CALCULUL PLÃCILOR PLANE SUBȚIRI CU METODA DIFERENȚELOR FINITE

1^{o} Scheme cu diferențe centrale pe axa x.

Fie funcția continuã f(x), definitã pe intervalul $[a,b]\subset\mathbf{R}^1$; deoarece nu se cunoaşte expresia analiticã a acestei funcții(care poate fi soluție a unei ecuații diferențiale) se va proceda la obținerea derivarelor funcției in punctul x_0 cu ajutorul unei scheme cu diferențe finite(fig. 1).

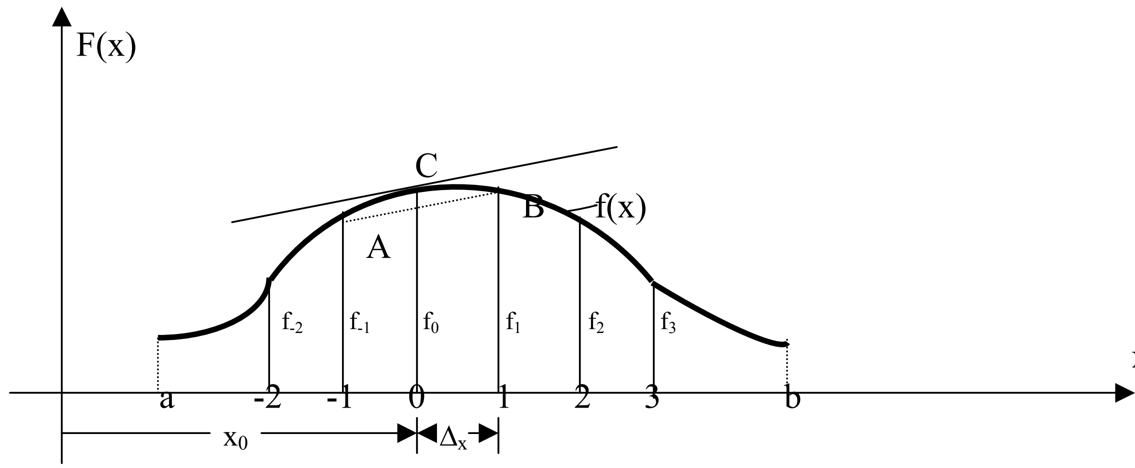


Figura 1. Schema cu diferențe finite pe axa x.

Se noteazã: $f_0=f(x)$

$$f_1=f(x_1)= f(x_0+\Delta_x) \qquad 1)$$

$$f_{-1}=f(x_{-1})=f(x_0-\Delta_x)$$

$$f_{1/2}=f(x_0+1/2\ \Delta_x)$$

$$f_{-1/2}=f(x_0-1/2\Delta_x)$$

$$f_2=f(x_0+2\Delta_x)$$

$$f_{-2}=f(x_0-2\Delta_x)$$

etc.

Derivata de ordinul I se obține aproximând tangenta la curbã în C cu panta corzii AB (fig.1).

$$f_0'=\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}\cong\frac{f_1-f_{-1}}{2\Delta_x} \qquad 2)$$

Derivata de ordinul II se poate definii si obtine prin trei procedee, toate conducând la acelaşi rezultat :

II.1 : fie aproximând f(x) pe intervalul examinat $[x_{-1},x_1]$ cu o parabolã de ordinul doi :

$\tilde{f}(x)=\alpha x^2+\beta x+\delta$……………………………… 3)

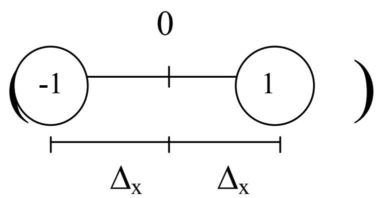
$\boxed{\text{Ex.A.1}}$ Sã se determine coeficienții α,β,δ, impunând parabolei sã treacã prin punctele A,B,C, apoi sã se calculeze $f''(x)_{x0}$; rãspunsul va coincide cu rezultatul
II.2 : fie aproximând f(x) cu dezvoltarea TAYLOR în vecinãtatea punctului x_0:

$$\begin{cases} \text{i)} \quad f_1= f(x_0+\Delta_x)=f_0+\frac{1}{1!}*f_0'(\Delta_x)+\frac{1}{2!}f_0''(\Delta_x)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{3)} \\ \text{ii)} \quad f_{-1}= f(x_0-\Delta_x)=f_0+\frac{1}{1!}*f_0'(-\Delta_x)+\frac{1}{2!}f_0''(-\Delta_x)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Operația i)-ii) conduce la rezultatul 2), deja cunoscut pentru derivata de ordinul I :

$$f_1-f_{-1}=2f_0'\Delta_x \Rightarrow f_0' \cong \frac{f_1-f_{-1}}{2\Delta_x} \qquad \text{2,rep)}$$

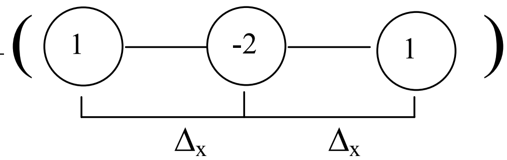
Acestui rezultat i se asociează următoarea schemă cu diferențe :

$f_0' \cong \frac{1}{2\Delta_x}$  $\underline{f}$ unde $\underline{f}=\begin{Bmatrix} f_{-1} \\ f_1 \end{Bmatrix}$ 4)

care trebuie ”citită” exact ca rezultatul din relația 2)
COMENTARIU: căsuța (sau “molecula”) din punctul O este liberã de coeficienți de lucru, dar punctul O este necesar pentru centrarea schemei cu diferențe în dreptul abscisei x_0.
Operația i)+ii) conduce la derivata de ordinul II a funcției $f(x)\big|_{x_0}$:

$$f_1+f_{-1}=2f_0+f_0''(\Delta_x)^2 \Rightarrow f_0'' \cong \frac{f_1-2f_0+f_{-1}}{(\Delta_x)^2} \qquad \text{5)}$$

Rezultatului : $f_0'' \cong \frac{f_1-2f_0+f_{-1}}{(\Delta_x)^2}$ i se asociează următoarea schemã cu diferențe :

$f_0''=\frac{1}{\Delta_x^2}$  $\underline{f}$ 6)

II.3:fie utilizând schema cu diferențe centrate pe semipasul $\frac{1}{2}\Delta_x$:

$$\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x_0}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\Big|_{x_0}\cong\frac{\frac{df}{dx}\Big|_{x_0+\frac{1}{2}\Delta_x}-\frac{df}{dx}\Big|_{x_0-\frac{1}{2}\Delta_x}}{2\Delta_x}=\frac{\frac{f_1'-f_0'}{\Delta_x}-\frac{f_0-f_{-1}}{\Delta_x}}{\Delta_x}=$$

$$\frac{f_1-2f_0+f_{-1}}{(\Delta_x)^2}\ \ldots\ldots \qquad (5,rep)$$

Derivata de ordinul III se obține cu relația de definiție: $f_0''' = \frac{d}{dx}\left(f''_{(x)}\right)\Big|_{x_0}$ (7)

$\boxed{\text{Ex.12.2.S}}$ Introducând expresiile $f_1'' = \frac{f_2-2f_1+f_0}{\Delta_x^2}$ și $f_{-1}'' = \frac{f_0-2f_{-1}+f_{-2}}{\Delta_x^2}$ sã se obținã rezultatul:

$$f_0''' \cong \frac{-f_{-2}+2f_{-1}-2f_1+f_2}{2\Delta_x^3} \Leftrightarrow f_0''' \cong \frac{1}{2\Delta_x^3}\Big(\underbrace{-1 - 2 - 0 - -2 - 1}_{5\Delta_x}\Big)f \quad (8)$$

Derivata de ordinul IV se obține cu relația de definiție:

$$f_0^{IV} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)\Big|_{x_0} = \frac{f_1''-2f_0''+f_{-1}''}{\Delta_x^2} \qquad (9)$$

$\boxed{\text{Ex.12.3.S}}$ Introducând expresiile cunoscute pentru f_1'', f_0''și f_{-1}'' sã se obținã rezultatul:

$$f_0^{IV} \cong \frac{f_{-2}-4f_{-1}+6f_0-4f_1+f_2}{\Delta_x^4} \Leftrightarrow f_0^{IV}\,\frac{1}{\Delta_x^4}\Big(\underbrace{1 - -4 - 6 - -4 - 1}_{5\Delta_x}\Big)f \qquad (10)$$

2^0 **Scheme cu diferențe centrale în planul xy** (fig. 2)

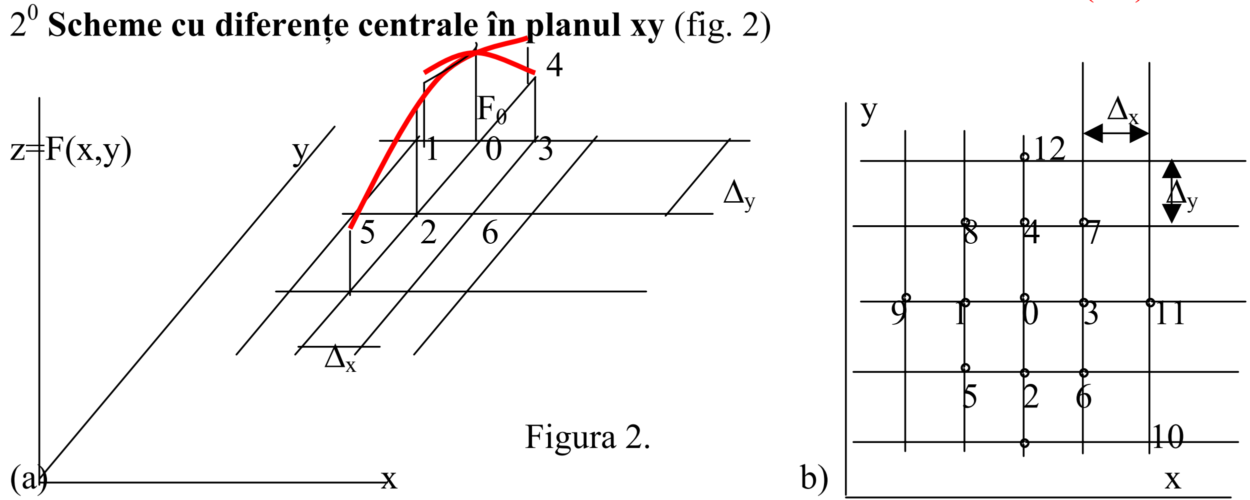


Figura 2.

Figura 2. Scheme cu diferențe pentru funcția F(x,y)

a) Puncte de sprijin pentru schema numericã
b) Numeeerotarea punctelor rețelei

$2^0$1 Schemele cu diferențele pe axa y se obțin prin raționament identic celui utilizat pe axa x; se prezintã numai schemele asociate derivatelor parțiale ale funcției continue F(x,y) în raport cu variabila y:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_0 = \frac{1}{2\Delta_y}\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\;\; 2\Delta_y\right] \underline{F}(*, y) \qquad (11)$$

Notã: In notația $\underline{F}(\aleph, y)$ simbolul $\aleph$ semnificã variabila care nu intervine în calculul derivatelor parțiale ale funcției F(x,y)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big|_0 = \frac{1}{\Delta^2{}_y}\left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \;\; 0 \\ 1 \end{array}\right] \underline{F}(*, y) \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\Big|_0 = \frac{1}{2\Delta^3{}_y}\left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{array}\;\; 5\Delta_y\right] \underline{F}(*, y) \qquad (13)$$

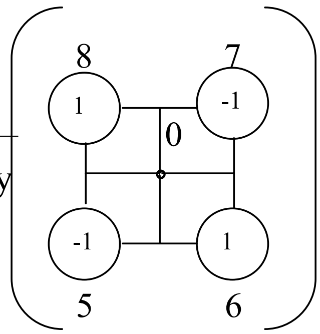
$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\Big|_0 = \frac{1}{\Delta^4{}_y}\left[\begin{array}{c} 1 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{array}\right] \underline{F}(*, y) \qquad (14)$$

$2^0 2$ Derivatele partiale mixte $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$; $\dfrac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}$

Domeniul de definiție al funcției F(x,y) este ``acoperit`` în planul 0xy cu o rețea ortogonalã (caroiaj) având ochiul de rețea $\Delta_x \Delta_y$ (fig.2b). Punctele de intersecție sau ``nodurile`` rețelei sunt numerotate 0,1,2,……,12, în conformitate cuschema de aproximare prin diferențe finite asociatã operatorului biarmonic $\nabla^4 F(x,y)$. Derivata parțialã mixtãde ordinul II se obține astfel:

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right|_{x_0, y_0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Bigg|_0 \cong \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_3 - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1}{2\Delta_x} = \frac{\frac{F_6 - F_7}{2\Delta} - \frac{F_5 - F_6}{2\Delta_y}}{2\Delta_x} =$$

$$= \frac{-F_5 + F_6 - F_7 + F_8}{4\Delta_x \Delta_y} \Leftrightarrow \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right|_0 = \frac{1}{4\Delta_x \Delta_y}$$



$\underline{F}$ (15)

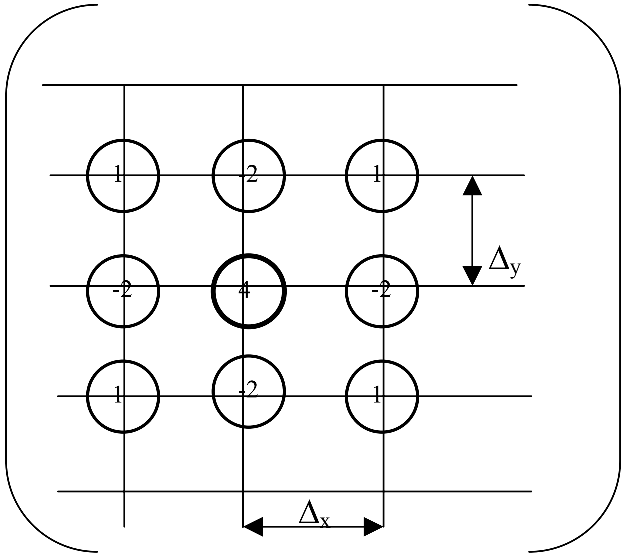
Derivata partialã mixtã de ordinul IV se obține astfel:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial_x^2 \partial_y^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\Bigg|_0 \cong \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial_y^2}\right)_3 - 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial_y^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial_y^2}\right)_1}{\Delta_x^2} =$$

$$= \frac{\frac{-2F_3 + F_7}{\Delta_y^2} - 2\frac{F_2 - 2F_0 + F_4}{\Delta_y^2} + \frac{F_5 - 2F_1 + F_8}{\Delta_y^2}}{\Delta_x^2} =$$

$$= \frac{F_5 + F_6 + F_7 + F_8 + 4F_0 - 2F_1 - 2F_2 - 2F_3 - 2F_4}{\Delta_x^2 \Delta_y^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^4 F}{\partial_x^2 \partial_y^2} =$$

$$=\frac{1}{\Delta_x^2\Delta_y^2}$$



$$\underline{F} \qquad (16)$$

3^0 Operatorul $\nabla^4 w(x,y)$ pentru metoda diferențelor finite (MDF)
Schema cu diferențe finite asociatã ecuației diferențiale a plãcilor plane subțiri (în formulare LGK),

$$\nabla^4 w(x,y)=\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p(x,y)}{D} \qquad (17)$$

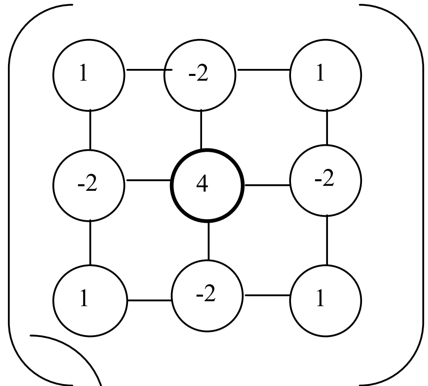
se va construi raportul: $\boxed{r=\frac{\Delta y}{\Delta x}<1} \Leftrightarrow \Delta y = r\Delta x \qquad (18)$

$3^0 1$ Utilizând schemele cu diferențe prezentate pentru funcția F(x,y), putem obține direct termenii ecuației (17) ; acești termeni sunt multiplicați cu factorul $(\Delta^4{}_y)$ din ratiuni care pun în evidențã raportul r din relația (18) :

$$(\Delta_y)^4\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=\underbrace{\left(\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}\right)}_{=r^4}\left[\,1 - (-4) - 6 - (-4) - 1\,\right]\underline{w} =$$

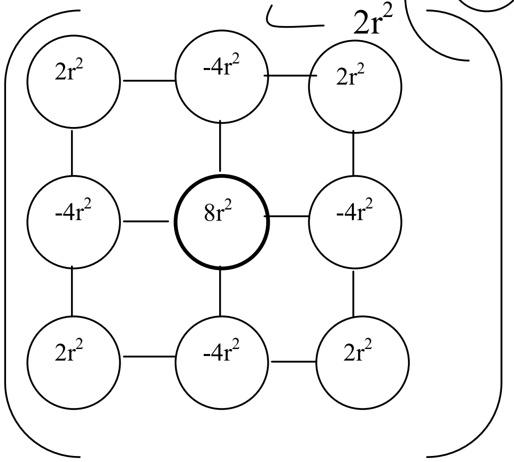
$$=\left[\,r^4 - (-4r^4) - 6r^4 - (-4r^4) - r^4\,\right]\underline{w} \qquad (19)$$

$$2(\Delta y)^4\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 2\,\underbrace{\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^2 \Delta y^2}}_{2r^2}$$



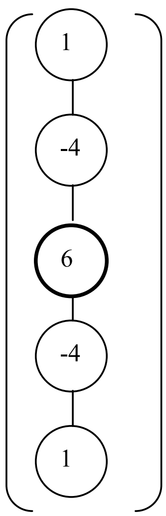
$$\underline{w} \quad =$$

$$=$$



$$\underline{w} \qquad (20)$$

$$(\Delta y)^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^4 y}{\partial^4 y}\right)$$

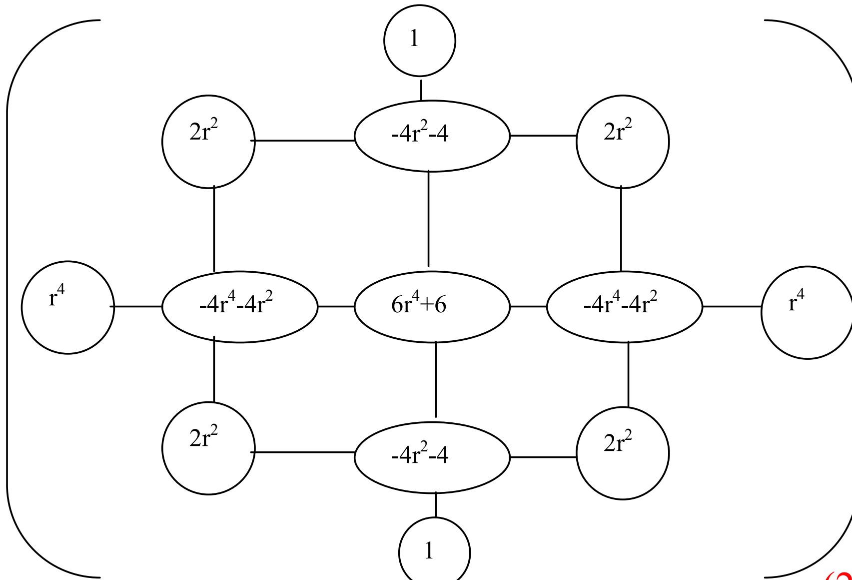


$$\underline{w} \qquad (21)$$

Însumând termenii relațiilor (19)- (21) transcriem ecuația diferențialã a plãcilor sub forma: $(\Delta y^4)\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = \frac{(\Delta_y^4)p(x,y)}{D}$ (22)

În reprezentarea schemei numerice asociatã partea din stânga se prezintã astfel:

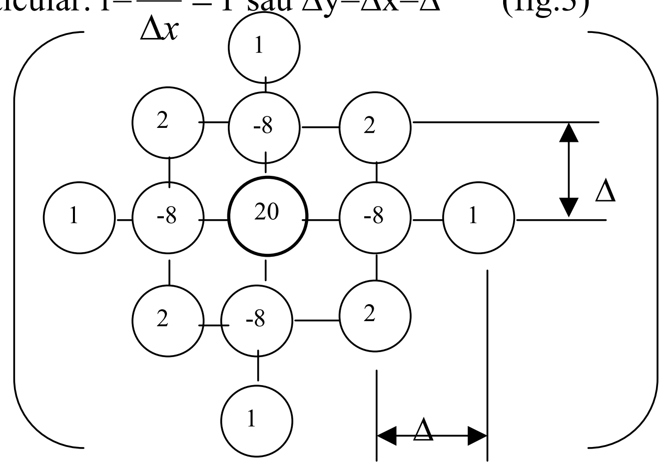
$(\Delta y^4)\nabla^4 w(x,y)=$



$\underline{w}$ (23)

$3^0 2$ Caz particular: $r=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$ sau $\Delta y=\Delta x=\Delta$ (fig.3)

$(\Delta^4)\ \nabla^4 w=$

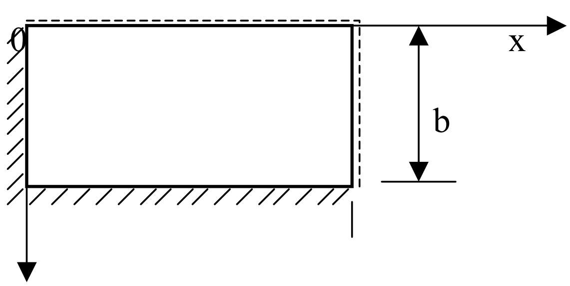


$\underline{w}$ (24)

COMENTARIU: Proprietăţile de simetrie ale operatorilor schemei cu diferenţe finite, asociată ecuaţiei plăcilor [(17) , (23) , (24)], au făcut irelevant sensul axei `z`(care se prezintă diferit pentru F(x,y) – fig.2 şi pentru w(x,y)). Acest sens este numai pentru termenul $\dfrac{(\Delta_y^4)p(x,y)}{D}$

4^0 Condiţiile de rezemare ale plăcilor scrise în diferenţe finite

Se prezintă două dintre cele trei tipuri de rezemare (fig. 3a): latura simplu rezemată şi latura incastrată.



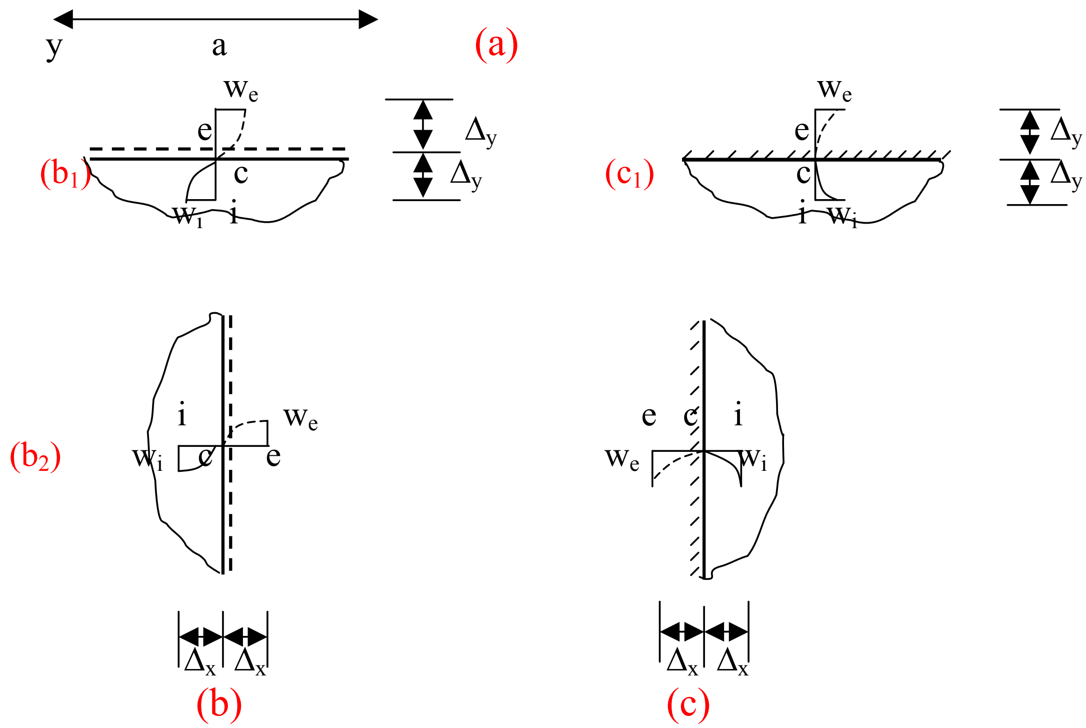


Figura 3:Condițiile de rezemare scrise în diferențe finite

a) tipuri de rezemare

b) laturã simplu rezematã (sau articulatã)

c) laturã încastratã

COMENTARIU: Cazul ``margine liberã`` a plãcii impune condiții la limitã exprimate în eforturi (Kirchhoff); scrierea acestora în diferențe finite impune dificultãți care fac schema cu diferențe mai laborioasã; cazul ``margine liberã`` nu este dezvoltat aici.

$4^0$1 Laturã simplu rezematã (fig. 3b)

Notații: i= punct (nod) interior
c= punct (nod) pe contur
e= punct (nod) exterior

Condițiile de rezemare sunt:

$$\begin{cases} W_c=0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_c = 0 \text{ (cazul } b_1\text{) sau } \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_c = 0 \text{ (cazul } b_2\text{)} \end{cases} \qquad (25,1,2)$$

Condițiile exprimate prin derivate parțiale se scriu:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_c = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_c = 0 \Rightarrow \frac{w_e - 2\cancelto{0}{w_c} + w_i}{\Delta_*^2} = 0 \Rightarrow \boxed{w_e = -w_i} \qquad (26)$$

unde Δ_* reprezintã Δ_x sau Δ_y, dupã caz.

$4^0$2 Laturã încastratã (fig. 3b)

Condițiile de rezemare sunt:

$$\begin{cases} W_c=0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial y}\Big|_c = 0 \ \text{(cazul } c_1\text{)} \ \text{ sau } \ \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big|_c = 0 \ \text{(cazul } c_2\text{)} \end{cases} \qquad (27,1,2)$$

Condițiile exprimate prin derivate parțiale se scriu:

$$\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_c = \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_c = 0 \Rightarrow \frac{w_e - w_i}{2\Delta_*} = 0 \Rightarrow \boxed{w_e = w_i} \qquad (28)$$

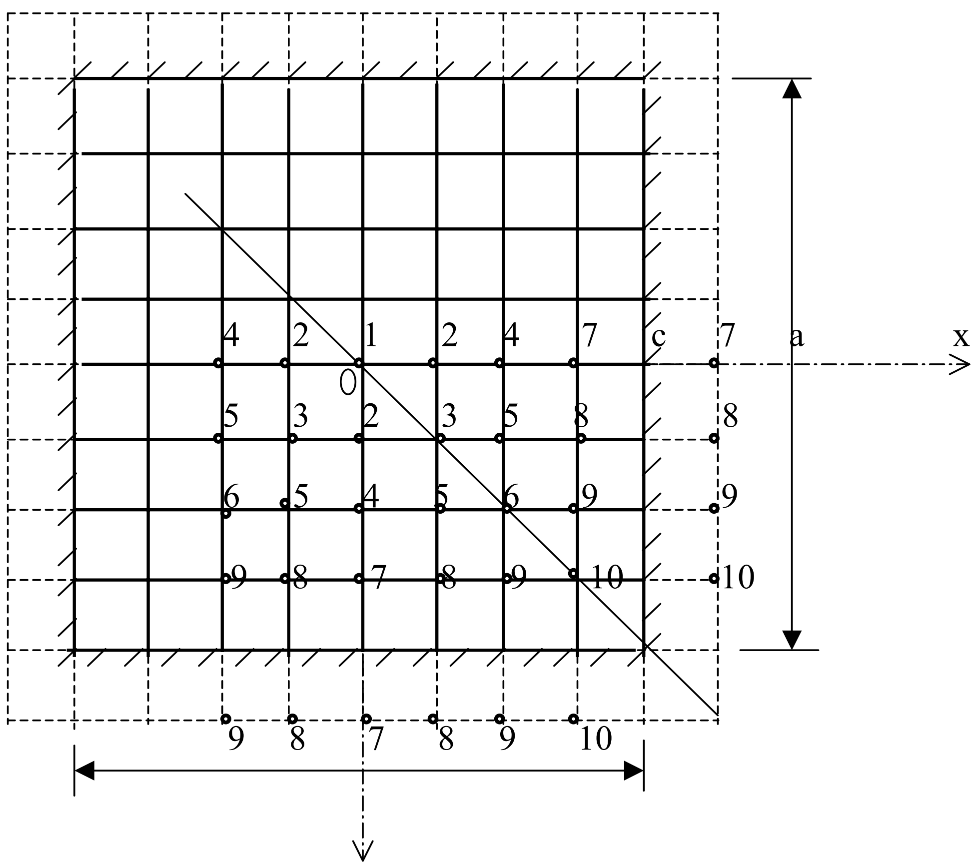
5^0 Exemple şi exerciții

$5^0$1 Exemplu (fig. 4): placă pătrată, încastrată pe contur, încărcară cu sarcină uniform distribuită $p(x,y)=\text{const.}=p_0$

Rezolvarea problemei cu metoda diferențelor finite (M.D.F.) constă în scrierea unui sistem liniar de ecuații şi rezolvarea acestui sistem pentru obținerea soluției numerice $\underline{w}$.

Datele problemei sunt: a, p_0 şi $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\gamma^2)}$

Figura 4. Placă pătrată (a*a), încărcată cu sarcină uniform distribuită p_0



y a

Soluția se obține cu MDF alegând pasul rețelei (caroiajului);

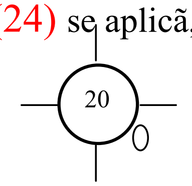
$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\frac{a}{8}$ (29)

COMENTARIU: o divizare mai finã (de exemplu: $\frac{a}{10}$) ar conduce la o soluție $\underline{w}$ mai apropiatã de soluția exactã (în acest exemplu soluția exactãse poate obține cu serii duble Fourier); pe de altã parte, o derivare mai grosierã (de exemplu: $\Delta=\frac{a}{8}$) ar simplifica efortul de scriere a ecuațiilor MDF şi ar reduce timpul de calcul pentru obținerea soluției numerice $\underline{w}$-dar cu prețul depãrtãrii de soluția exactã.

Proprietãțile de simetrie pe care le posedã problema datã oferã posibilitatea reținerii a numai 10 necunoscute ; nodurile marcate (•) sunt prezentate în figura 4 numai pentru înlesnirea scrierii sistemului de ecuații

$$[A]_{(10*10)}\{w\}_{(10*1)}=\{b\}_{(10*1)} \qquad (30)$$

Operatorul schemei cu diferente finite (24) se aplicã, succesiv, nodurile 1,2,…10 ale caroiajului rețelei, asezând molecula



peste nodul respectiv;

Ecuația 1:

$$20w_1-8(w_1+w_2+w_2+w_2)+2(w_3+w_3+w_3+w_3)+1(w_4+w_4+w_4+w_4)=\frac{p_0\Delta^4}{D}$$

Ecuația 2:

$$20w_2-8(w_3+w_3+w_1+w_4)+2(w_2+w_2+w_5+w_5)+1(w_2+w_7+w_5+w_5)=\frac{p_0\Delta^4}{D}$$

Ex.12.4 S Sã se dezvolte cele 10 ecuații ale sistemului algebric (30) ; sz se verifice rezultatele obținute prezentându-le, dezvoltat, astfel:

$$\begin{bmatrix} 20 & -32 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 25 & 16 & -8 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -16 & 22 & 4 & -16 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 4 & 20 & -16 & 2 & -8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & -8 & 23 & -8 & 2 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 2 & 0 & 20 & 0 & 4 & -16 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 4 & 0 & 21 & -16 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -8 & 2 & -8 & 22 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -8 & 1 & -8 & 23 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -16 & 22 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \end{Bmatrix} = \frac{p_0\Delta^4}{D} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (31)$$

Multiplicatorul matricei-coloanã $\{b\}_{10*1}$ se poate exprima în funcție de a :

$$\frac{p_0\Delta^4}{D} = \frac{p_0 a^4}{8^4 D} = \frac{p_o a^4}{4096 D} \qquad (32)$$

Ex.12.5 S   Rezolvând sistemul de ecuații (31) sã se obținã rezultatul (=soluția $\underline{w}$):

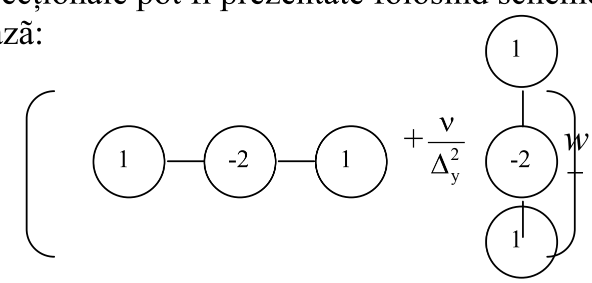
$w_1=8{,}412*10^{-4}\ \dfrac{p_o a^4}{4096D}$	$w_6=5{,}118*\dfrac{p_o a^4}{4096D}\ 10^{-4}$
$w_2=7{,}634*10^{-4}$ _,,_	$w_7=1{,}499*$ _,,_ 10^{-4}
$w_3=6{,}767*10^{-4}$ _,,_	$w_8=1{,}609*$ _,,_ 10^{-4}
$w_4=4{,}870*10^{-4}$ _,,_	$w_9=1{,}705*$ _,,_ 10^{-4}
$w_5=4{,}933*10^{-4}$ _,,_	$w_{10}=0{,}517*$ _,,_ 10^{-4}

Indicație: se recomandã utilizarea Mathcad, care furnizeazã soluția sub forma: $\underline{w} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$.

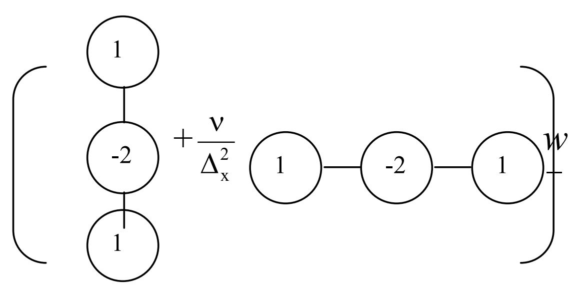
$5^0 2$ Eforturi secționale.

Formulele de definiție ale eforturilor secționale pot fi prezentate folosind schemele cu diferențe asociate, dupã cum urmeazã:

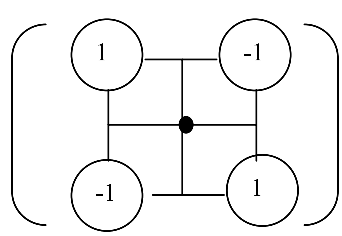
$$M_x\big|_0 = -D\left(\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_0 + \nu\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_0\right) = -D\ \frac{1}{\Delta_x^2}$$



$$M_y\big|_0 = -D\left(\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_0 + \nu\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_0\right) = -D\ \frac{1}{\Delta_y^2}$$



$$M_{xy}\big|_0 = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{D(1-\nu)}{4\Delta_x\Delta_y}$$



Exemplu: calculam $M_x\big|_c$,unde c = punct situat pe contur, pe axa x (fig. 4)

Rezolvare: $M_x\big|_c = -D\left(\frac{w_7 - 2w_c + w_7}{\Delta_x^2} + \frac{\nu}{\Delta_x^2}(0 - 2 \times 0 + 0)\right) = -\frac{2D}{\Delta^2} w_7 =$

$$= \frac{2D}{\left(\frac{a}{8}\right)^2} * 1{,}499 \frac{p_0 a^4}{D} * 10^{-4} = 2 * 8^2 * 1{,}499 * 10^{-4} p_0 a^2 = 1{,}9187 * 10^{-2} p_0 a^2$$

Ex.12.6 S

Sã se calculeze $M_y\big|_1$ şi sã se arate cã, pentru cazul dat, (fig. 4), $M_x\big|_1 = M_y\big|_1 = M_{max}$

Ex.12.7 S

Sã se calculeze $M_{xy}\big|_{10}$ (momentul de torsiune maxim se dezvoltã din punct de vedere teoretic_în colţul pãcii).