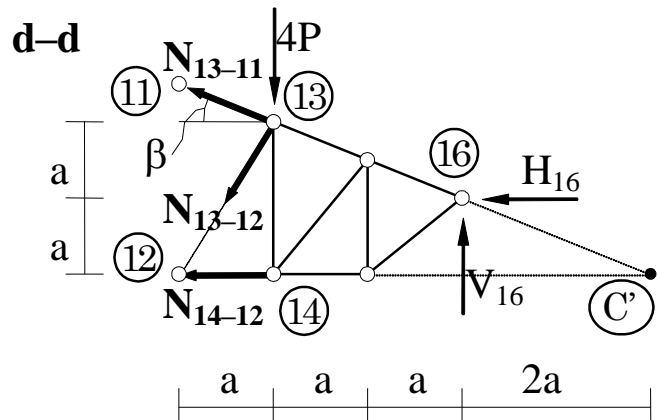
$$N_{8-9} = 2.67P$$

$$x = 2a; \quad h = 5a$$

Pour déterminer l'effort dans la barre 11-13 – la section d-d

$$\sum M_{12} = 0 \gg N_{13-11}$$

$$N_{13-11} = -3.58P$$



APPLICATION 9.3. :

Déterminer les efforts dans les barres notées de la poutre a treillis, fig. A.9.3.a

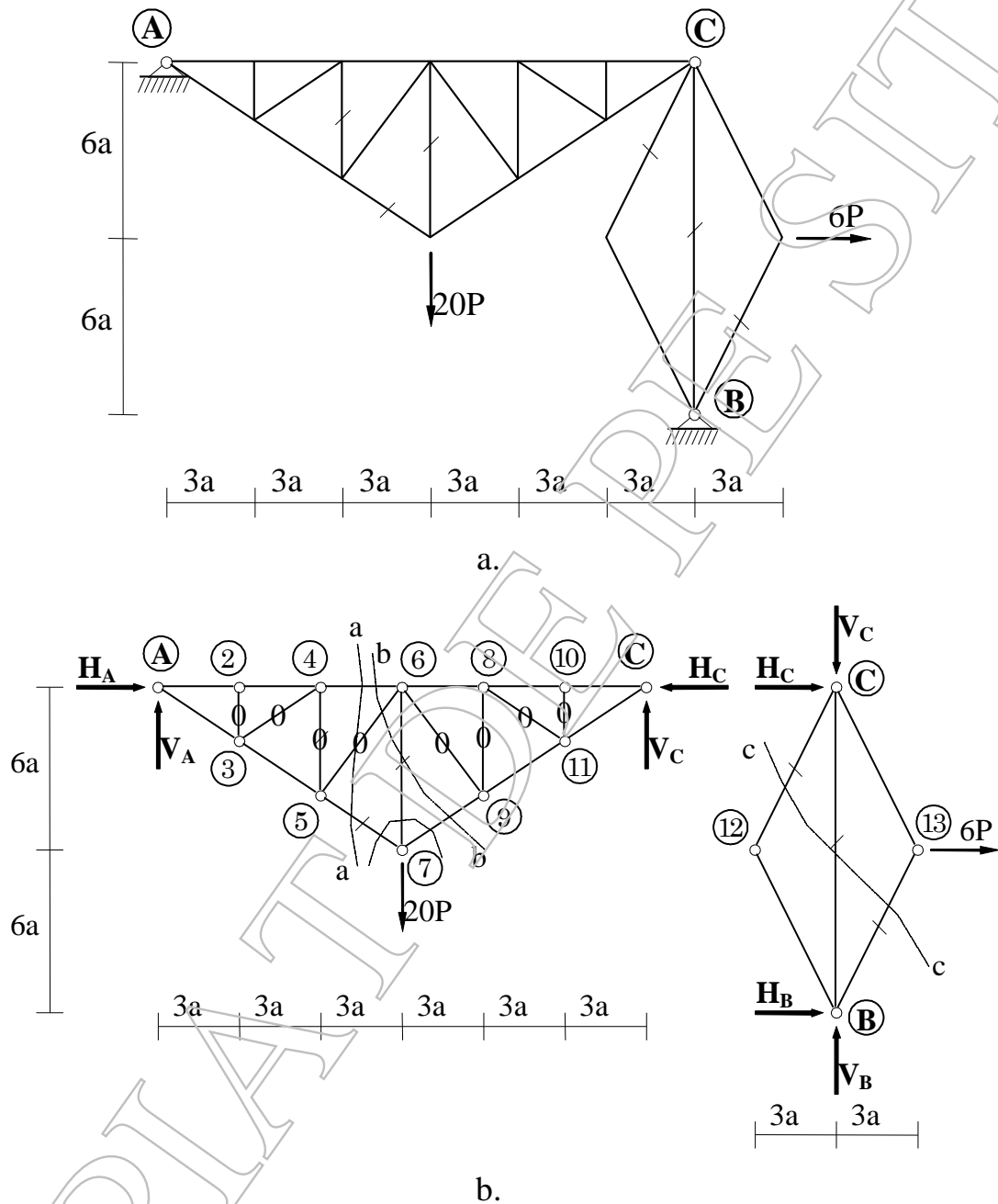


Fig. A.9.3

Solution :

Vérification de la condition pour laquelle la poutre est isostatique

$$2n - (b + 3) = 2 \times 15 - (26 + 4) = 0 \quad \text{géométrique : strictement invariable}$$

Observation : le schéma statique de la structure est un portique à trois articulations.

Le schéma de calcul est dans la figure A.9.2.b

Les réactions dans les liaisons extérieures : du point de vue statique la structure est une ossature avec trois articulations totalement dénivelées

$$\begin{aligned} \sum M_C^{gh} = 0 &>> V_A = 10P \\ \sum M_B = 0 &>> H_A = (-)3P \\ \sum M_C^{dr} = 0 &>> H_B = (-)3P \\ \sum M_A = 0 &>> V_B = 10P \end{aligned}$$

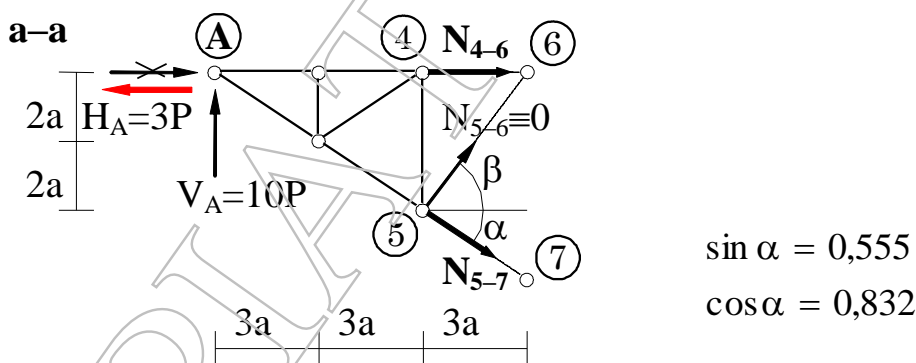
$$\begin{aligned} \text{Verif : } \sum x &= -3P + 6P - 3P = 0 \\ \sum y &= 10P - 20P + 10P = 0 \end{aligned}$$

Les forces des liaisons intérieures ont les valeurs $H_C = -3P$; $V_C = 10P$

Les barres avec les efforts nuls sont
 2-3, 3-4, 4-5, 5-6
 10-11, 11-8, 8-9, 9-6
 6-7
 12-C, 12-B

Donc l'effort dans la barre notée $N_{4-5} = 0$

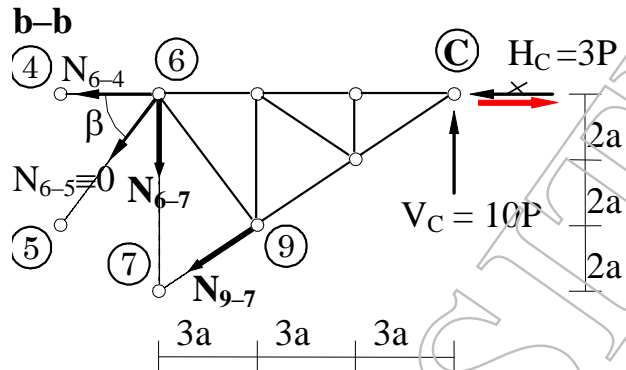
La section a-a est utilisée pour déterminer les efforts dans la barre 5-7



$$\begin{aligned} \sum M_6 = 0 &>> N_{5-7} \\ -10P \times 9a + N_{5-7} \cos \alpha \times 4a + N_{5-7} \sin \alpha \times 3a &= 0 \\ &>> N_{5-7} = 18P \end{aligned}$$

L'effort dans la barre 6-7 est zéro, déterminé avec les règles connues de la théorie. Si nous ne connaissons pas ça, on peut déterminer l'effort dans la barre 6-7 en deux modes :

i) en appliquant la méthode de la section – section b-b

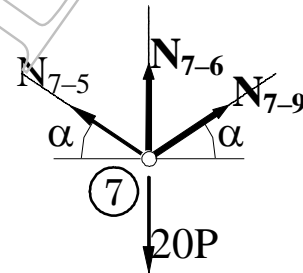


Parce que l'effort dans la barre 5-6 est connu on écrit :

$$\sum M_C = 0 \gg N_{6-7} = 0$$

ii) en appliquant l'isolement du nœud 7, l'effort $N_{7-5} = 18P$

$$(7) \begin{cases} \sum x = 0 \\ \sum y = 0 \end{cases} \gg N_{7-6} ; N_{7-9}$$



$$-N_{7-5} \cos \alpha + N_{7-9} \cos \alpha = 0$$

$$N_{7-5} \sin \alpha + N_{7-6} + N_{7-9} \sin \alpha - 20P = 0$$

$$\gg N_{7-5} = N_{7-9} = 18P ; N_{7-6} = 0$$

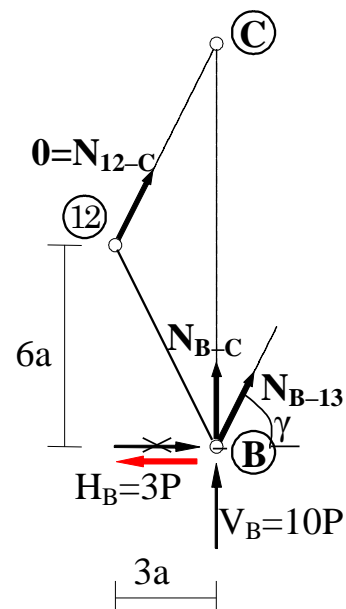
Pour déterminer les efforts dans la barre 12-C, B-C et B-13 on fait la section c-c; l'effort $N_{12-C} = 0$ déterminé avec les règles connues

$$\begin{cases} \sum x = 0 \gg N_{B-13} \\ \sum y = 0 \gg N_{B-C} \end{cases}$$

$$-3P + N_{B-13} \cos \gamma = 0$$

$$10P + N_{B-13} \sin \gamma + N_{B-C} = 0$$

$$\gg N_{B-13} = 6,71P ; N_{B-C} = -16P$$



$$\sin \gamma = 0,894 ; \quad \cos \gamma = 0,447$$

Si l'effort N_{12-C} n'est pas connu, on peut le déterminer en écrivant une équation de moment par rapport au point B. Il en résulte $N_{12-C} = 0$.

10.

EQILIBRE DES FILS

Le fil idéal * est un corps matériel qui se caractérise par les propriétés suivantes :

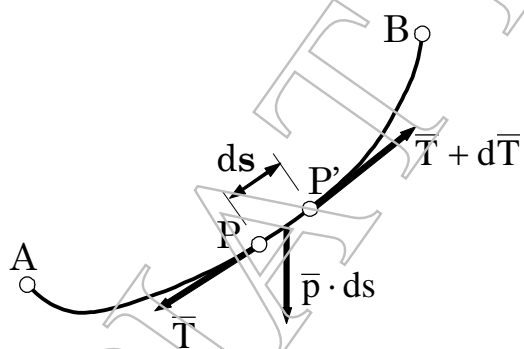
- il a une dimension, la longueur, beaucoup plus grande que les deux autres dimensions de la section transversale – corps unidimensionnel ;
- il est inextensible ;
- il est parfaitement flexible

* on peut considérer le fil comme un système de petites barres rigides articulées entre elles [11, 33].

L'étude de l'équilibre d'un fil comporte deux aspects :

- la détermination de la forme d'équilibre;
- la détermination de la tension.

Soit le fil AB, fig. 10.1, soumis aux forces distribuées \bar{p} . Une partie PP' = ds chargée avec la force élémentaire $\bar{p} \cdot ds$ et les tensions \bar{T} et $\bar{T} + d\bar{T}$, est en équilibre. Les équations vectorielles d'équilibre sont :



$$\begin{cases} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_{P'} = 0 \end{cases}$$

Fig. 10.1

Il en résulte :

- l'équation différentielle d'équilibre d'un élément de longueur ds :

$$\frac{d\bar{T}}{ds} + \bar{p} = 0 \tag{10.1}$$

où : \bar{T} est la tension, tangente au fil

\bar{p} est la force distribuée, qui agit sur le fil sur l'unité de longueur

- la tension a la direction de la tangente au fil.

L'équation vectorielle (10.1) peut être décomposée sur divers système de référence :

1. si on prend un système cartésien

$$\bar{P} = P_x \bar{i} + P_y \bar{j} + P_z \bar{k}$$

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + P_x = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + P_y = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + P_z = 0$$

2. si on prend un système intrinsèque (Frenet)

$$\bar{P} = P_\tau \bar{\tau} + P_\nu \bar{\nu} + P_\beta \bar{\beta}$$

$$\frac{dT}{ds} + P_\tau = 0$$

$$\frac{T}{\rho} + P_\nu = 0$$

$$P_\beta = 0$$

où ρ est le rayon de courbure

Fil soumis aux forces concentrées fig. 10.2.

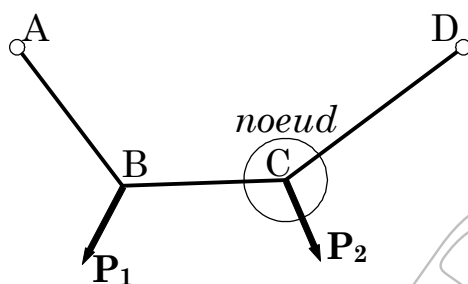


Fig. 10.2

La forme d'équilibre est une ligne polygonale. Dans chaque point application d'une force, la tension a une discontinuité.

APPLICATION 10.1. :

Pour le fil de la figure A.10.1.a, on doit déterminer :

- les tensions ;
- la longueur ;
- la flèche du point C

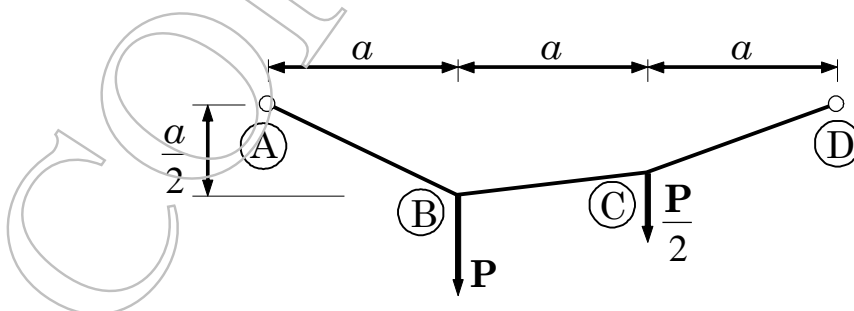


Fig. A.10.1,a

Solution :

on exprime l'équilibre pour l'ensemble, fig. A.10.1.b ; l'angle α est connu.

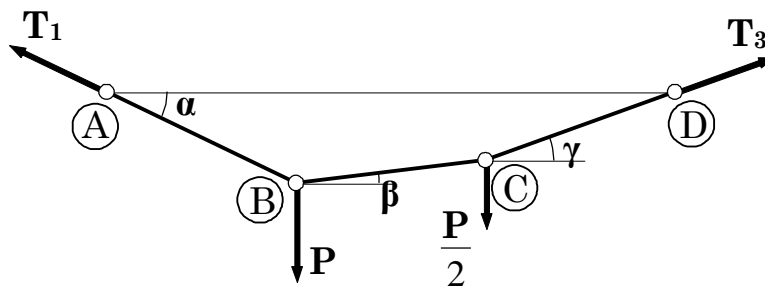


Fig. A.10.1.b

$$\sum x = 0; -T_1 \cos \alpha + T_3 \cos \gamma = 0$$

$$\sum y = 0; T_1 \sin \alpha + T_3 \sin \gamma - \frac{3P}{2} = 0$$

$$\sum M_D = 0; 2Pa + \frac{Pa}{2} - 3aT_1 \sin \alpha = 0$$

$$T_1 = \frac{5\sqrt{5}P}{6}; \quad T_3 = \frac{\sqrt{29}P}{3}; \quad \text{tg} \gamma = \frac{2}{5}$$

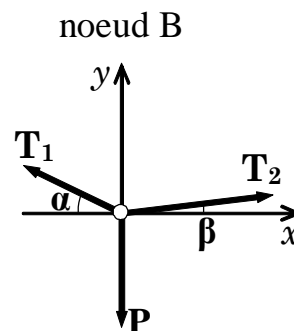
$$f_C = a \cdot \text{tg} \gamma; \quad \text{tg} \beta = \frac{f_B - f_C}{a} = \frac{1}{10}$$

$$L = AB + BC + CD \approx 3,2a$$

pour déterminer T_2 on isole le nœud B

$$\sum x = 0; -T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta = 0$$

$$T_2 = \frac{P\sqrt{101}}{6}$$



APPLICATION 10.2. :

Soit le fil de la fig. A.10.2, déterminer :

- les tensions dans le fil;
- la flèches dans les points B et D.

Solution :

Parce que le fil est composé symétrique et chargé symétrique, la forme déformée et les tensions sont aussi symétriques.

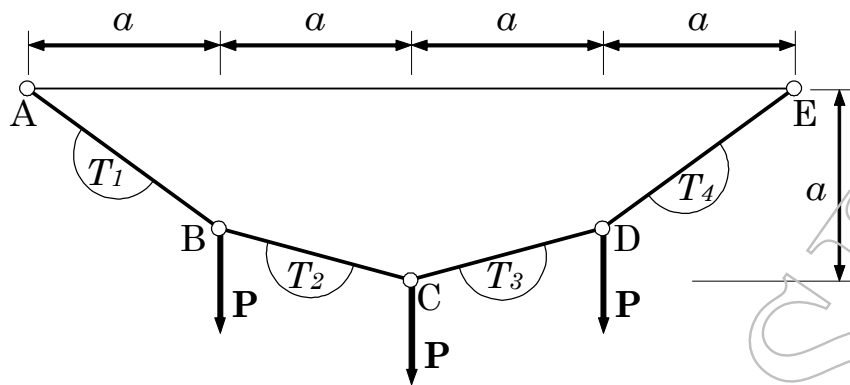
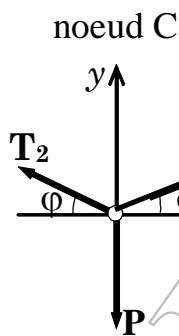
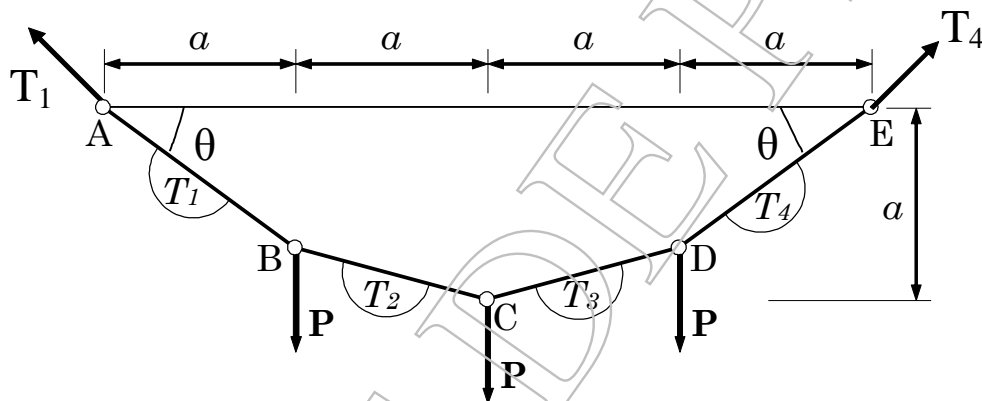


Fig. A.10.6

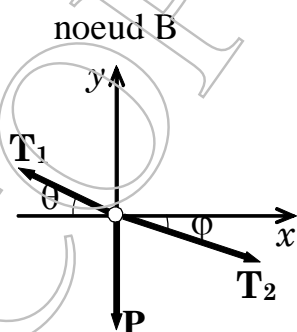
On exprime l'équilibre pour l'ensemble, l'équilibre de la partie CDE et l'équilibre de nœud C;



$$T_1 = T_4 = \frac{5}{2}P; \quad T_2 = T_3 = \frac{\sqrt{17}}{2}P;$$

$$f_B = f_D = \frac{3}{4}a$$

On peut faire une vérification en exprimant l'équilibre de nœud B :



$$\cos\theta = \frac{4}{5} \quad ; \quad \cos\phi = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sum x = \frac{\sqrt{17}}{2}P \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{5}{2}P \cdot \frac{4}{5} = 0$$

APPLICATION 10.3. :

Un fil a le poids total G et la longueur totale l , fig. A.10.3.a. Une partie du fil se trouve sur un plan incliné avec l'angle α par rapport à l'horizontale et le coefficient de frottement μ ; une autre partie de longueur l_1 est librement suspendue.

Déterminer la longueur l_1 .

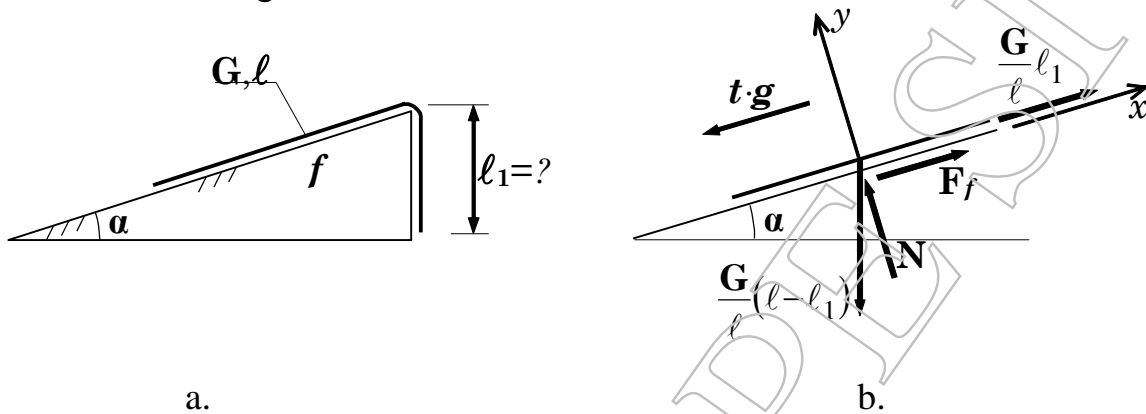


Fig. A.10.3

Solution :

Parce qu'on suppose que le fil est idéal, les problèmes spéciaux qui apparaissent dans son point de courbure (au sommet du plan) ne sont pas pris en considération, fig. A.10.3.a.

indication : * $\frac{G}{l}$ est le poids de l'unité de longueur du fil

* l'équilibre de la partie du fil qui se trouve sur le plan, s'exprime pour les deux possibilités de la tendance de glissement

$$1 \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{1 + \sin \alpha - \mu \cos \alpha} \leq l_1 \leq 1 \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha}$$