

4. Elemente de placă și cupolă(shell)

Elemente de teoria plăcilor plane

Ipoteze:

- ✓ Suprafața mediană a plăcii este plană
- ✓ Încărcările sunt normale pe suprafața mediană
- ✓ Placile sunt sollicitate predominant la încovoiere

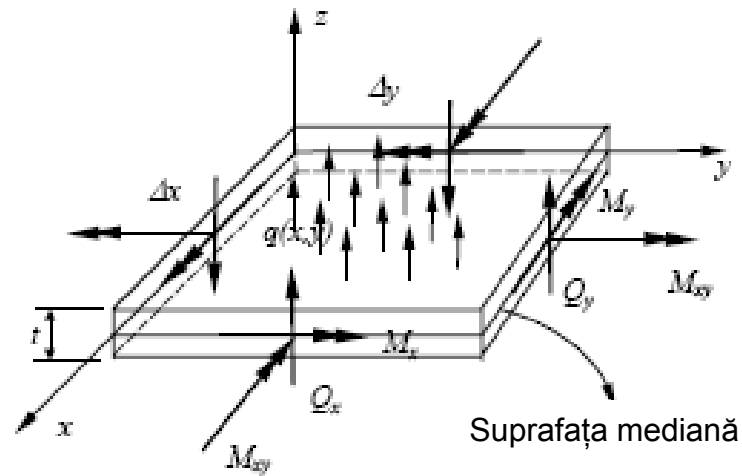
Observație: există o similitudine între modelul de grindă 1D și modelul de placă plană 2D.

Elemente de construcție modelate cu plăci plane::

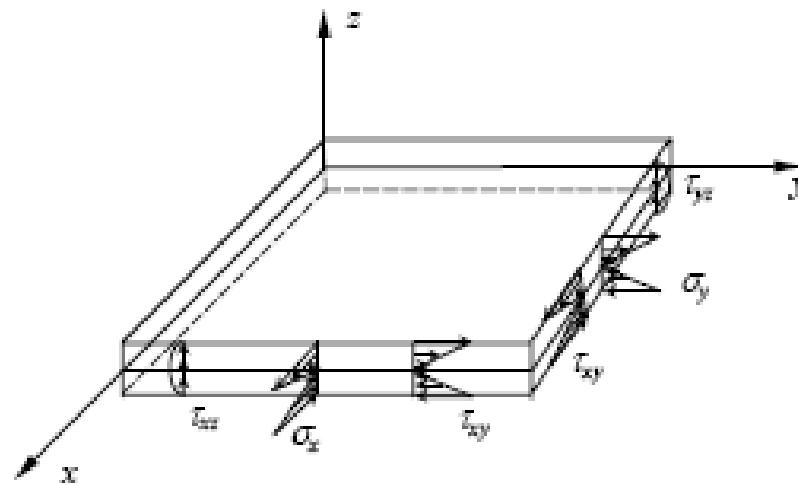
- ✓ Planșee,
- ✓ Dale,
- ✓ Panouri de tablă de pod

.....

Eforturi secționale, forțe și momente, acționând pe placă



Tensiuni acționând pe placă



Relațiile dintre eforturi secționale și tensiuni

a. Momente încovoietăre (pe unitatea de lungime)

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \quad (N \cdot m / m)$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \quad (N \cdot m / m)$$

b. Momente de torsiune (pe unitatea de lungime)

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz, \quad (N \cdot m / m)$$

c. Forțe tăietoare (pe unitatea de lungime)

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, \quad (N / m)$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz, \quad (N / m)$$

d. Tensiuni normale maxime

$$(\sigma_x)_{\max} = \pm \frac{6M_x}{t^2}, \quad (\sigma_y)_{\max} = \pm \frac{6M_y}{t^2}.$$

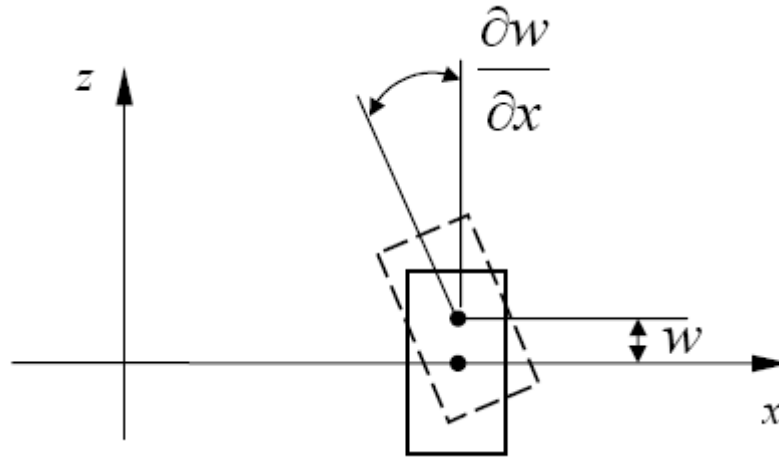
În planul median tensiunile sunt zero – suprafața neutră.

Teoria plăcilor subțiri (Teoria Kirchhoff)

Ipoteză de bază: o linie dreaptă și normală pe suprafața mediană rămâne dreaptă și normală pe suprafața mediană deformată (nu apar deformații de forfecare).

Ipoteza este similară cu cea de la grinzi drepte 1D: $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

Deplasările unui punct situat la cota z față suprafața neutră



$w = w(x, y)$, - deplasare normală la suprafața mediană (direcția z)

$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$, - deplasare pe direcția axei x

$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$. - deplasare pe direcția axei y

Deformații specifice

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Prin încovoiere suprafața mediană nu se deformează în planul ei.

Tensiuni (stare plan de tensiuni)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \text{sau}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = -z \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}.$$

Observație: **singura variabilă** necesară determinării stărilor de deformare și tensiuni este deplasarea normală pe planul median **$w(x,y)$**

Ecuția de echilibru exprimată în deplasări

$$D\nabla^4 w = q(x, y),$$

unde:

$$\nabla^4 \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right), \quad = \text{operator de derivare}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad = \text{rigiditatea la încovoiere a plăcii}$$

$q =$ încărcarea distribuită pe placă (forță/arie)

Observație: se poate ușor compara ecuația plăcilor cu cea stabilită la grinzi drepte:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x).$$

Forțe tăietoare și momente încovoietoare

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y},$$

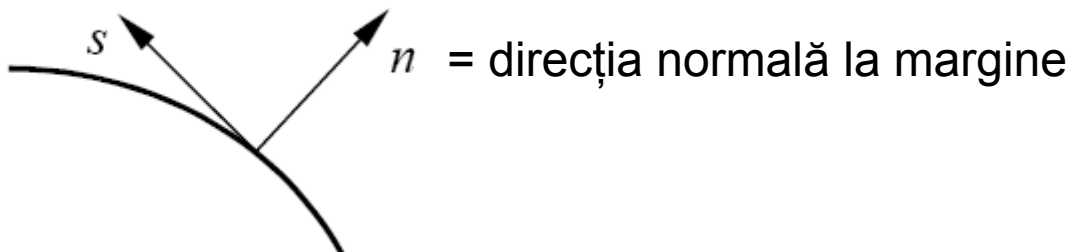
$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

Condiții de margine impuse pentru rezolvarea ecuației diferențiale

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0; \quad - \text{ margine încastrată}$$

$$w = 0, \quad M_n = 0; \quad - \text{ margine reazem simplu}$$

$$Q_n = 0, \quad M_n = 0; \quad - \text{ margine liberă}$$



Teoria plăcilor groase (Teoria Mindlin)

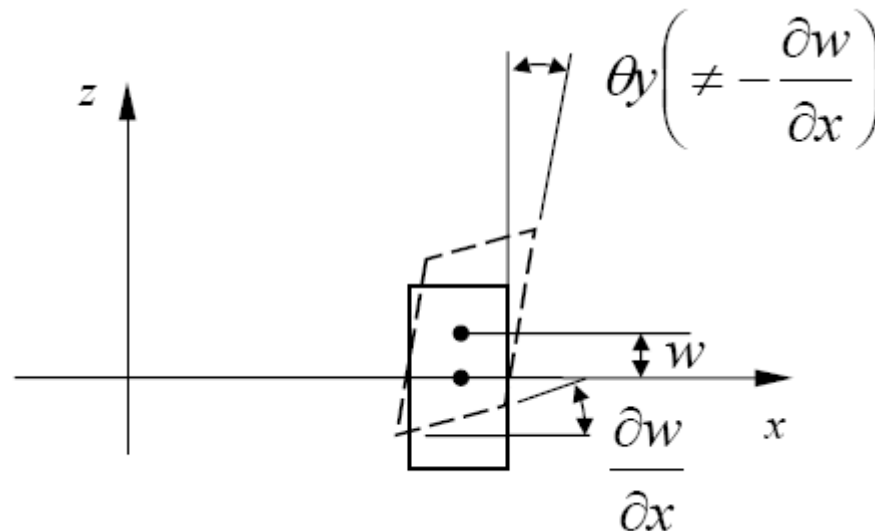
Placa se consideră groasă dacă: $t/L \geq 1/10$

unde: t = grosimea plăcii; L = dimensiunea caracteristică a plăcii

Plăci groase – se aplică teoria Mindlin care consideră deformarea secțiunii prin forfecare:

$$\gamma_{xz} \neq 0, \quad \gamma_{yz} \neq 0.$$

Prin considerarea deformațiilor de forfecare linia dreaptă normală pe suprafața mediană **NU** mai rămâne normală pe suprafața deformată:



Variabilele independente sunt unghiurile de rotire Θ_x și Θ_y ale liniei normale la suprafața mediană nedeformată în raport cu axele ox și oy .

Relațiile de geometrice în funcție de variabilele independente sunt:

$$u = z\theta_y, \quad v = -z\theta_x; \quad \text{deplasările în direcțiile } x \text{ și } y \text{ ale unui punct situat la cota } z \text{ față de planul median}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= z \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \text{deformații specifice liniare}$$

$$\left. \gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right), \right\} \text{deformații de forfecare}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y,$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x.$$

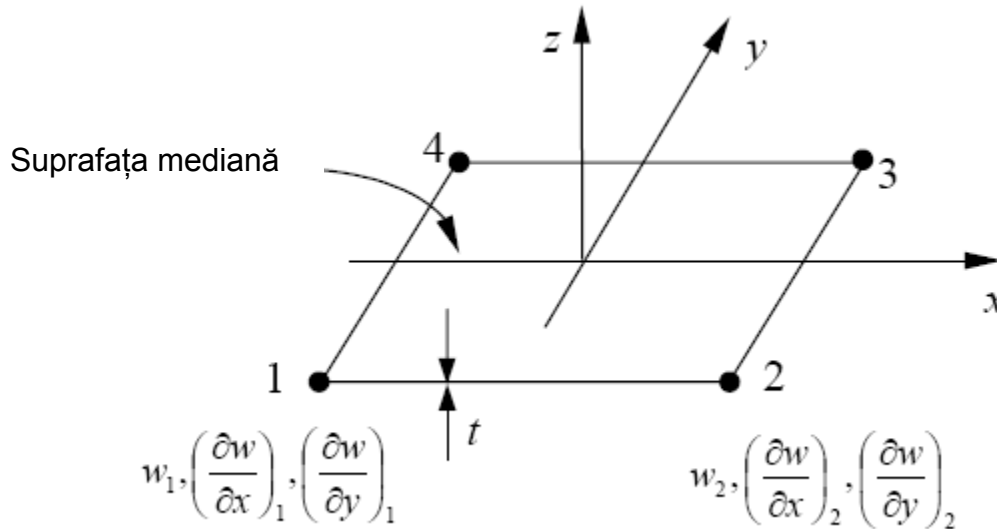
(dacă acestea sunt impuse = 0, se ajunge la relațiile aferente plăcilor subțiri)

Observație: **variabilele** necesare determinării stărilor de deformare și tensiuni sunt: deplasarea normală pe planul median **$w(x,y)$** și rotirile **$\theta(x,y)$ și $\theta(x,y)$**

Elemente de placă plană

Element de placă subțire (Kirchhoff)

a. Element patrulater cu 4 noduri



Grade de libertate pe nod:

$$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$$

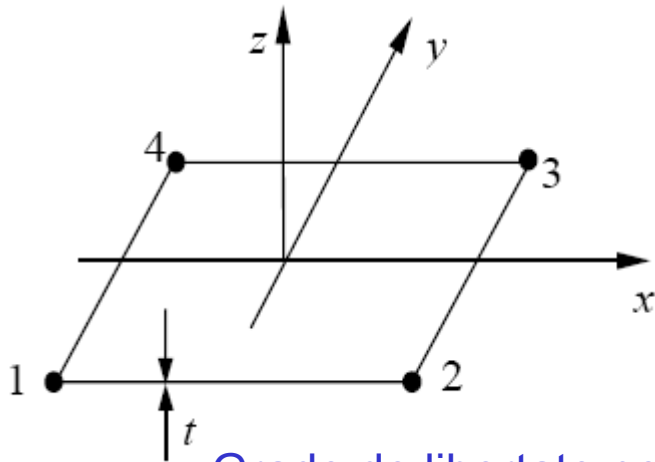
Deplasarea normală la suprafața mediană $w(x,y)$ este reprezentată prin:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^4 \left[N_i w_i + N_{xi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i + N_{yi} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right],$$

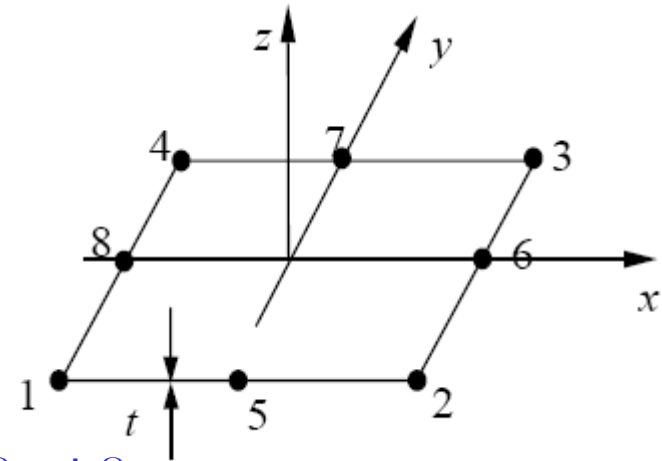
unde: N_i , N_{xi} și N_{yi} sunt funcții de interpolare – ELEMENT INCOMPATIBIL

Elemente de placă groasă (Mindlin)

Element patrulater Q4



Element patrulater Q8



Grade de libertate pe nod: w , Θ_x și Θ_y

Pe fiecare element cele trei variabile independente sunt interpolate sub forma:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i w_i,$$

$$\theta_x(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i \theta_{xi},$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i \theta_{yi}.$$

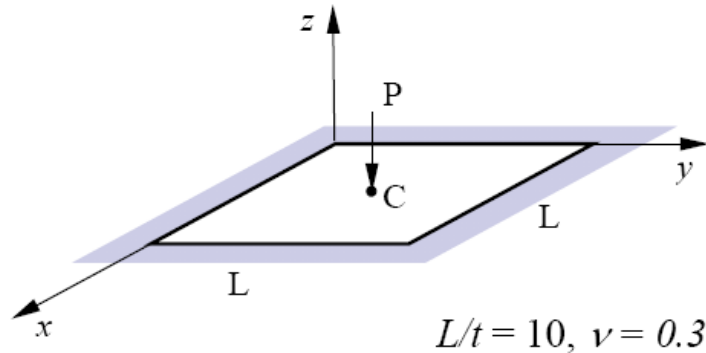
Deplasarea $w(x, y)$ are variație liniară pentru elementul Q4 și parabolică pentru elementul Q8

Problema 6 – Test de convergență a soluției

Placă pătrată, încărcată cu o forță concentrată la centrul plăcii.

Discretizare cu elemente de placă Q4.

Se cere săgeata sub forța concentrată pentru diferite rețele de discretizare.



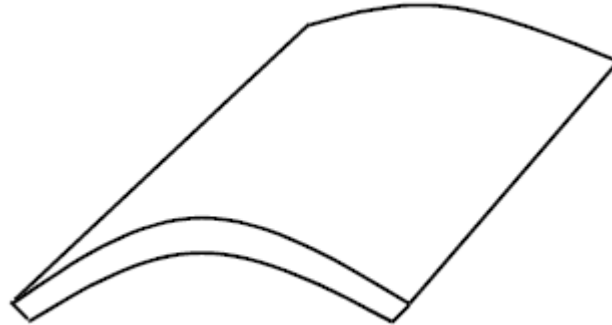
Este soluția convergentă???

Nu – elemente incompatibile

Mesh	$w_c (\times PL^2/D)$
2x2	0.00593
4x4	0.00598
8x8	0.00574
16x16	0.00565
:	:
<i>Exact Solution</i>	0.00560

Elemente de de cupolă

Cupole – sunt elemente structurale subțiri cu suprafața mediană curbă



Exemple:

Învelișul oului, cochilia scoicilor sau a melcului

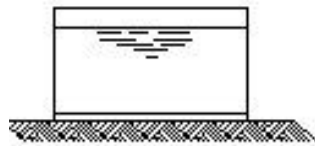
Containere, conducte, rezervoare

Caroseria automobilelor, vehicule aerospațiale

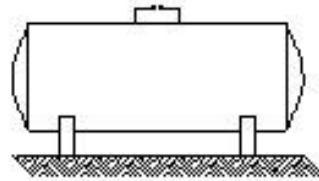
Cochilia navelor

Acoperișuri, tabliere casetate etc.

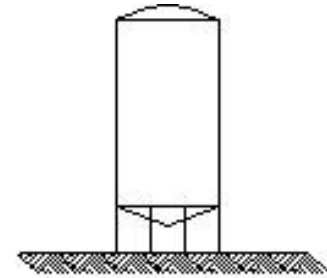
Diferite aplicatii ale structurilor tip cupola



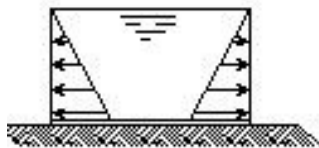
(a)



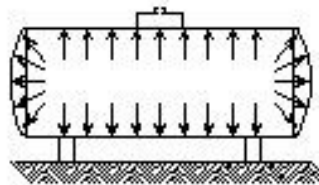
(b)



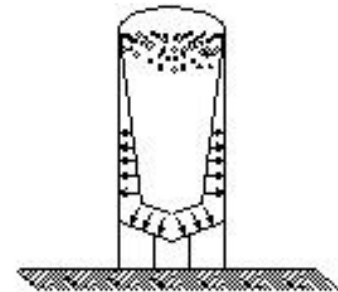
(c)



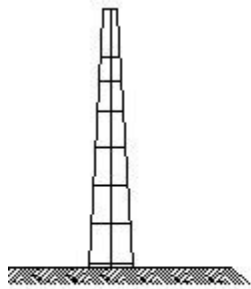
(a)



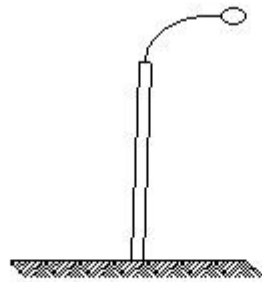
(b)



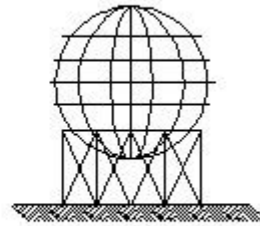
(c)



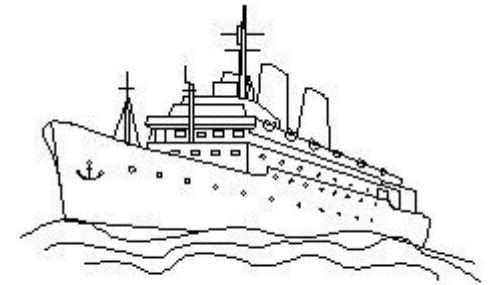
(d)



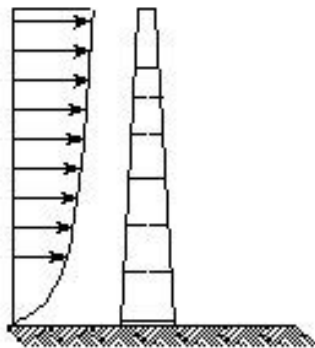
(e)



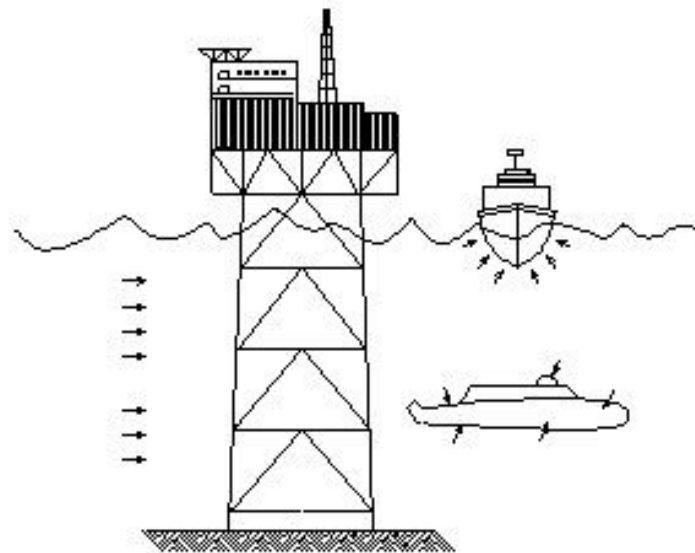
(f)



(g)



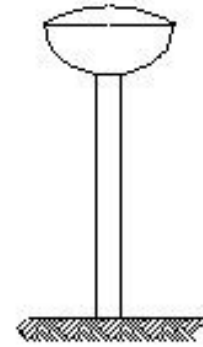
(d)



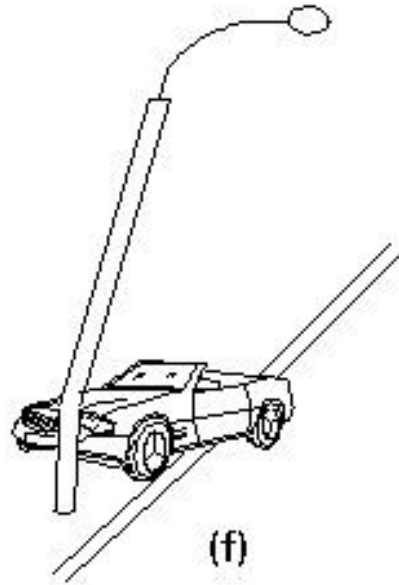
(e)



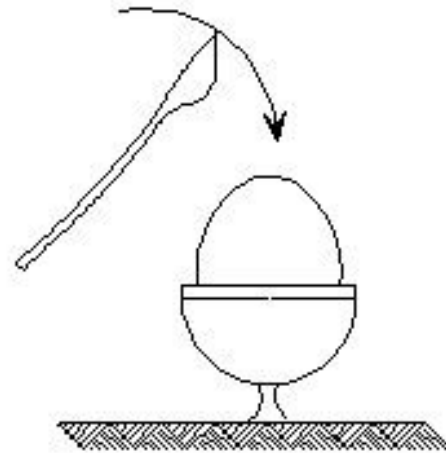
(h)



(i)

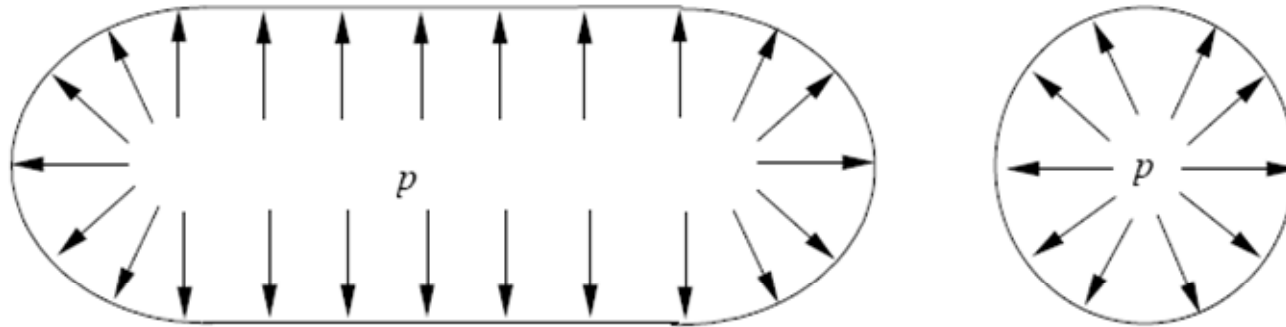


(f)

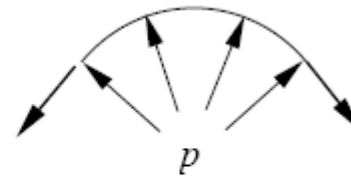
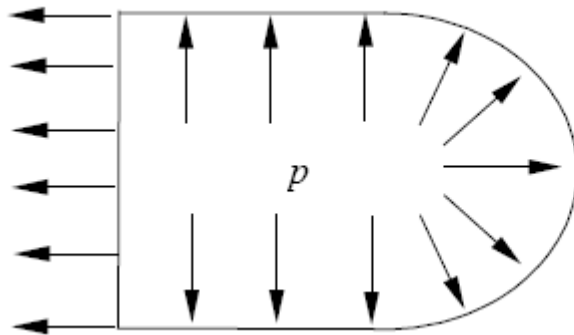


(g)

Exemplu: container cilindric



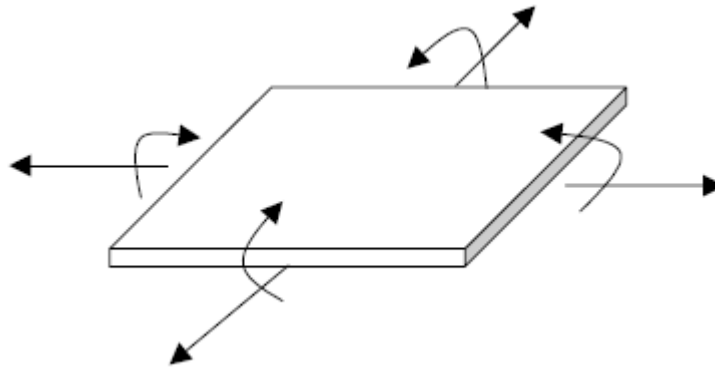
Eforturi secționale



Eforturile în planul median sunt dominante

Eforturi secționale în elementele de cupolă

Eforturi în planul median(stare plană de eforturi) + Eforturi de încovoiere

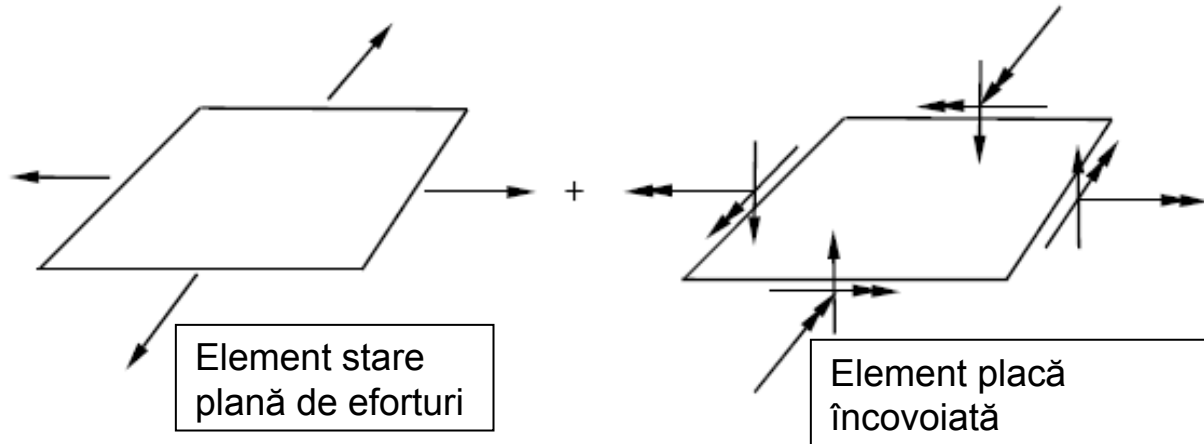


Teorii specifice cupolelor

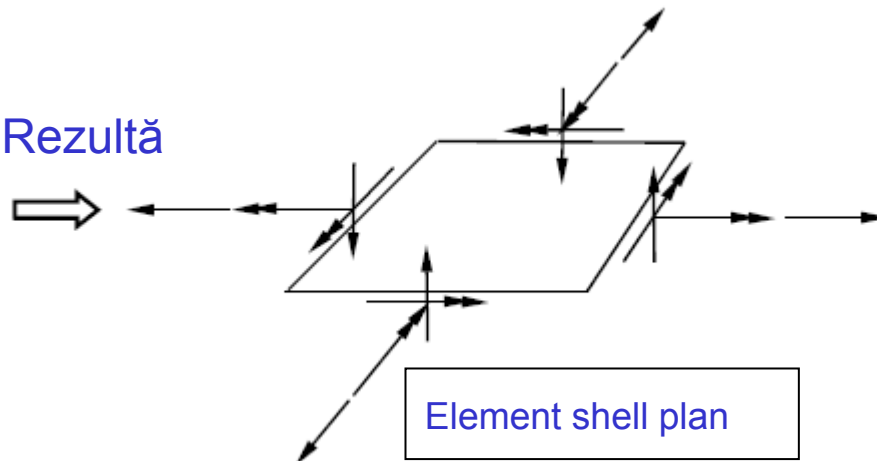
- ✓ Teoria plăcilor curbe subțiri
- ✓ Teoria plăcilor curbe groase

Teoria plăcilor curbe este cea mai complexă formulare din Mecanica structurilor

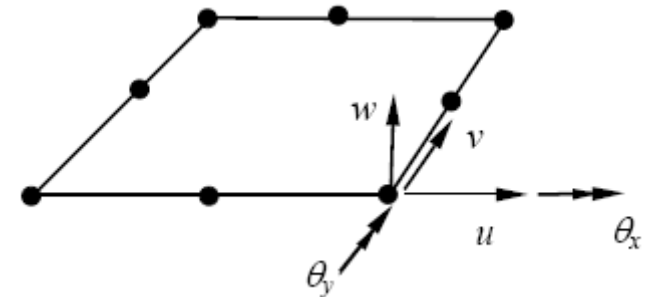
Elemente finite shell plane



Rezultă



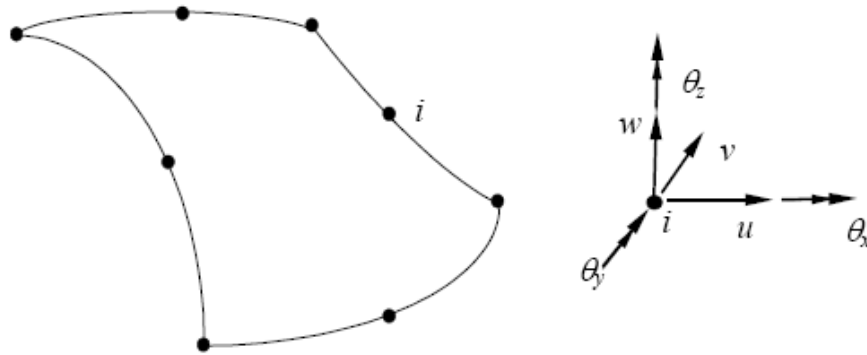
Grade de libertate pe nod:



Similar s-a obținut elementul general de grindă:

Element de bară combinat Element de grindă = Element general de grindă

Elemente finite shell curbe



- ✓ Dezvoltate în baza teoriei plăcilor curbe (subțiri/groase)
- ✓ Formulări teoretice complexe
- ✓ Rprezintă forma generală a elementelor de placă curbă (shell)

Teste specifice ce acuratețe și convergență:

