LECŢIA 3: STUDIILE (S)$_{\text{tensor.}}$,(G),(F)

3.1. Studiul (S) $_{\text{tensor}}$ [studiul (S) în prezentare tensorială]

- **Ex:3.1:** Arătaţi că **(S1)** $_{\text{tens.}}$ $\vec{\nabla}\cdot\tilde{\sigma}+\rho\vec{f}=\vec{0}$ [(= prezentarea tensorială a studiului **(S1)**]

Indicaţie:

$$\vec{\nabla}\cdot\tilde{\sigma}=\underline{\partial}^T\,\underline{\hat{i}}\cdot\underline{\hat{i}}^T\otimes\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\hat{i}}=\underline{\partial}^T\,\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\hat{i}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix}}_{(1x3)}\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}}_{(3x3)}\underbrace{\begin{Bmatrix}\hat{i}_x\\ \hat{i}_y\\ \hat{i}_z\end{Bmatrix}}_{3x1}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix}\underbrace{\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\hat{i}_x+\tau_{xy}\hat{i}_y+\tau_{xz}\hat{i}_z\\ \tau_{yx}\hat{i}_x+\sigma_{yy}\hat{i}_y+\tau_{yz}\hat{i}_z\\ \tau_{zx}\hat{i}_x+\tau_{zy}\hat{i}_y+\sigma_{zz}\hat{i}_z\end{Bmatrix}}_{3x1}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx}\hat{i}_x+\tau_{xy}\hat{i}_y+\tau_{xz}\hat{i}_z\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}\hat{i}_x+\cdots)+\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}\hat{i}_x+\cdots)=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\hat{i}_x+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\hat{i}_y+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\hat{i}_z+\cdots+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\hat{i}_z=$$

$$=\left[\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\hat{i}_x+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\hat{i}_y+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\hat{i}_z\right]+\left[\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\hat{i}_x+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}\hat{i}_y+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\hat{i}_z\right]+\left[\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\hat{i}_x+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\hat{i}_y+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\hat{i}_z\right]=$$

$$=\left[\frac{\partial\sigma_{xx}}{\sigma x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right]\hat{i}_x+\left[\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right]\hat{i}_y+\left[\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial_y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right]\hat{i}_z$$

Prin urmare, $\forall\quad \underline{i}^T=\left[\hat{i}_x,\hat{i}_y,\hat{i}_z\right]\Rightarrow$ Studiul **(S$_1$)** se scrie, în formulare tensorială, astfel:

(S$_1$)$_{\text{tens}}$: $$\vec{\nabla}\cdot\tilde{\sigma}+\rho\vec{f}=\vec{0}\Leftrightarrow.\begin{cases}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\rho f_x=0\Rightarrow pe\quad directia.\ \hat{i}_x\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\rho f_y=0\Rightarrow pe\quad directia\ \ \hat{i}_y\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho f_z=0\Rightarrow pe\quad directia\ \ \hat{i}_z\end{cases}$$

Studiul **(S)** în formulare tensorială se scrie deci astfel:

(S1) $_{tens}\ \vec{\nabla}\cdot\tilde{\sigma}+\rho\vec{f}=\vec{0}\quad in\quad V$

(S2) $_{tens}\ \tilde{\sigma}^T=\tilde{\sigma}\quad in\ \ V\ \ si\ \ pe\ \ frontiera\ \ S_\sigma$

(S3) $_{tens}\ \vec{p}=\hat{n}\cdot\tilde{\sigma}\quad pe\quad frontiera\ \ S_\sigma$

3.2. Studiul geometric **(G)** în formulare tensorială şi matriceală

Introducere: Studiul **(G)**

(G1) $\underline{\varepsilon}_{(6x1)} = \underline{\underline{D}}_{6x3} \cdot \underline{u}_{3x1}$ (vezi par. 3.3)

(G2) $\vec{\nabla} \times \tilde{\varepsilon} \times \vec{\nabla} = \vec{0} \Rightarrow \underline{\underline{B}}_{6x6}\underline{\varepsilon}_{6x1} = 0_{(6x1)}$ (vezi par. 3.4)

(G3) Condiţiile la limită scrise în variabilele studiului geometric (vezi par. 3.5)

- ***Com*:**Se ocupă cu analiza geometrică a deformaţiilor specifice; şi construiţi operatorul

$$\underline{\underline{B}}^{T}_{2DIM} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}_{3x1}$$

- *Com:* - deformare – fenomen fizico - mecanic
  - deformaţie specifică = o măsură a deformaţiei

$\varepsilon_{xx,} \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ = deformaţii specifice longitudinale (liniare)

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ = deformaţii specifice unghiulare (de lunecare)

- **Ex.3.2:** Din RM ilustraţi deformaţiile specifice dezvoltate în planul xoy

Indicaţie (fig. 3.1)

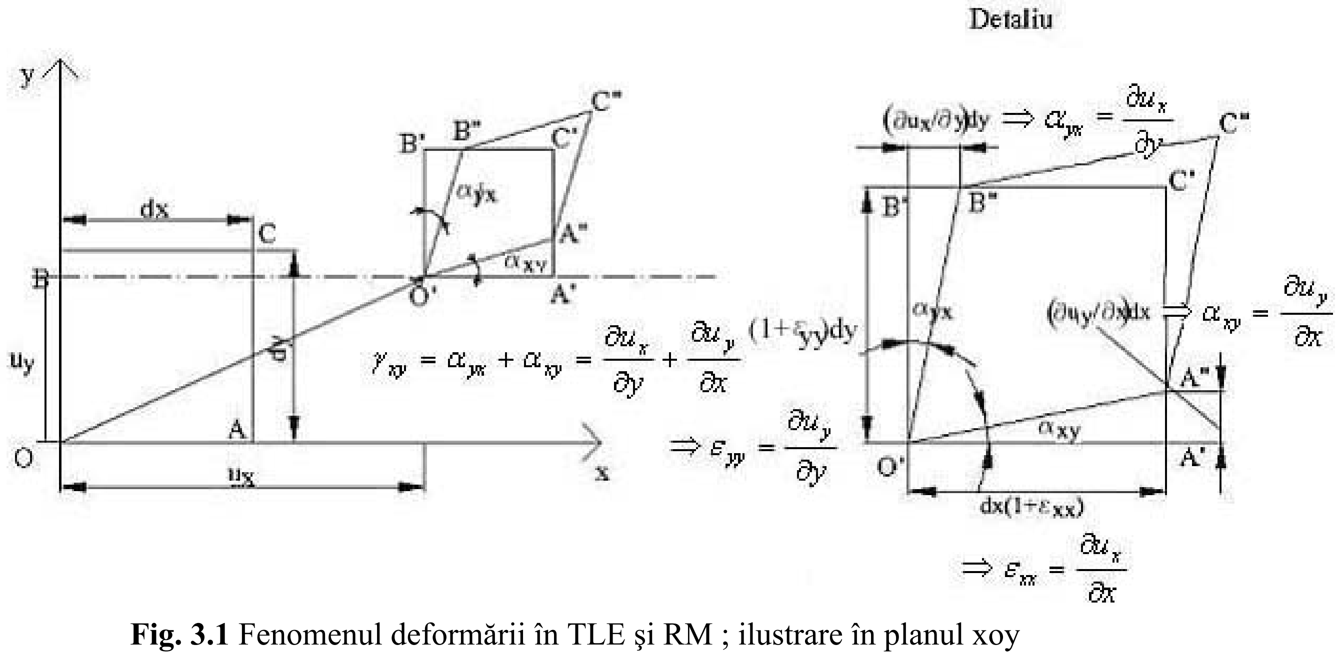

Fig. 3.1 Fenomenul deformării în TLE şi RM ; ilustrare în planul xoy

- *Com* : OO' = $\vec{u} = u_x \hat{i}_x + u_y \hat{i}_y$ = vectorul deplasare în planul xoy

OABC $\Rightarrow$ O'A'B'C' –procesul deformaţiei – faza1(translaţie)

O'A''B''C''- fenomenul de deformaţie propriu-zisă :tensorul $\tilde{\varepsilon}$ - faza II

(deformaţie)

$\widetilde{\varepsilon} =$ tensorul deformaţiei specifice.

Definim deformaţiile specifice liniare astfel: $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}$; $\varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial y}$;

Definim deformaţiile specifice unghiulare γ_{xy} ca fiind măsura (mărimea) cu care se modifică unghiul $\alpha = 90^0$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \alpha_{xy} + \alpha_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \Rightarrow \alpha_{xy} = \alpha_{yx} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\widetilde{\varepsilon}_{2DIM}}_{R.M} = \varepsilon_{xx}\hat{i}_x \otimes \hat{i}_x + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\hat{i}_x \otimes \hat{i}_y + \frac{1}{2}\gamma_{yx}\hat{i}_y \otimes \hat{i}_x + \varepsilon_{yy}\hat{i}_y \otimes \hat{i}_y =$$

$$= \left[\hat{i}_x \hat{i}_y\right] \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_y & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{i}_{xx} \\ \hat{i}_{iy} \end{Bmatrix} = \underline{\hat{i}}^T \otimes \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\hat{i}}$$

Pe baza acestui rezultat se defineşte tensorul deformatei specifice în TLE- 3DIM; $\widetilde{\varepsilon}_{3DIM}$ şi matricea deformaţiilor specifice $\underline{\underline{\varepsilon}}_{3x3}$:

$$\widetilde{\varepsilon}_{3DIM} = \underline{\hat{i}}^T \otimes \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\hat{i}} = \underbrace{\varepsilon_{xx}\hat{i}_x \otimes \hat{i}_x + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\hat{i}_x \otimes \hat{i}_y + \ldots + \varepsilon_{zz}\hat{i}_z \otimes \hat{i}_z}_{3x3=9\,termeni} \Rightarrow \underset{(3x3)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

3.3. (G1) Relaţii diferenţiale între deformaţiile specifice şi deplasări (Saint Venant ~ 1860)

(G1)$_{\mathbf{3DIM}}$: $\underline{\varepsilon}_{(6x1)} = \underline{\underline{D}}_{(6x3)} \cdot \underline{u}_{(3x1)}$

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \\
------ \\
\gamma_{xy} = \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x} \\
\gamma_{yx} = \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y} \\
\gamma_{zx} = \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}
\end{cases}
\Rightarrow
\underbrace{\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\
0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\
--- & - & - \\
\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\
0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\
\dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x}
\end{bmatrix}}_{D(6x3)}
\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ --- \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}
\begin{matrix} \textit{deformatii specifice liniare} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \textit{deformatii specifice ungiulare} \end{matrix}
$$

- *Com* : **(G1)** A se observa prezenţa operatorului diferenţial $\underline{\underline{D}}^T$ în **(S1)** şi a lui $\underline{\underline{D}}$ în **(G1).**

- **Ex. 3.3:** Definiţi (cu figura asociată) deformaţiile specifice din $\underline{\varepsilon}_{6x1}$, în planele xoy,xoz,yoz .

Indicaţie: se va urma exemplificarea realizată în planul xoy (cazul 2DIM) din fig. 3.1.

3.4. Studiul **(G2).** ecuaţiile de compatibilitate între deformaţiile specifice $\tilde{\varepsilon}$ (Saint Venant)

- *Com* **: fig.3.2**

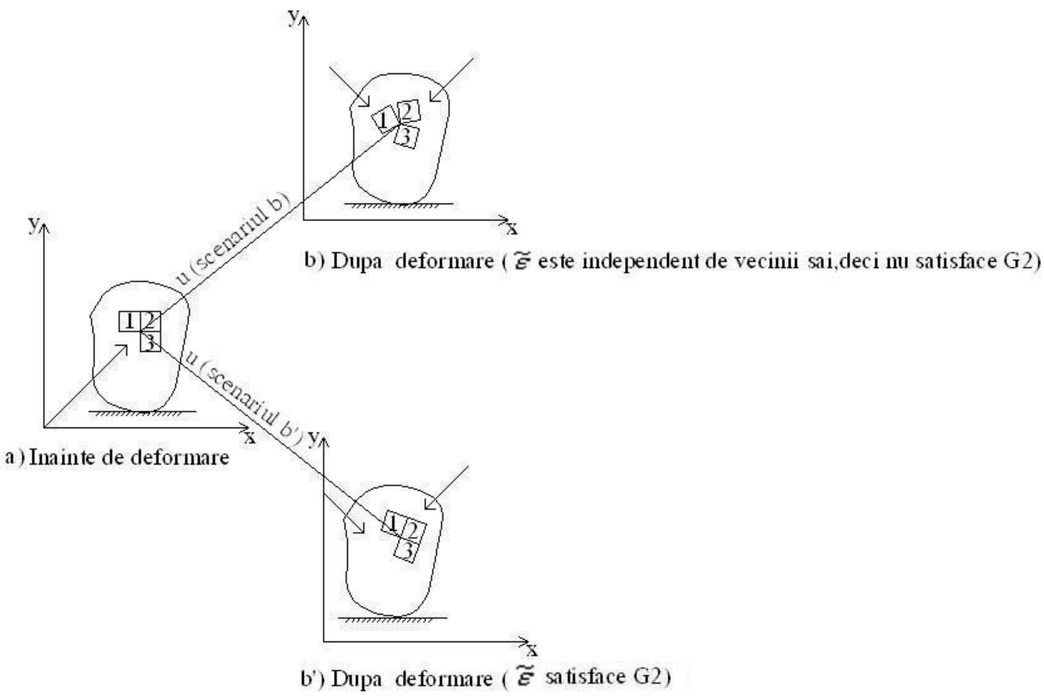

Fig. 3.2. Studiul **(G2):** ilustrarea condiţiilor de compatibilitate impuse deformaţiilor specifice (componentele tensorului $\tilde{\varepsilon}$)

În scenariul b' corpul deformat rămâne continuu. De aceea câmpul deplasare $\vec{u}(x,y,z)$ şi deformaţiile specifice $\tilde{\varepsilon}$ trebuie să satisfacă anumite condiţii matematice, exprimate astfel:

(G1)tensorial $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \tilde{\varepsilon} \times \vec{\nabla} = \vec{0} \quad \Rightarrow$ **(G2)** **matrical**: $\underline{\underline{B}}_{6x6}\underline{\varepsilon}_{6x1} = \underline{0}_{6x1}$

- **Ex. 3.4** Dezvoltaţi $\vec{\nabla} \times \tilde{\varepsilon} \times \vec{\nabla}$ şi arătaţi că rezultatul se poate scrie sub forma matriceală în care $\underline{\underline{B}}$ este operator diferenţial de ordinul II (conţine $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}, etc.$)

În cazul $2Dim$ (sau 2D) operatorul diferenţial $\underline{\underline{B}}$ se obţine pe cale directă astfel: **(G2)**2Dim

$$\left.\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} ----\rightarrow \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^3 u_x}{\partial y^2 \partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial y} ----\rightarrow \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x} --\rightarrow \dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \dfrac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} \end{cases}\right\}_{(G2)2D} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{B}}_{(1x3)} \underline{\varepsilon}_{(3x1)} = \underline{0}_{(1x1)}$$

unde s-a notat: $\underbrace{\underline{\underline{B}}_{2Dim}}_{(1x3)} \left[\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right]_{(1x3)}$ şi $\underline{\underline{B}}^T_{2DIM} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \dfrac{2}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}_{3x1}$

- *Com*: În cazul 3Dim studiul **(G2)** impune condiţia $\tilde{I}_{nk} = \tilde{0}$, unde $\tilde{I}_{nk}$ defineşte **tensorul de de incompatibilitate** (germană:InkÖmpatibilitat):
$\tilde{I}_{nk} = \vec{\nabla} \times \bar{\varepsilon} \times \vec{\nabla} = \underbrace{\hat{\underline{i}}^T}_{(1x3)} \otimes \underbrace{\underline{I}_{nk}}_{(3x3)} \underbrace{\hat{\underline{i}}}_{(3x1)}$

Se poate demonstra apoi că $\underbrace{\underline{\underline{I}}_{nk}}_{(3x3)}$ este o matrice simetrică, deci conţine numai 6 componente distincte, ordonate astfel:

$$\underline{I_{nk}}_{(6x1)} = \begin{Bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ \ldots\ldots \\ B_{12} \\ B_{23} \\ B_{31} \end{Bmatrix}_{(6x1)} = \underline{\underline{B}}_{(6x6)} \underline{\varepsilon}_{(6x1)}$$, astfel încât: **(G2)$_{\mathbf{3Dim}}$** : $\begin{cases} \Rightarrow \tilde{I}_{nk} = \vec{\nabla} \times \tilde{\varepsilon} \times \vec{\nabla} = \tilde{0} (tensorial) \\ \Rightarrow \underline{\underline{B}}_{(6x6)} \underline{\varepsilon}_{(6x1)} = \underline{0}_{(6x1)} (matriceal). \end{cases}$

3.5. Studiul (**G3**) condiţiile la limită (de rezemare,frontieră)scrise în variabilele studiului geometric (deformaţii specifice şi deplasări)

Exemple: RM, Statica Construcţiilor, TLE (fig. 3.3)

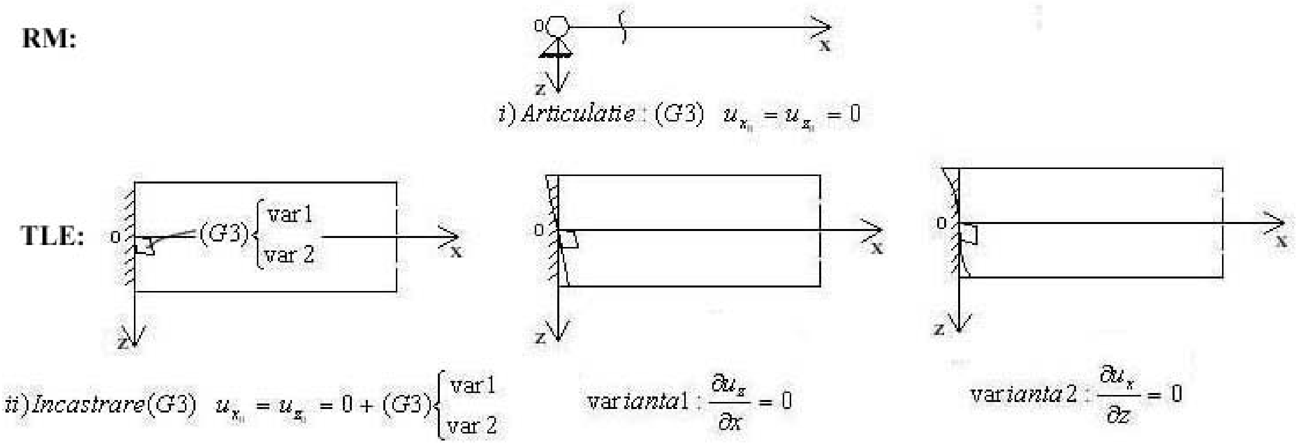

Fig. 3.3 Studiul **(G3)** pentru: i) RM şi Statica Construcţiilor; ii) TLE (în două variante).

VARIANTA 1 **VARIANTA 2**

VARIANTA 1

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} \neq 0 \Rightarrow nerelevant$$

$$\frac{\partial uz}{\partial x} = \alpha_{zy} = 0;$$

VARIANTA 2

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} \neq 0 \Rightarrow nerelevant$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \alpha_{xz} = 0$$

$$\textbf{(G3)}_{\textbf{var1}} = \begin{cases} u_{x_0} = 0 \\ u_{y_0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right|_0 = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(G3)}_{\textbf{var2}} \begin{cases} u_{x_0} = 0 \\ u_{y_0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right|_0 = 0 \end{cases}$$

- **Concluzie:** Studiul **(G3)** condiţiile la limită în puncte (zone) de frontieră S_u a solidului deformabil, astfel:

(G3) $\vec{u}/_{S_u} = \vec{0}$ şi eventual derivate parţiale de tipul, $\dfrac{\partial u_x}{\partial y} = 0$

Se introduc noţiunile : (fig. 3.4)

S_σ = frontiera pe care se cunosc încărcările $\vec{p}_n$ şi pe care se scriu condiţiile **(S3)**

S_u= frontiera pe care se cunosc deplasările şi/sau deriv. funcţiei $\vec{u}/_{S_u} = 0$ şi pe care se scriu condiţiile la limită **(G3)**

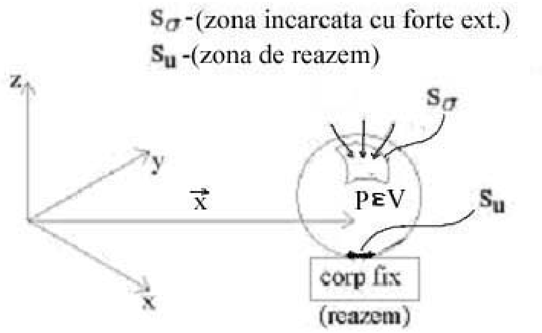

Fig. 3.4: Frontiera solidului deformabil $S = S_\sigma \cup S_u$; cu proprietatea $S_\sigma \cap S_u = 0$.

Solid deformabil V şi frontiera sa $S = S_\sigma \cup S_u \rightarrow \vec{x}$ =vectorul de poziţie al particulei $P \in V$.
(G3) $S = S_\sigma \cup S_u \rightarrow si \rightarrow S_\sigma \cap S_u = 0...(\forall)$ x= un punct astfel pe frontiera (conturul) unui solid deformabil; el trebuie să aparţină unuia din cele două tipuri de frontieră S_u sau S_σ .

- *Com:* În teoria ecuaţiilor cu diferenţiale **(S3)** şi **(G3)** introduc **condiţiile la limită** ale problemei TLE.

- **Ex. 3.5:** Examinaţi studiile **(S3)** şi **(G3)** pentru exemplele de mai jos, precizând frontierele S_σ şi S_u .

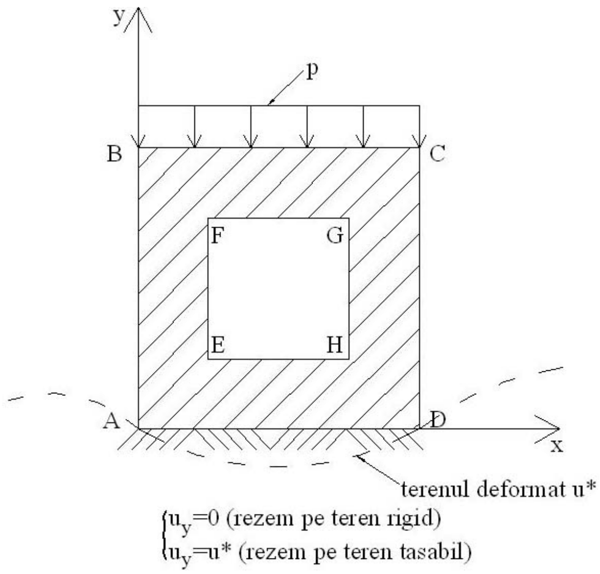

Fig. 3.5

Rezolvare:

(S3): $\underbrace{\overline{BC}}_{(p_n=p)} \underbrace{\cup \overline{AB} \cup \overline{CD} \cup \overline{EF} \cup \overline{FG} \cup \overline{GH} \cup \overline{EH}}_{(p_n=0)} = S_\sigma$

(G3): $AD = S_u (ex: u_y(x,0) = u_y^{teren} \Rightarrow u\big|_{S_u} = u^* (= u_y^{teren}$ în exemplul din ex. 3.5)

3.6. Studiul (F) legea generalizată a lui Hooke (numai prezentare matriceală; dezvoltare în lecţia 4)

(F) $\underline{\sigma}_{(6x1)} = \underline{\underline{E}}_{(6x6)} \cdot \varepsilon_{(6x1)}$ $\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{E}}^{-1}{}_{(6x6)} =$ matricile constantelor elastice (în total: 6x6=36 constante)

(F^{-1}) $\underline{E} = \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \underline{\sigma}$ [Caz particular: corp izotrop: E(Young), coeficientul Poisson$\Rightarrow$2 constante]

3.7. SINTEZA MODELULUI MATEMATIC AL TLE (3Dim) ÎN FORMULARE MATRICEALĂ

Număr de ecuaţii	Număr de necunoscute
(S1) 3 ecuaţii diferenţiale de echilibru **(S2)** 3 ecuaţii de momente (relaţii de dualitate) **(S3)** $\in S_\sigma$ nu introduce necunoscute noi	$\left.\begin{array}{l}\underline{\underline{\sigma}}_{3\times 3} \\ \underline{\underline{\sigma}}^T = \underline{\underline{\sigma}}\end{array}\right\} \Rightarrow 6$ *necunoscute* ---------

(G1) 6 ecuaţii (relaţii) între deformaţiile specifice şi deplasări **(G2)** 6 relaţii de compatibilitate **(G3)** $\in S_u$ nu introduce necunoscute noi	$\begin{cases} \underline{u}_{3\times 1}, \ \underline{\varepsilon}_{6\times 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow 9 necunoscute \end{cases}$ ---------
(F) 6 ecuaţii [sau ale studiului **(F⁻¹)**] $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\varepsilon}$; sau $\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \underline{\sigma}$ legea generalizată a lui Hooke	nu introduce necunoscute noi ($\underline{\sigma}_{(6\times 1)}$ *si* $\underline{\varepsilon}_{(6x1)}$) sunt deja numărate
TOTAL : 3 + 6 + 6 = 15 ecuaţii	TOTAL : 6 + 9 + = 15 necunoscute

Concluzie : 15 ec. şi 15 nec. în problemele 3D ale TLE

- *Com* : Studiul **(S1)** clasifică problemele TLE arătând că problema se numeşte interior static nedeterminată, definind GNI (gradul de nedeterminare interioară), astfel:
  -3 ecuaţii x 6 necunoscute ptr. 3 D $\Rightarrow GNI_{3DIM} = 3$
  -2 ecuaţii x 3 necunoscute ptr. 2 D $\Rightarrow GNI_{2DIM} = 1$