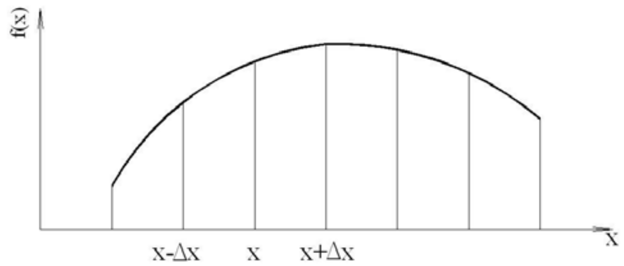
LECŢIA 1: INTRODUCERE

1.1. Definirea disciplinei TLE

Abrevieri: **TLE** = Teoria Lineară a Elasticităţii
TNE = Teoria Nelineară a Elasticităţii
MSD = Mecanica Solidului Deformabil
RM = Rezistenţa Materialelor
MDF = Metoda Diferenţelor Finite
MEF = Metoda Elementelor Finite

- **Ex 1.1:** Explicaţi abrevierea **TLE** şi **TNE** cu exemplificare în **MDF**.(vezi anexa A)

Serie Taylor $\leftarrow$ Reprezentarea funcţiilor după Taylor : Orice polinom p(x) de gradul n se poate reprezenta prin valorile derivatelor sale până la ordinal n, calculateă într-un punct arbitrar x. (fig. 1.1)



$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x)(\Delta x) +$$
$$+\frac{1}{2!} f''(x)(\Delta x)^2 + ... + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(\Delta x)^n +$$
$$+ rest$$

Fig. 1.1: Formula lui Taylor pentru polinoame algebrice

- **Definiţia 1:** Disciplina TLE este o ramură a Mecanicii Solidelui Deformabil (fig. 1.1) construită pe baza unui set de *aserţiuni* (A), astfel încât ea (disciplina) se constituie intr-un model fizico-matematic COMPLET al ştiinţei.

- *Com:* TLE este primul **model complet** al ştiinţei; notaţie: ~ 1800(anul aproximativ);
  ~1890 – TLE – aprox. primul model complet al ştiinţei;
  ~1895 – Modelul electrodinamicii (Maxwell);
  Nu există încă al III-lea **model complet**!

- *Com:* **un model complet**:
  - asigură **existenţa** soluţiei;
  - asigură **unicitatea** soluţiei;
  - oferă **algoritmii** de obţinere a soluţiei:
    - soluţii exacte – cu formule de calcul;
    - soluţii numerice – prin calcul automat.

- *Com:*
  - TLE : $f(x+\Delta x) \cong f(x) + \frac{1}{1!} f'(x)(\Delta x)$ (se reţin în calcule numai creşterile lineare)
  - TNE : $f(x+\Delta x) \cong f(x) + \frac{1}{1!} f'(x)(\Delta x) + \frac{1}{2!} f''(x)(\Delta x)^2 + ... + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(\Delta x)^n$

1.2. Modelul matematic al MDS; caz particular: TLE

- **(S)** STUDIUL (ASPECTUL) STATIC AL PROBLEMEI
- **(G)** STUDIUL (ASPECTUL) GEOMETRIC AL PROBLEMEI
- **(F)** STUDIUL (ASPECTUL) FIZIC AL PROBLEMEI (PROPRIETĂŢILE CONSTITUTIVE ALE MATERIALULUI); în TLE: proprietăţile constitutive sunt **linear elastice**.

  SINTEZA **(G) + (F)**

  SINTEZA **(S) + (G) + (F)** $\Rightarrow$ SISTEMUL COMPLET DE ECUAŢII AL MDS (în particular: al TLE)

- *Com:* Acelaşi procedeu şi pentru RM ($\equiv$ caz particular al TLE din punctual de vedere al modelării matematice)

1.3 Starea de tensiune $\tilde{\sigma}$; reprezentare geometrică şi matematică

a)Starea de tensiune în vecinătatea unui punct P (fig. 1.2)

P: - punct material în Mecanica teoretică;

P : -particulă materială în Mecanica Solidului (= pct. material + dV).

- *Com* : pentru o mai bună înţelegere a tehnicii de notare: vezi RM (Timoshenko).

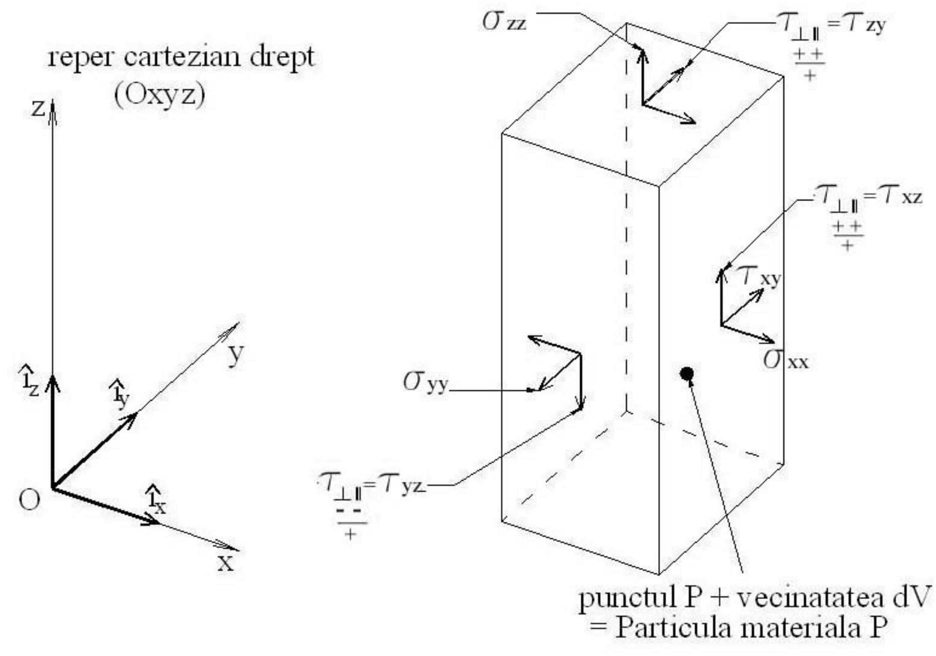


Fig. 1.2: Starea de tensiune: tensorul stării de tensiune $\tilde{\sigma}$

$\tilde{\sigma}$ = tensorul stării de tensiune se defineşte utilizeând matricea stării de tensiune $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \tilde{\sigma} = \underline{\hat{i}}^{T} \otimes \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\hat{i}}$$

b) Convenţia de notare şi de semn algebric (Timoshenko)

$\sigma_{\perp II}$ sau $\tau_{\perp II}$ sunt notaţii în care indicii au următoarele semnificaţii:

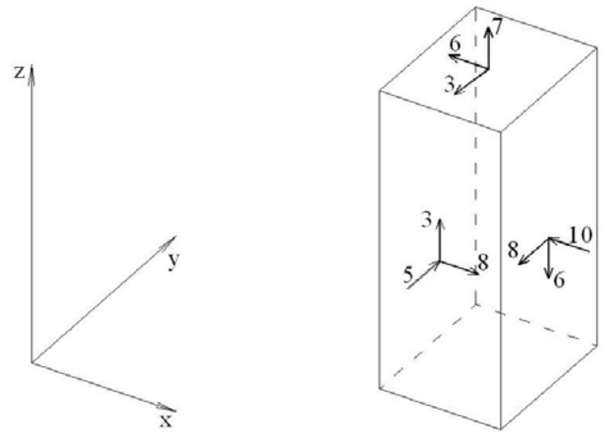
- $\perp$ = indicele axei normale;
- II = indicele axei paralele.

➢ *Com* : $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)_{R.M} \equiv (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz})_{TLE}$ şi au valori:

- pozitive (+) pentru întindere;
- negative (-) pentru compresiune.

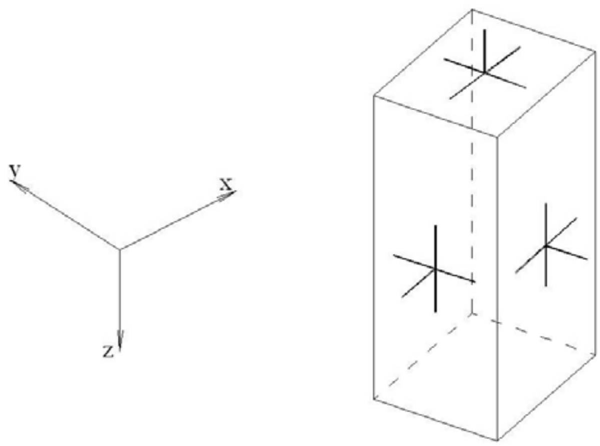
Regula asigură automat *principiul dualităţii* tensiunilor tangenţiale.

➢ **Ex 1.2** Se cunoaşte reprezentarea geometrică a unei stări de tensiune; să se prezinte entităţile $\underline{\underline{\sigma}}$ şi $\tilde{\sigma}$ (fig. 1.3). Analog, se cunoaşte reprezentarea mathematică (matricială) a unei stări de tensiune; să se realizeze prezentarea geometrică(fig.1.4).



$$\underline{\underline{\sigma}} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \qquad \tilde{\sigma} = ?$$

Fig. 1.3: Date: starea de tensiune (reprezentare geometrică); Se cer: $\underline{\underline{\sigma}}$ şi $\tilde{\sigma}$.



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ & -8 & -3 \\ sim & & 7 \end{bmatrix}$$

Fig. 1.4: Date: starea de tensiune (reprezentare matematică); Se cere: reprezentarea geometrică.

➢ **Definiţia 2:** Se numeşte tensorul stării de tensiune $\tilde{\sigma}$ entitatea matematică:

$$\tilde{\sigma} = \underbrace{\sigma_{xx}\hat{i}_x \otimes \hat{i}_x + \tau_{xy}\hat{i}_x \otimes \hat{i}_y + \tau_{xz}\hat{i}_x \otimes \hat{i}_z + \tau_{yz}\hat{i}_y \otimes \hat{i}_z + \ldots + \sigma_{zz}\hat{i}_z \otimes \hat{i}_z}_{\text{a } 3^2 = 9 \text{ termeni}} \qquad (1)$$

➢ **Ex 1.3** Scrieţi relaţia de mai sus sub formă compactă (matriceală) astfel:

$\tilde{\sigma} = \underline{\hat{i}}^T \otimes \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\hat{i}}$ în două variante:

In două variante : $\tilde{\sigma} = \underbrace{\underline{\hat{i}}^T \otimes \underline{\underline{\sigma}}}_{oper1}\ \underbrace{\underline{\hat{i}}}_{oper2} \equiv \underbrace{\underline{\hat{i}}^T \otimes}_{oper2} \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\hat{i}}}_{oper`1}$

Verificaţi regula operaţiilor din calculul matricial :

Calculul matricial:

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}}$

$-\,asociativitatea..: DA.: \underline{\underline{A}} = \underbrace{(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}})}_{op1} \cdot \underbrace{\underline{\underline{D}}}_{op2} = \underbrace{\underline{\underline{B}} \cdot \underbrace{(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}})}_{op1}}_{op2}$

$-\,comutativitatea : NU : \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}}; \overline{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{D}} \Leftrightarrow \overline{A} \neq A$

➢ **Rezolvare : ex 1.3:** (de terminat, cu scriere detaliată şi completă)

Exemplu:

$$\tilde{\sigma} = \underbrace{\underline{\hat{i}}^T \otimes \underline{\underline{\sigma}}}_{op2} \cdot \underbrace{\underline{\hat{i}}}_{op1} = \underline{\hat{i}}^T \otimes \underbrace{\left[\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\hat{i}}\right]}_{3x1} = \underline{\hat{i}}^T \otimes \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}\hat{i}_x + \tau_{xy}\hat{i}_x + \tau_{xz}\hat{i}_z \\ \tau_{yx}\hat{i}_y + \sigma_{yy}\hat{i}_y + \tau_{yz}\hat{i}_y \\ \tau_{zx}\hat{i}_z + \tau_{zy}\hat{i}_z + \sigma_{zz}\hat{i}_z \end{Bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\left[\hat{i}_x \hat{i}_y \hat{i}_z\right]}_{\left[\underline{\hat{i}}^T\right]}}_{(1x3)} \otimes \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}\hat{i}_x + \tau_{xy}\hat{i}_x + \tau_{xz}\hat{i}_z \\ \tau_{yx}\hat{i}_y + \sigma_{yy}\hat{i}_y + \tau_{yz}\hat{i}_z \\ \tau_{zx}\hat{i}_z + \tau_{zy}\hat{i}_z + \sigma_{zz}\hat{i}_z \end{Bmatrix}}_{(3x1)}}_{(1x1)=\tilde{\sigma}} =$$

$$= \hat{i}_x \otimes \sigma_{xx}\hat{i}_x + \cdots\cdots \equiv \sigma_{xx}\hat{i}_x \otimes \hat{i}_x \cdots\cdots \Rightarrow rel \ (1)$$

unde :

$\hat{i}_x = versor$

$\sigma_{xx} = scalar$

PROPRIETĂŢILE OPERATORULUI ⊗ (PRODUS TENSORIAL)

Aceste operaţii se regăsesc examinând următoarele simboluri (operatori algebrici) şi operaţii cu versorii bazei canonice:

- • produs scalar
- × produs vectorial
- ⊗ produs tensorial

-ordinea de prioritate a operaţiilor

$$\hat{i}_x \otimes \sigma_{xx}\hat{i}_x = \sigma_{xx}\hat{i}_x \otimes \hat{i}_x$$

Exemple cu operaţii între versori : $\underbrace{\hat{i}_y \cdot \hat{i}_y}_{op1=1} \otimes \underbrace{\hat{i}_z \times \hat{i}_x}_{op2=i_y} = 1 \otimes \hat{i}_y = \hat{i}_y$

➢ *Com:* ⊗ are efect numai asupra versorilor, exemplu:

$$\underbrace{\hat{i}_x \times \hat{i}_y}_{op1=i_z} \otimes \sigma_{zz}\hat{i}_z = \hat{i}_z \otimes \sigma_{zz}\hat{i}_z = \sigma_{zz}\hat{i}_z \otimes \hat{i}_z$$

- **Ex: 1.4**

$$\hat{i}_y \times \hat{i}_z \otimes \tau_{xy} \hat{i}_y \cdot \hat{i}_x = ?$$

$$\hat{i}_z \times \hat{i}_y \otimes \sigma_{xx} \hat{i}_x = ?$$

$$\underbrace{\underbrace{\hat{i}_x \times \hat{i}_y}_{op2} \otimes \tau_{yx} \underbrace{\hat{i}_y \cdot \hat{i}_x}_{op1}}_{op3} = ?$$