2. Elemente 1D. Elemente de bară şi grindă

Analiza statică liniar elastică

Numeroase probleme de analiză a structurilor pot fi încadrate în tipul de analiză statică liniar elastică, care are la bază următoarele ipoteze:

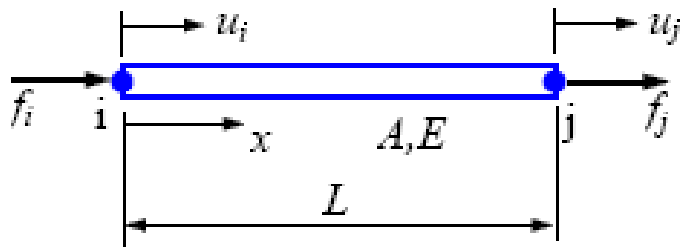
1. Deplasări şi deformații mici (delpasările deformatei structurii sunt mici, iar încărcările îşi păstrează direcția,sensul şi punctul de aplicație)
2. Materialele au comportare liniară (valabilă legea lui Hooke)
3. Aplicarea statică a încărcărilor (încărcările sunt aplicate de lent pe structură)

În majoritatea cazurilor întâlnite în exploatarea construcțiilor, analiza liniar elastică poate furniza informații cu o bună aproximație asupra comportării sub încărcări a structurilor.

Cele mai multe situații de proiectare au la bază acest tip de analiză.

Analiza liniar elastică reprezintă o bază pentru analizele neliniare.

Elementul de bară



Caracteristici:

L	Lungimea barei
A	Aria secțiunii transversale
E	Modulul de elasticitate longitudinal
$u = u(x)$	Deplasarea în lungul axei barei
$\varepsilon = \varepsilon(x)$	Deformație specifica
$\sigma = \sigma(x)$	Tensiuni

Relația dintre deformații specifice si deplasări:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

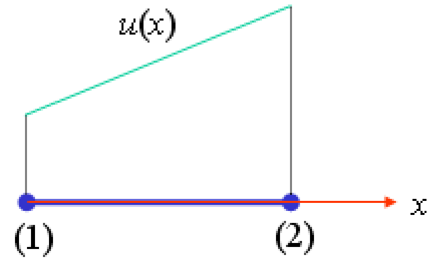
Relația dintre tensiuni şi deformații specifice:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Metoda directă de determinare a matricei de rigiditate

Ipoteză de bază: deplasarea în lungul axei elementului variază liniar:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j$$



Rezultă:

$$\varepsilon = \frac{u_j - u_i}{L} = \frac{\Delta}{L}$$

Δ - deformația axială

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\Delta}{L}$$

Este cunoscut că:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

unde: F este forța axială

Rezultă:

$$F = \frac{EA}{L}\Delta = k\Delta$$

unde: $k = \frac{EA}{L}$ este rigiditatea axială a barei

Elementul de bară se comportă identic cu elemntul de resort şi în consecință matrice de rigiditate a elementului este:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Ecuația de echilibru a barei rezultă:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

Gradele de libertate: numărul de componente ale vectorului deplasărilor la un nod al elementului

Pentru elemntul 1D – bară: 1 grad de libertate pe nod

Semnificația fizică a unui coeficient din matricea de rigiditate:

Una din coloanele matricei reprezintă forțele care se dezvoltă la nodurile elemntului obținute prin impunerea unei deplasări egală cu unu la unul din capete, celelate deplasări fiind menținute egale cu zero.

Metoda energetică de determinare a matricei de rigiditate

Matricea de rigiditate a elemntului de bară va fi determinată utilizând o abordare formală ce are la bază condiția de de echilibru elastic exprimată prin lucrul mecanic virtual: lucrul mecanic al forțelor interioare este egal cu lucrul mecanic al forțelor exterioare.

Se definesc două funcții de formă cu variație liniară:

$$N_i(\xi) = 1 - \xi, \qquad N_j(\xi) = \xi$$

unde: $\xi = \dfrac{x}{L}, \qquad 0 \le \xi \le 1$

Deplasarea în lungul elementului se pot scrie sub forma:

$$u(x) = u(\xi) = N_i(\xi)u_i + N_j(\xi)u_j$$

sau în formă compactă:

$$u = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \mathbf{Nu}$$

Deformațiile specifice pot fi scrise ca:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \left[\frac{d}{dx}\mathbf{N}\right]\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{u}$$

unde **B** este matricea ce exprimă deformațiile specifice în funcție de deplasări:

$$\mathbf{B} = \frac{d}{dx}\left[N_i(\xi) \quad N_j(\xi)\right] = \frac{d}{d\xi}\left[N_i(\xi) \quad N_j(\xi)\right] \bullet \frac{d\xi}{dx}$$

şi efectuând derivatele:

$$\mathbf{B} = \left[-1/L \quad 1/L\right]$$

Tensiunile pot fi scrise ca:

$$\sigma = E\varepsilon = E\mathbf{B}\mathbf{u}$$

Lucrul mecanic al forțelor interioare (energia de deformare) are expresia:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma^{\mathrm{T}}\varepsilon dV = \frac{1}{2}\int_V \left(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}E\mathbf{B}\mathbf{u}\right)dV = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\left[\int_V \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}E\mathbf{B}\right)dV\right]\mathbf{u}$$

Lucrul mecanic al forțelor nodale este:

$$W = \frac{1}{2} f_i u_i + \frac{1}{2} f_j u_j = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}$$

Conform principiului lucrului mecanic virtual: **U = W**

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \left[\int_V \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}} E \mathbf{B} \right) dV \right] \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}$$

de unde rezultă:

$$\left[\int_V \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}} E \mathbf{B} \right) dV \right] \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

sau în formă condensată:

$$\mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

unde: $\mathbf{k} = \int_V \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}} E \mathbf{B} \right) dV$ este matricea de rigiditate a elementului

Expresia matricei de rigiditate:

$$\mathbf{k} = \int_V \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}} E \mathbf{B}\right) dV$$

are un caracter general şi poate fi utilizată pentru orice element finit.

Pentru elementul de bară rezultă expresia matricei de rigiditate:

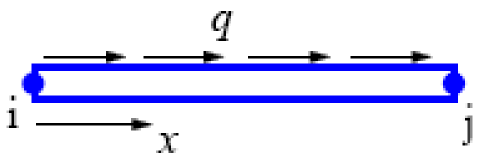
$$\mathbf{k} = \int_0^L \begin{Bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{Bmatrix} E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} A dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

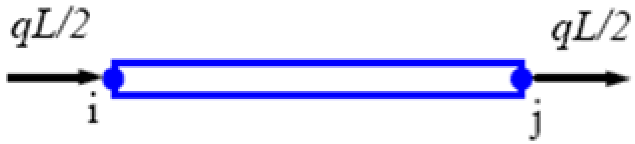
care este aceeaşi cu cea determinată pe cale directă.

De remarcat că lucrul mecanic al forțelor interioare (energia de deformare) poate fi expimat prin intermediul matricei de rigiditate:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{k} \mathbf{u}$$

Tratarea încărcărilor distribuite





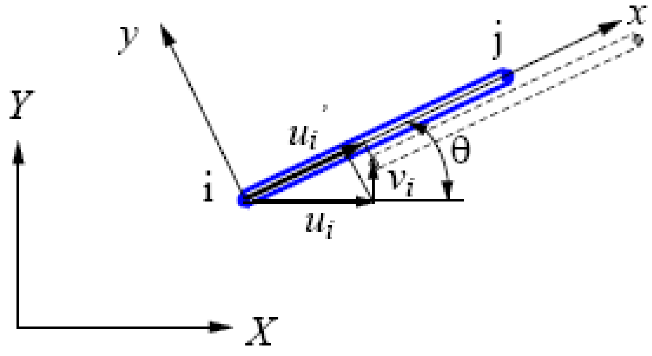
Încărcările uniform distribuite în lungul axului elementului pot fi înlocuite cu un sistem de forțe echivalente aplicate la nodurile acestuia. Aceste forțe echivalente se determină pe baza lucrului mecanic produs de forța distribuită:

$$W_q = \int_0^L \frac{1}{2} uq dx = \frac{1}{2}\int_0^1 u(\xi) q(L d\xi) = \frac{qL}{2}\int_0^1 u(\xi) d\xi \quad = \frac{qL}{2}\int_0^1 \begin{bmatrix} N_i(\xi) & N_j(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} d\xi$$

$$= \frac{qL}{2}\int_0^1 \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix} d\xi \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{qL}{2} & \frac{qL}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}$$

Elemente de bară în plan sau în spațiu

a) Cazul barei în plan



Local	Global
x, y u_i', v_i' 1 gl la nod	X, Y u_i, v_i 2 2 gl la nod

Relații de transformare:

$$u_i' = u_i \cos\theta + v_i \sin\theta = \begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

unde $l = \cos\theta,\ m = \sin\theta$.

$$v_i' = -u_i \sin\theta + v_i \cos\theta = \begin{bmatrix} -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

În formă matriceală:

$$\begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

sau în notare compactă: $\mathbf{u}_i' = \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{u}_i$

unde matricea de transformare $\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}$ este ortogonală:

adică: $\tilde{\mathbf{T}}^{-1} = \tilde{\mathbf{T}}^T$.

Pentru cele două noduri ale elementului rezultă:

$$\begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \\ u_j' \\ v_j' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$ sau $\mathbf{u}' = \mathbf{T}\mathbf{u}$ unde: $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$

Matricea de rigiditate a elementului în sistemul de axe global

În sistemul de axe global matricea de rigiditate are expresia:

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$$ (vezi MGD)

şi explicit:

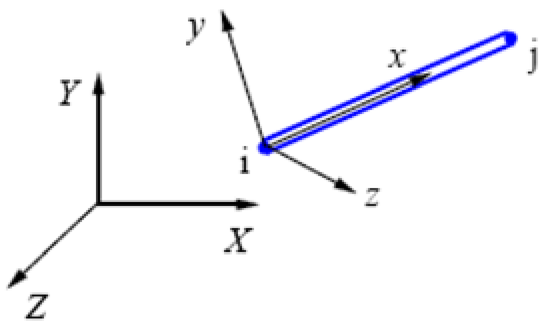
$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

unde *l* şi *m* sunt cosinuşii directori

şi au expresiile:

$$l = \cos\theta = \frac{X_j - X_i}{L}, \qquad m = \sin\theta = \frac{Y_j - Y_i}{L}$$

b) Cazul barei în spaţiu



Local	Global
x, y, z	X, Y, Z
u_i', v_i', w_i'	u_i, v_i, w_i
1 gl pe nod	3 gl pe nod

Matricile de rigiditate sunt calculate în sistemul local de axe, transformate în sistemul global de axe şi apoi asamblate.

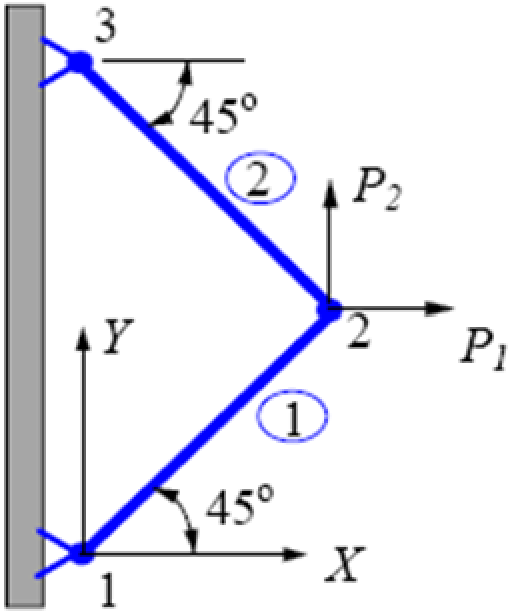
Determinarea tesnsiunilor la nivelul elementelor

$$\sigma = E\varepsilon = E\mathbf{B}\begin{Bmatrix} u_i' \\ u_j' \end{Bmatrix} = E\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

sau:

$$\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

Problema 3 - sistem de bare în plan



Cele două bare au aceleaşi caracteristici geometrice şi de material (E,A,L).

Se cere deplasarea nodului 2 şi tensiunile în cele două bare.

În sistemul de axe local matricile de rigiditate a celor două bare sunt:

$$\mathbf{k}_1^{'} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{k}_2^{'}$$

Matricile de rigiditate în sistemul de axe global sunt:

Elementul 1

$$\theta = 45^\circ, \quad l = m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{T}_1^T \mathbf{k}_1' \mathbf{T}_1 = \frac{EA}{2L} \begin{array}{c} \begin{matrix} . & \quad . & \quad u_2 & \quad v_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Elementul 2

$$\theta = 135^\circ, \; l = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}_2' \mathbf{T}_2 = \frac{EA}{2L} \begin{array}{c} \begin{matrix} u_2 & \quad v_2 & \quad u_3 & \quad v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Asamblând matricea de rigiditate a strucurii rezultă:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \dfrac{EA}{2L} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

Condițiile de rezemare: $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0,$

Condițiile de încărcare: $F_{2X} = P_1, \ \ F_{2Y} = P_2$

Eliminind liniile şi coloanele aferente deplasărilor egale cu zero, rezultă:

$$\frac{EA}{2L}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

şi rezolvând sistemul de ecuații:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA}\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

Tensiunile aferente celor două bare au valorile:

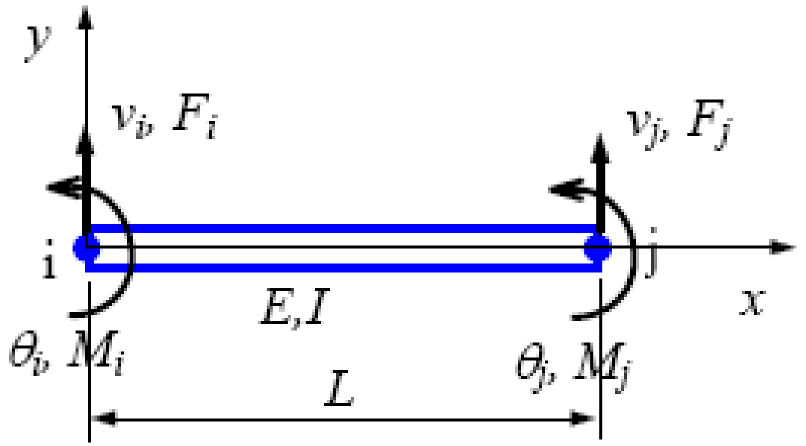
$$\sigma_1 = \frac{E}{L}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{Bmatrix}0\\0\\P_1\\P_2\end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A}\left(P_1 + P_2\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{L}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{Bmatrix}P_1\\P_2\\0\\0\end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A}\left(P_1 - P_2\right)$$

Observații:

1. Expresiile tensiunilor sunt aceleaşi cu cele determinate prin teoria liniara a barelor
2. Pentru determinarea tensiunilor este necesar a determina în prealabil deplasările, deci MEF apelează la un *model deplasare.*

Elementul de grindă în plan



Caracterisitici:

L	**lungimea**
I	**momentul de inerție al secțiunii transversale**
E	**modulul de elasticitate longitudinal**
$v = v(x)$	**deplasarea transversală a axei grinzii**
$\theta = \dfrac{dv}{dx}$	**rotirea secțiunii în taport cu axa oz**
$F = F(x)$	**forța tăietoare**
$M = M(x)$	**moment încovoietor în raport cu axa oz**

Elemnte de teoria încovoierii grinzilor:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

Metoda energetică de determinare a matricei de rigiditate

Se va aplica formula:

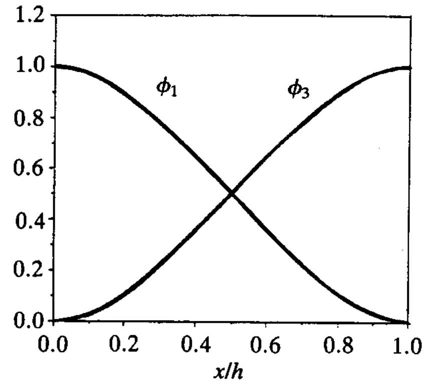
$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx$$

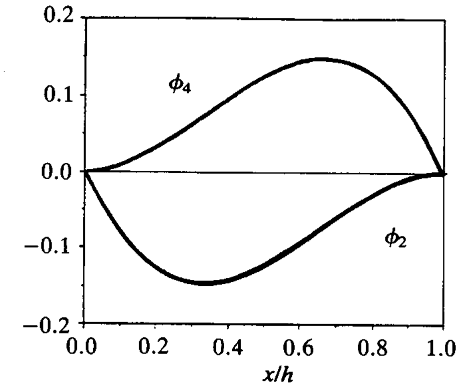
Pentru aceasta se aleg funcțiile de interpolare a depasării transversale ce corespund soluției ecuației diferențiale a fibrei medii deformate (vezi MGD):

$$v(x) = \mathbf{N}\mathbf{u} \quad = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

unde:

$$N_1(x) = 1 - 3x^2 / L^2 + 2x^3 / L^3$$
$$N_2(x) = x - 2x^2 / L + x^3 / L^2$$
$$N_3(x) = 3x^2 / L^2 - 2x^3 / L^3$$
$$N_4(x) = -x^2 / L + x^3 / L^2$$





sunt parabole cubice şi reprezintă deformate ale grinzii din deplasări / rotiri unitare ale capetelor acesteia.

Trebuie remarcat că:

$$N_1 + N_3 = 1$$
$$N_2 + N_3 L + N_4 = x$$

ceea ce confirmă că ele conțin şi deplasările de corp rigid ale grinzii

Curbura grinzii se exprimă sub forma:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\mathbf{N}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Unde matricea de transformare a deplasărilor în deformații specifice este:

$$\mathbf{B} = \frac{d^2}{dx^2}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1''(x) & N_2''(x) & N_3''(x) & N_4''(x) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L}+\frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

Lucrul mecanic al forțelor interioare (energia de deformare) are expresia:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \left(-\frac{My}{I}\right)^T \frac{1}{E}\left(-\frac{My}{I}\right) dA dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^L M^T \frac{1}{EI} M dx = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^T EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) dx \quad = \frac{1}{2}\int_0^L (\mathbf{Bu})^T EI(\mathbf{Bu}) dx$$
$$= \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\left(\int_0^L \mathbf{B}^T EI\mathbf{B} dx\right)\mathbf{u}$$

Rezultă că maricea de rigiditate a unui element de grindă este:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T EI\mathbf{B} dx$$

Prin efectuarea integralelor se obține relația de rigiditate pentru elementul de grindă solicitat la încovoiere:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} v_i & \theta_i & v_j & \theta_j \end{array} \\
\dfrac{EI}{L^3} & \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix}
\end{array}
$$

Combinând rigiditatea axială (vezi elementul de bară) cu rigiditatea la încovoiere a grinzii se obținematricea de rigiditate generală a elementului 2D de gindă:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} u_i & v_i & \theta_i & u_j & v_j & \theta_j \end{array} \\
\mathbf{k} = & \begin{bmatrix}
\dfrac{EA}{L} & 0 & 0 & -\dfrac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{12EI}{L^3} & \dfrac{6EI}{L^2} & 0 & -\dfrac{12EI}{L^3} & \dfrac{6EI}{L^2} \\
0 & \dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L} & 0 & -\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{2EI}{L} \\
-\dfrac{EA}{L} & 0 & 0 & \dfrac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & -\dfrac{12EI}{L^3} & -\dfrac{6EI}{L^2} & 0 & \dfrac{12EI}{L^3} & -\dfrac{6EI}{L^2} \\
0 & \dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{2EI}{L} & 0 & -\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Observații:

1. Soluția obținută cu EF este aceeaşi cu cea obținută pe baza teoriei grinzilor cu condiția ca între cele două noduri încărcarea q(x) = 0.

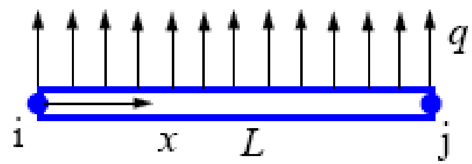
Astfel ecuația fibrei medii deformate:

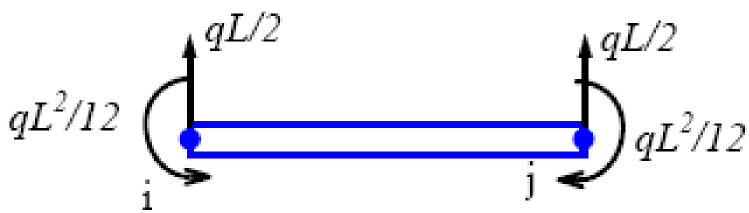
$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x)$$

are ca soluțe pentru deplasarea transversală o parabolă cubică daca q(x) = 0

şi care în această situație corespunde funcței alese la formularea elementului.

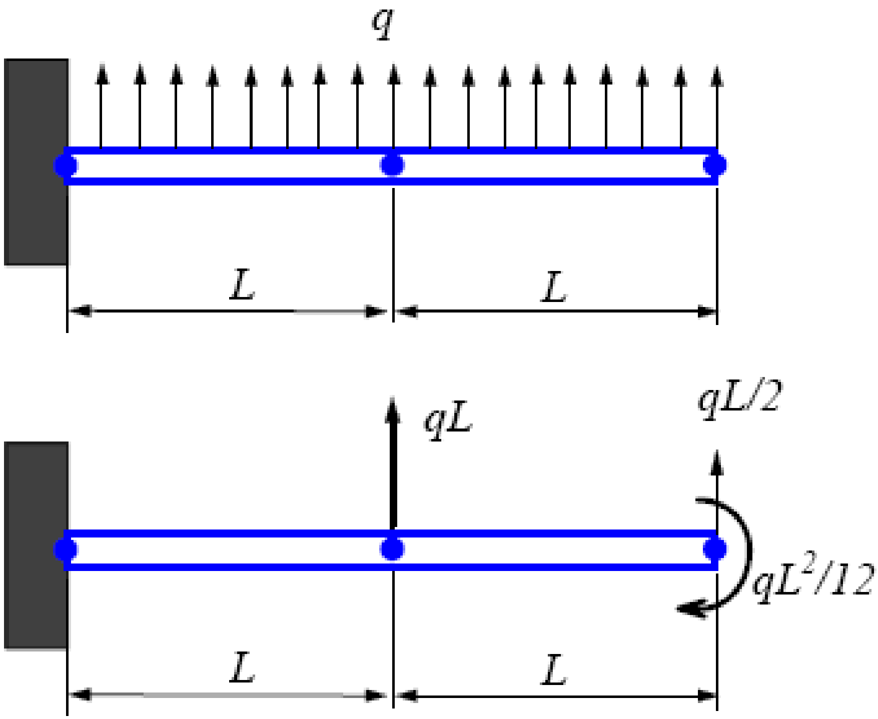
2. Încărcările distribuite se înlocuiesc ca forțe nodale echivalente:



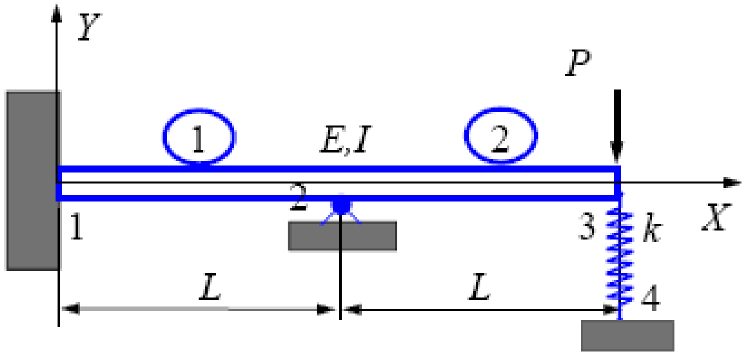


Forțele nodale echivalente se pot determina prin lucrul mecanic al forțelor distribuite.

Exemplu:



Problema 4 - sistem de grinzi în plan



$P = 50$ kN, $k = 200$ kN/m, $L = 3$ m,

$E = 210$ GPa, $I = 2\times10^{-4}$ m^4.

Sistemul are un reazem simplu la nodul 2 şi un resort la nodul 3.

Modelul cu EF cuprinde 2 elemente de grindă şi un element de resort.

Elementul 1 – matrice de rigiditate în coordonate locale

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{matrix} \quad v_1 & \quad \theta_1 & \quad v_2 & \quad \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Elementul 2 – matrice de rigiditate în coordonate locale

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Elementul de resort – matrice de rigiditate

$$\mathbf{k}_s = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \end{array}$$

Adunând aceste matrici de rigiditate în sistemul ecuațiilor de condiție cu elemente finite, se obține:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 & v_4 \end{array} \\
\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}
12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 \\
 & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 \\
 & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\
 & & & & 12+k' & -6L & -k' \\
 & & & & & 4L^2 & 0 \\
 & \text{simetric} & & & & & k'
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2Y} \\ M_2 \\ F_{3Y} \\ M_3 \\ F_{4Y} \end{Bmatrix}
\end{array}
$$

unde: $k' = \frac{L^3}{EI} k$

Se aplică condițiile de rezemare:

$$v_1 = \theta_1 = v_2 = v_4 = 0,$$

şi de încărcare:

$$M_2 = M_3 = 0, \qquad F_{3Y} = -P$$

Prin anularea liniilor şi coloanelor 1,2,3 şi 7 rezltă şistemul de ecuații redus:

$$
\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}
8L^2 & -6L & 2L^2 \\
-6L & 12+k' & -6L \\
2L^2 & -6L & 4L^2
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

Rezolvând sistemul de ecuații rezultă deplasările nodurilor 2 şi 3:

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = -\frac{PL^2}{EI(12+7k')}\begin{Bmatrix} 3 \\ 7L \\ 9 \end{Bmatrix}$$

sau:

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.002492 \text{ rad} \\ -0.01744 \text{ m} \\ -0.007475 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

şi din sistemul de ecuații se determină reacțiunile:

$$\begin{Bmatrix} F_{1\mathrm{r}} \\ M_1 \\ F_{2\mathrm{r}} \\ F_{4\mathrm{r}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -69.78 \text{ kN} \\ -69.78 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ 116.2 \text{ kN} \\ 3.488 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

Verificare: