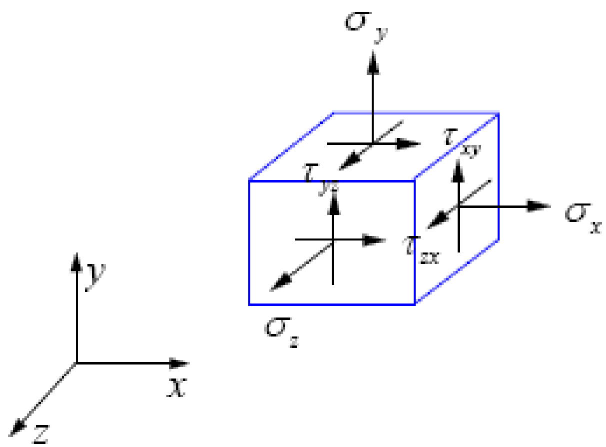
3. Probleme bidimensionale (2D)

Elemente teoretice de bază

Starea spațială de tensiuni şi deformații specifice poate fi definită prin şase componente:



$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ pentru tensiuni

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ pentru deformații specifice

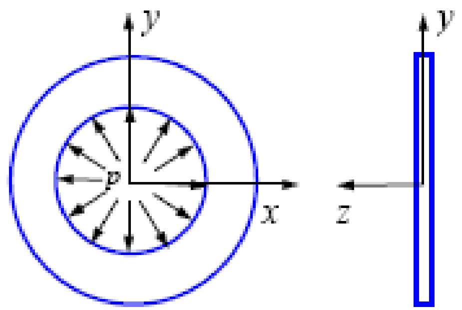
În anumite condiții, starea generală (3D) de tensiuni şi deformații poate fi simplificată prin reducere la două dimensiuni (2D).

Categorii de probleme plane (2D)

a) Starea plană de tensiuni

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \qquad (\varepsilon_z \neq 0)$$

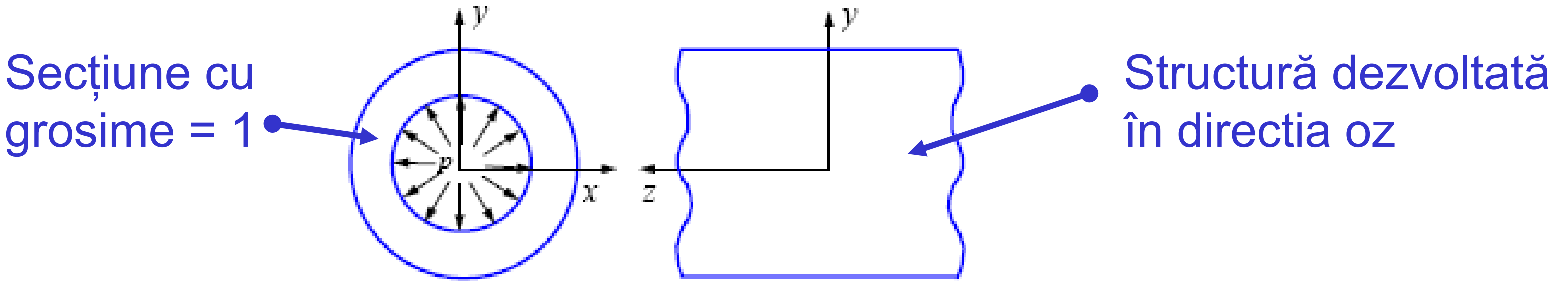
O structură plană cu grosime constantă, încărcată în planul median al structurii (de regulă planul xy):



b) Starea plană de deformație

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \qquad (\sigma_z \neq 0)$$

O structură dezvoltată într–o direcție (lungimea – axa oz), cu secțiune transversală şi încărcare constantă în direcția lungimii. Pentru calcul se consideră o secțiune din structură de grosime unitară:



Relațiile dintre tensiuni şi deformații specifice

Pentru materiale izotrope şi comportare elastică:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \qquad \text{sau} \qquad \varepsilon = \mathbf{E}^{-1}\sigma + \varepsilon_0$$

Unde *E* = modulul de elasticitate longitudinal, *G* = modulul de elasticitate transversal, ν = coeficientul lui Poisson şi ε_0 = deformații specifice inițiale,

şi $$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$ (materialul este definit prin două constante)

Rezolvând relația de mai sus, se obțin tensiunile funcție de deformații:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \right)$$

sau: $\sigma = \mathbf{E}\varepsilon + \sigma_0$

unde: $\sigma_0 = -\mathbf{E}\varepsilon_0$ reprezintă tensiunile inițiale

Relațiile de mai sus sunt valabile pentru *starea plană de tensiuni*. Pentru cazul *starii plane de deformații* constantele materialului se vor înlocui cu:

$$E \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$\nu \rightarrow \frac{\nu}{1-\nu}$$

$$G \rightarrow G$$

şi astfel relația dintre tensiuni şi deformații devine:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \right)$$

Relațiile dintre deformații specifice şi deplasări

Pentru deformații şi rotiri mici, sunt cunoscute relațiile:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

sau în formă matriceală:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix},$$

sau compact: $\varepsilon = \mathbf{Du}$

Ecuații de echilibru

Conform TE, tensiunile trebuie să satisfacă ecuațiile de echilibru:

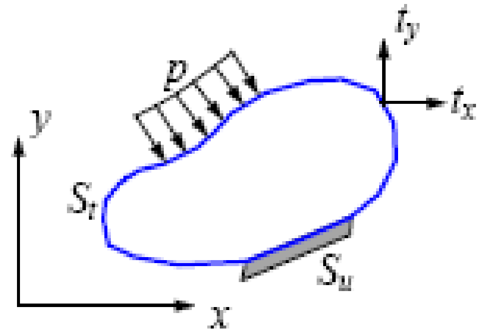
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0$$

unde f_x şi f_y sunf forțe masice / m^3

În MEF aceste ecuații de echilibru sunt satisfăcute în mod aproximativ !!!

Condiții de margine



$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v},$ condiții în deplasări pe S_u

$t_x = \bar{t}_x, \quad t_y = \bar{t}_y,$ condiții în tensiuni pe S_t

În MEF, toate tipurile de încărcări(distribuite pe suprafață, forțe masice, forțe concentrate etc.) sunt convertite în forțe echivalente concentrate la noduri.

Formularea cu elemente finite a problemelor 2D

Deplasările *u* şi *v* din interiorul elementului sunt interpolate în funcție de deplasările nodurilor prin funcții de interpolare (de formă) sub forma:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

sau condensat: $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$

Unde: ***N*** este matricea funcțiilor de interpolare***, u*** este vectorul deplasărilor, ***d*** este vectorul deplasărilor nodurilor elementului.

Pe această cale s–a considerat că deplasarea *u* a unui punct din interiorul elementului depinde numai de deplasările u_i ale nodurilor, iar deplasarea *v* a unui punct depinde numai de deplasările v_i ale nodurilor.

Pe baza relațiilor dintre deformații şi deplasăeri:

$\varepsilon = \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{N}\mathbf{d},$ sau condensat: $\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{d}$

unde: $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N}$ este matricea de transformare a depasărilor in deformații

Energia de deformare (lucrul mecanic al tensiunilor) este:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma^T \varepsilon \, dV = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right) dV \quad = \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{E}\varepsilon)^T \varepsilon \, dV = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon^T \mathbf{E} \varepsilon \, dV$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}\mathbf{B} \, dV \mathbf{d} \quad = \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d}$$

De unde rezultă expresia generală a matricei de rigiditate:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}\mathbf{B} \, dV$$

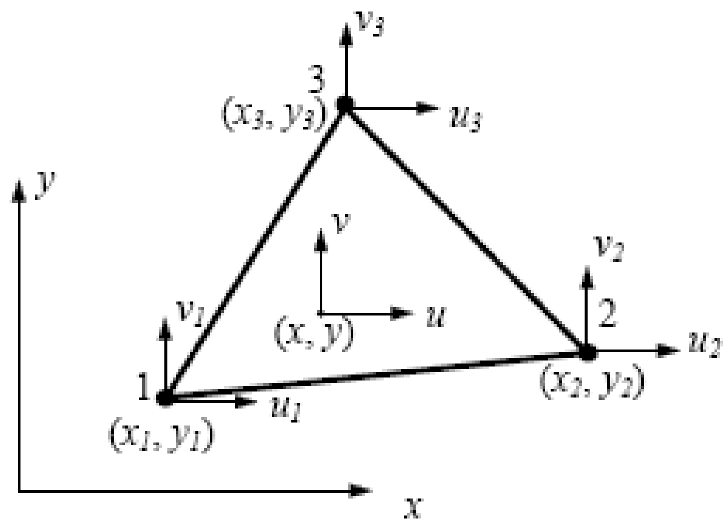
Matricea de rigiditate **k** este simetrică întrucât şi ***E*** este simetrică. Pentru un material dat, matricea ***k*** depinde de matricea ***B*** care la rândul ei depinde de funcțiile de interpolare ***N***.

Gradul de acuratețe cu care modelul cu EF poate reproduce comportarea unei structuri depinde direct de modalitatea de alegere a funcțiilor de interpolare.

Cele mai folosite elemente finite în modelarea problemelor 2D sunt elementele liniare sau parabolice de formă triunghiulară sau patrulater oarecare.

Element liniar triunghiular (CST)

Este cel mai simplu element finit 2D.



Elemntul are 3 noduri. Fiecare nod are 2 grade de libertate (deplasare in direcția ***x*** şi respectiv ***y***). Deplasările ***u*** şi ***v*** în interiorul elementului sunt alese ca funcții cu variație liniară:

$$u = b_1 + b_2 x + b_3 y, \quad v = b_4 + b_5 x + b_6 y$$

unde $\boldsymbol{b_i}$ sunt constante. Prin derivare rezultă că *deformațiile specifice sunt constante* (CST) în interiorul elementului:

$$\varepsilon_x = b_2, \quad \varepsilon_y = b_6, \quad \gamma_{xy} = b_3 + b_5$$

Funcțiile deplasărilor trebuie sa satisfacă relațiile:

$$u_1 = b_1 + b_2 x_1 + b_3 y_1$$
$$u_2 = b_1 + b_2 x_2 + b_3 y_2$$
$$\vdots$$
$$v_3 = b_4 + b_5 x_3 + b_6 y_3$$

Rezolvând aceste ecuații, se obțin valorile constantelor b_1, b_2, ... b_6, în funcție de deplasările şi cordonatele nodurilor. Substituind acestea în expresiile deplasărilor rezultă:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

unde funcțiile de interpolare (de formă) au expersiile:

$$N_1 = \frac{1}{2A}\{(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\}$$
$$N_2 = \frac{1}{2A}\{(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\}$$
$$N_3 = \frac{1}{2A}\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\}$$

cu: $A = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$

Pe baza acestor expresii se dezvoltă relația dintre deformații şi deplasările nodurilor elementului:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{Bd} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

unde: $x_{ij} = x_i - x_j$ $\quad y_{ij} = y_i - y_j \; (i, j = 1, 2, 3)$

Este evident că deformațiile specifice sunt constante în interiorul elementului CST (constant strain triangle)

Matricea de rigiditate are expersia:

$$\mathbf{k} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \, dV = tA(\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B})$$

t = grosimea elementului

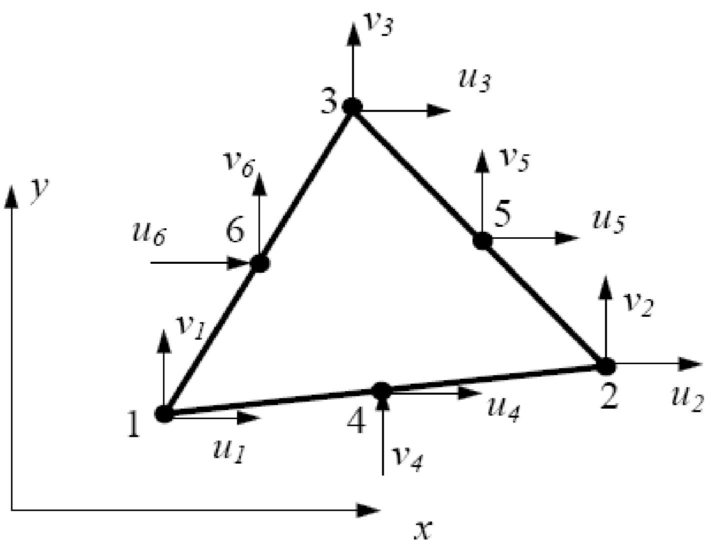
k este simetrică de dimenisiuni 6x6

Matricea de rigiditate are formă explicită şi uşor de implementat în programe de calcul.

Recomandări privind utilizarea elementului CST

1. Se utilizează în zone unde variația tensiunilor este lentă
2. Poate fi utilizat ca rețea de tranziție (de la o rețea fină la una grosieră)
3. A se evita utilizarea în zonele cu concentrări de tensiuni sau zone critice: colțuri, marginile golurilor, în apropierea forțelor concentrate etc.
4. Este recomandat pentru analize cu EF preliminare, rapide

Element parabolic triunghiular (LST)



Elementul are şase noduri: 3 la colţuri şi 3 pe mijloacele laturilor. Fiecare nod are două grade de libertate, deplasări în direcțiile ***x*** şi ***y***.

Deplasările (***u*** şi ***v***) se aleg funcții cu variație parabolică:

$$u = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2$$

$$v = b_7 + b_8 x + b_9 y + b_{10} x^2 + b_{11} xy + b_{12} y^2$$

unde: b_i (i = 1, 2, ..., 12) sunt constante.

Prin derivare se obțin expersiile deformațiilor specifice:

$$\varepsilon_x = b_2 + 2b_4 x + b_5 y$$

$$\varepsilon_y = b_9 + b_{11} x + 2b_{12} y$$

$$\gamma_{xy} = (b_3 + b_8) + (b_5 + 2b_{10})x + (2b_6 + b_{11})y$$

care sunt funcții liniare. Deformațiile variază liniar pe domeniul elementului de unde şi denumirea LST (liniar strain triangle).

Deplasările pot fi scrise sub forma:

$$u = \sum_{i=1}^{6} N_i u_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{6} N_i v_i$$

Unde funcțiile de interpolare au expresiile:

$$N_1 = \xi(2\xi - 1)$$

$$N_2 = \eta(2\eta - 1)$$

$$N_3 = \zeta(2\zeta - 1)$$

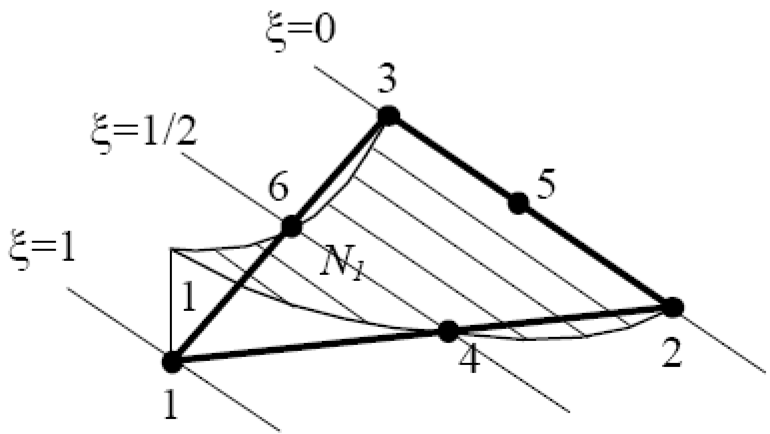
$$N_4 = 4\xi\eta$$

$$N_5 = 4\eta\zeta$$

$$N_6 = 4\zeta\xi$$

unde: ξ, η, ζ **sunt coordonate locale normalizate**

Reprezentarea grafică a funcției N_1 aferentă noului 1 a elementului LST:



Matricea de rigiditate a elemntului are forma:

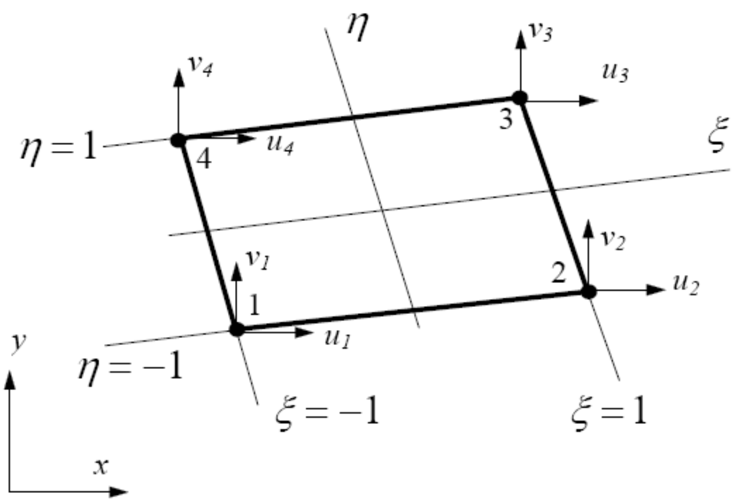
$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \, dV$$

unde produsul: $\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}$ este o funcție parabolică în x şi y.

Elementul este superior elementului CST.

În general matricea ***k*** se obține prin integrare numerică şi nu are o formă explicită în programele de calcul.

Element liniar patrulater (Q4)



Elementul are patru noduri plasate la colțurile patrulaterului.

În sistemul de axe local normalizat funcțiile de interpolare au forma:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \qquad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \qquad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

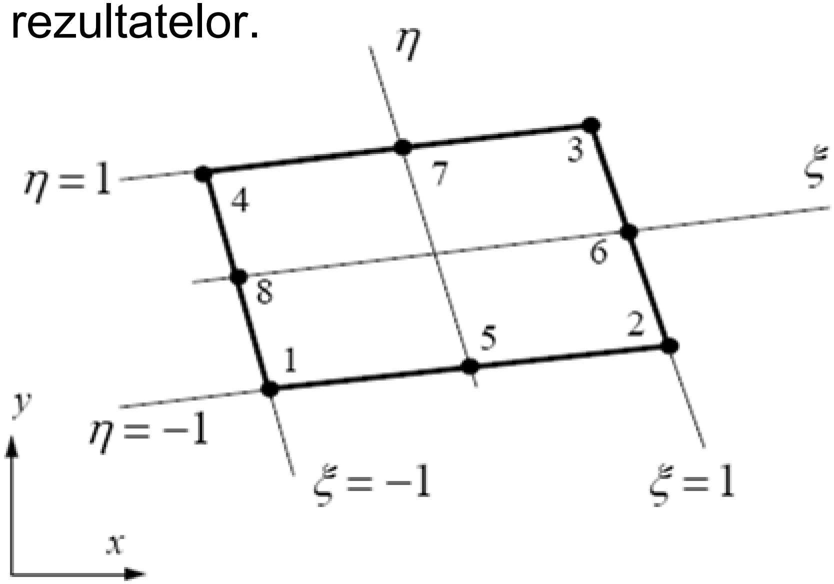
Câmpul deplasărilor în interiorul elementului:

$$u = \sum_{i=1}^{4} N_i u_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{4} N_i v_i$$

are forma unor funcții biliniare.

Element parabolic patrulater (Q8)

Este unul dintre cele mai utilizate elemente datorită flexibilităţii în modelare şi acurateţii rezultatelor.



Elementul are opt noduri: 4 noduri la colţurile patrulaterului şi 4 noduri pe mijloacele laturilor.

Câmpul deplasărilor are forma:

$$u = \sum_{i=1}^{8} N_i u_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{8} N_i v_i$$

şi este reprezentat prin funcţii parabolice. Deformaţiile specifice au variaţie liniară pe element, oferind o bună reprezentare a variaţiei acestora.

Determinarea tensiunilor

În interiorul unui element finit tensiunile se determină prin:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{E} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{EBd}$$

Unde **B** este matricea de transformare a deplasărilor în deformații specifice, iar **d** este vectorul deplasărilor nodurilor elementului şi care sunt cunoscute după rezolvarea ecuațiilor de condiție.

Tensiunile se pot determina în orice punct din interiorul elementului. Adesea acestea se determină în centrul sau colțurile elementului.

Tensiuni Von Mises

Sunt tensiuni echivalente pentru a caracteriza stările de tensiuni la structuri 2D sau 3D. Pentru un material ductil una dintre verificări este:

$$\sigma_e \le \sigma_Y$$

unde σ_e este tesnsiunea echivalentă vom Mises, iar σ_Y este tensiunea de curgere a materialului.

Tensiunea echivalentă von Mises este:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

unde σ_1, σ_2 şi σ_3 sunt tensiunile principale în punctul din structură considerat.

Pentru probleme 2D tensiunile principale au expresiile:

$$\sigma_1^P = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2^P = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Tensiunile von Mises pot fi exprimate direct în funcție de componentele tensiunilor în planul xoy al structurii:

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 3(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2)}$$

Medierea tensiunilor

Pentru a obține valori mai corecte ale tensiunilor, acestea se determină ca medie a tensiunilor determinate pe elementele din jurul unui nod. Această opțiune nu se va aplica la nodurile situate pe frontiera dintre două materiale diferite sau în zonele cu discontinuități geometrice unde pot apare variații bruşte ale tensiunilor.

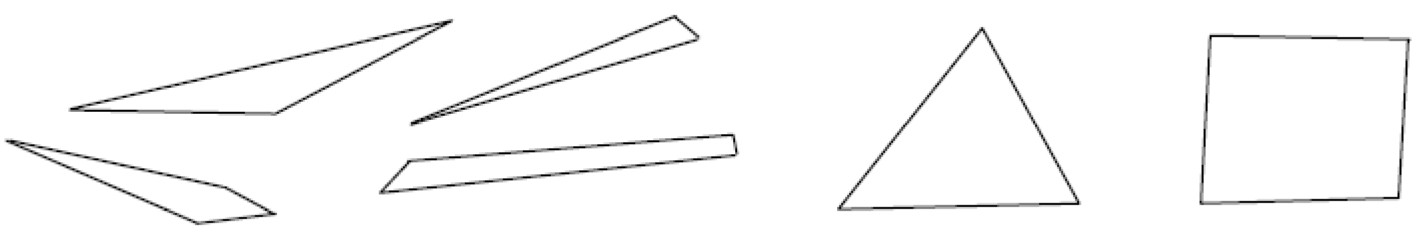
Concluzii

1. La realizarea modelului discret se va ține seama de caracteristicile EF:

   CST şi Q4 – deplasări liniare şi deformații şi tensiuni constante

   LST şi Q8 – deplasări parabolice şi deformații şi tensiuni liniare.

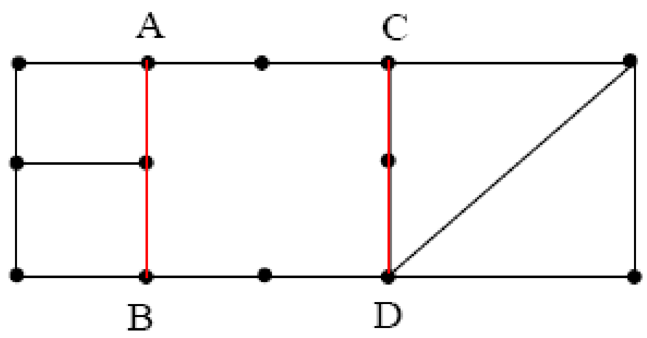
2. Alege tipul de EF adecvat problemei analizate. În caz de incertitudine se recomandă utilizarea elementelor parabolice sau a unei discretizări mai fine.
3. A se evita EF care au un raport al laturilor ridicat sau unghiuri al colțuri mari:



EF cu aspect necorespunzător – de evitat

EF cu aspect bun - recomandate

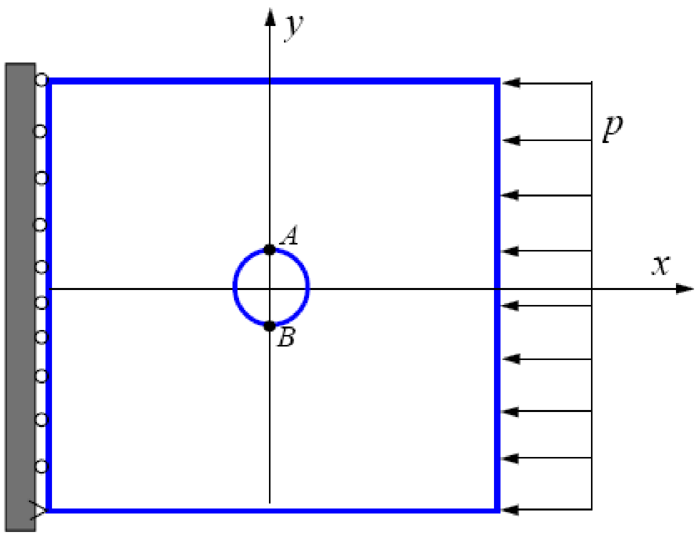
4. Se verifica conexiunea dintre diferite tipuri de elemente pentru a asigura continuitatea deplasărilor în lungul laturilor comune



Dicontinuităţi în deformata structurii în lungul laturilor AB şi CD

Problema 5

Placă pătrată, cu grosime constantă, cu un gol circular la mijloc şi solicitată de o încărcare uniform distribuită pe o latură.



Placa are dimensiuni 10x10, grosime = 1.0, raza golului = 1.0, E = $10x10^6$,

p = 100, $\nu = 0.3$. Se cere valoarea tensiunii σ maxime în placă.

Valoarea tensiunii maxime apare în punctele A sau B şi sunt de circa 3p = 300.

Tabel rezultate

Elem. Type	*No. Elem.*	*DOF*	*Max.* σ (
LST	966	4056	310.1
Q4	493	1082	286.0
Q8	493	3150	327.1
...	...	...	...
Q8	2727	16,826	322.3