LECŢIA 4 : STUDIUL (F); FORMULAREA PROBLEMELOR ÎN TLE:
i. ÎN DEPLASĂRI (LAME)
ii. ÎN TENSIUNI (BELTRAMI – MITCHELL)

4.1. RM Curba caracteristică a unui material (fig.4.1)

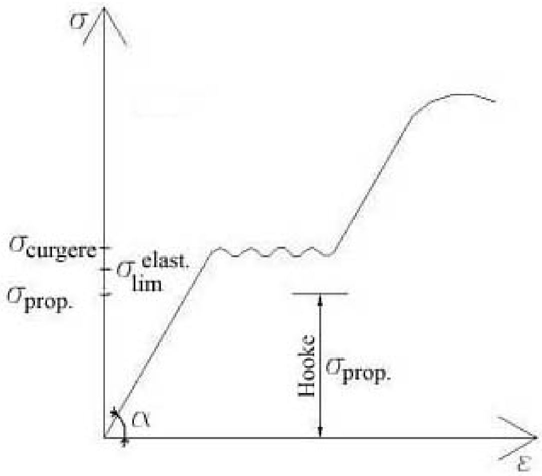

Fig. 4.1 Curba caracteristică a materialului OL37

$\sigma_{\lim}^{prop} = 1900 daN / cm^2$ limita de proporţionalitate
$\sigma_{\lim}^{el} = 2100 daN / cm^2$ limita de elasticitate
$\sigma \le \sigma_{\lim}^{el}$ se adoptă în TLE
$E = tg\alpha =$ modulul de elasticitate longitudinal (modulul lui Young)

RM : studiile **(F)** şi **(F^{-1})**

(F) $\sigma = E \cdot \varepsilon$ (legea lui Hooke)

(F^{-1}) $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$

Pentru corpul izotrop se utilizează următoarele trei caracteristici de material (din care numai 2 sunt independente):

$G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$: relaţiile între G, υ şi E pentru solidul izotrop în care :

G = modulul de elasticitate transversal
υ = coeficientul Poisson

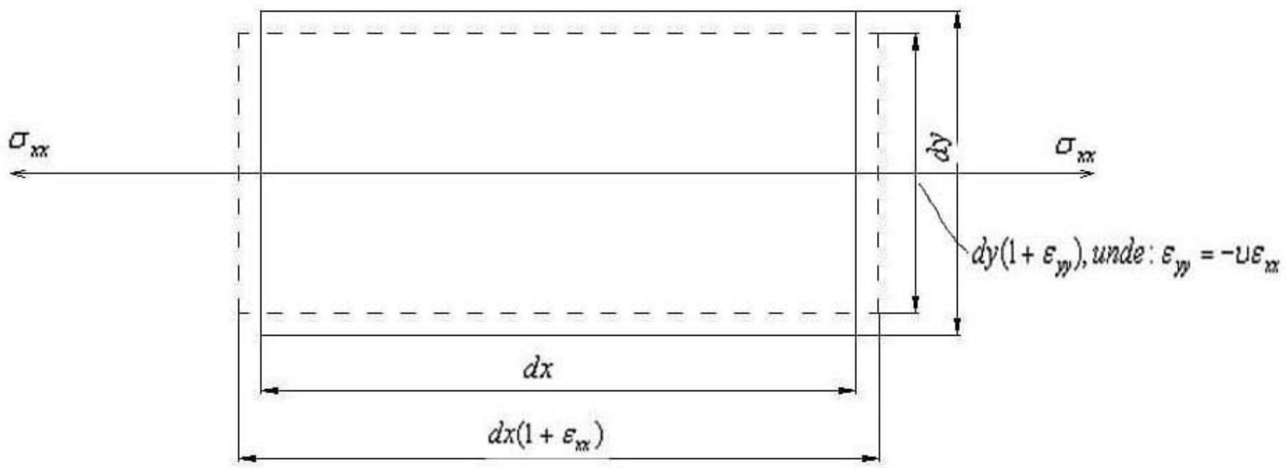

Fig. 4.1 (Detaliu): Tensiuni şi deformţii specifice în cazul 1Dim, efectul Poisson

- **Ex: 4.1:**

Date : E = 2,1 x 10^6 daN/ cm^2

$\sigma_{\lim}^{el} = 2100 daN/cm^2 = \sigma_{xx}$

$\upsilon = 0,3$

Se cer mărimile : $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$

Indicaţie: (fig. 4.1 detaliu) :$\varepsilon_{xx} = \dfrac{\sigma_{xx}}{E}; \varepsilon_{yy} = -\upsilon \cdot \varepsilon_{xx}$

4.2. Studiul (F^{-1})

(F) : $\underline{\sigma} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\varepsilon}$ (legea generalizată a lui Hooke) ; dar pentru a o obţine, încvepem cu:

Legea inversă a lui Hooke

(F^{-1}) : $\underline{\varepsilon_{6X6}} = \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \underline{\sigma}_{6x1}$

Pentru studiul **(F^{-1})** facem raţionamentul din fig. 4.2 pe material **ORTOTROP**

1. E1 , E2, E3 – moduli de elasticitate pe cele 3 direcţii de ortotropie, $\hat{1},\hat{2},\hat{3}$, notate:
   direcţia 1 = $\hat{i}_x$
   direcţia 2 = $\hat{i}_y$
   direcţia 3 = $\hat{i}_z$
2. $\upsilon_{12}, \upsilon_{21}, \upsilon_{23}, \upsilon_{32}, \upsilon_{31}, \upsilon_{13}$ sunt coeficienţii Poisson ai materialului;
3. G_{12}, G_{23}, G_{31} sunt modulii de elastcitate transversali ai materialului ; se adoptă relaţia de dualitate $G_{ij} = G_{ji}$.

În total, corpul cu ortotropie generală conţine 12 constante; cu relaţia de dualitate, numărul constantelor se reduce la 9.

cauză / efect	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}
ε_{xx}	$\frac{1}{E_1}$	$-\frac{\upsilon_{12}}{E_2}$	$-\frac{\upsilon_{13}}{E_3}$
ε_{yy}	$-\frac{\upsilon_{21}}{E_1}$	$\frac{1}{E_2}$	$-\frac{\upsilon_{23}}{E_3}$
ε_{zz}	$-\frac{\upsilon_{31}}{E_1}$	$-\frac{\upsilon_{32}}{E_2}$	$\frac{1}{E_3}$

cauză / efect	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}
γ_{xy}	$\frac{1}{G_{12}}$	0	0
γ_{yz}	0	$\frac{1}{G_{23}}$	0
γ_{zx}	0	0	$\frac{1}{G_{31}}$

Fig. 4.2: Relaţii cauză - efect (= relaţii constitutive) pentru materialul ortotrop.

Condiţii de ortotropie simetrică; materialul izotrop.

$$\begin{cases} \frac{\upsilon_{12}}{E_2} = \frac{\upsilon_{21}}{E_1} \\ \frac{\upsilon_{13}}{E_3} = \frac{\upsilon_{31}}{E_1} \Rightarrow \upsilon_1^*, \upsilon_2^*, \upsilon_3^* = \ldots\ldots\ldots \text{(există diferite teorii de modelare a acestor mărimi)} \\ \frac{\upsilon_{23}}{E_3} = \frac{\upsilon_{32}}{E_2} \end{cases}$$

Se pot concepe 3 coeficienţi Poisson echivalenţi $\upsilon_1^*, \upsilon_2^*, \upsilon_3^*$ astfel încât corpul ortotrop este definit cu 9 constante.

- **Ex. 4.2:** Scrieţi relaţia cauză - efect din pentru materialul izotrop : $E_1 = E_2 = E_3 = E$ $\upsilon_1^* = \upsilon_2^* = \upsilon_3^* = \upsilon$; materialul izotrop este definit cu numai 2 constante de material.
- *Com:* $G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$ (modulul transversal rezultă pe baza **relaţiei de izotropie**).

Studiul **(F^{-1})** se scrie în cazul cel mai general, în formulare matriceală, astfel:

$$\textbf{(F1)}\quad \underline{\varepsilon} = \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \quad \text{unde} \quad \underline{\underline{E}}^{-1}{}_{6x6} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} --- & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} --- & E_{26} \\ -- & - & - \;\; - & - \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} --- & E_{66} \end{bmatrix}$$

- *Com*: Cazul general conţine 6 x 6 = 36 constante de material.

- **Ex. 4.3:** Scrieţi prin simetrizare şi particularizare, (material ortotrop; material; izotrop) matricea $\underline{\underline{E}}^{-1}$ pentru material definit prin 21;12; 9; 2 constante de material.

$$\underline{\underline{E}}^{-1}_{6x6}\,|_{simetrizare}\; Emn = Enm \Rightarrow 21 \text{ constante de material}$$

$$\underline{\underline{E}}^{-1}_{6x6}\,|_{pentru.material.ortotrop} \Rightarrow 9 \text{ constante; (sau 12 constante)}$$

$$\underline{\underline{E}}^{-1}_{6x6}\,|_{pt.material.izotrop} \Rightarrow 2 \text{ constante de material}$$

Exemplu: legea **(F^{-1})** pentru un material ortotrop definit prin 9 constante de material, cosiderând $\upsilon_1^* = \upsilon_2^* = \upsilon_3^* = \upsilon^*$:

$$\underline{\varepsilon}_{(6x1)} = \underline{\underline{E}}^{-1}_{(6x6)} \cdot \underline{\sigma}_{(6x1)} \,|_{ortotrop} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\upsilon^*}{E_2} & -\frac{\upsilon^*}{E_3} & | & & & \\ -\frac{\upsilon^*}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\upsilon^*}{E_3} & | & & \underline{\underline{0}}_{(3x3)} & \\ -\frac{\upsilon^*}{E} & -\frac{\upsilon^*}{E_2} & \frac{1}{E_3} & | & & & \\ - & - & - & | & - & - & - \\ & & & | & \frac{1}{G_1} & 0 & 0 \\ & \underline{\underline{0}}_{(3x3)} & & | & 0 & \frac{1}{G_2} & 0 \\ & & & | & 0 & 0 & \frac{1}{G_3} \end{bmatrix}_{(6x6)} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ - \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}_{(6x1)}$$

- **Ex.4.4:** $\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{E}}^{-1} |_{izotrop} \, \underline{\sigma}$; $\underline{\underline{E}}^{-1} = 0$

Indicaţie: materialul este definit prin două constante: $E, \upsilon \rightarrow G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$)

4.3. Studiul **(F)**

$\underline{\sigma} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\varepsilon}, ...unde.....\underline{\underline{E}} = (\underline{\underline{E}}^{-1})^{-1}$

Se va prezenta numai cazul izotrop; în acest caz, expresia $\underline{\sigma} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\varepsilon}$ este conoscută ca fiind **legea generalizată a lui Hooke** (prin generalizarea expresiei din RM: $\sigma = E \cdot \varepsilon$).

- **Ex. 4.5:** $\underline{\underline{E}} |_{izotrop} = ?$

Rezolvare (parţială) : matricea $\underline{\underline{E}}^{-1}_{(6x6)}$ se scie prin utilizarea blocurilor $\underline{\underline{A}}_{(3x3)}$ şi $\underline{\underline{D}}_{(3x3)}$:

$$\underline{\underline{E}}^{-1} |_{izotrop} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\upsilon & -\upsilon & | & & & \\ -\upsilon & 1 & -\upsilon & | & & \underline{\underline{0}}_{(3x3)} & \\ -\upsilon & -\upsilon & 1 & | & & & \\ - & - & - & | & - & - & - \\ & & & | & 2(1+\upsilon) & & \\ & \underline{\underline{0}}_{(3x3)} & & | & & 2(1+\upsilon) & \\ & & & | & & & 2(1+\upsilon) \end{bmatrix} \stackrel{notatie}{=} \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_{(3x3)} & | & \underline{\underline{0}}_{(3x3)} \\ - & | & - \\ \underline{\underline{0}}_{(3x3)} & | & \underline{\underline{D}}_{(3x3)} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda+2G & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & & \underline{\underline{0}}_{(3x3)} & \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & & & G & & \\ & \underline{\underline{0}}_{(3x3)} & & & G & \\ & & & & & G \end{array}\right] \Rightarrow \underline{\underline{E}} = (\underline{\underline{E}}^{-1})^{-1} = \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{A}}^{-1} & \underline{\underline{0}}_{(3x3)} \\ - & - \\ \underline{\underline{0}}_{(3x3)} & \underline{\underline{D}}^{-1}{}_{(3x3)} \end{array}\right] =$$

Unde s-a notat cu λ, după Lamé (~1870)

$\lambda = \dfrac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$ = constanta lui Lamé; $G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$ = relaţii izotropie

Indicaţie: Calculul matriceal:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{d_{nn}} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{D}}^{-1} = \begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Ex. 4.6** Să se scrie $\underline{\underline{E}}_{(6x6)}\,|_{izotrop}$ folosind constantele Timosheko E şi υ:

Indicaţie: $\lambda + 2G = \dfrac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} + \dfrac{2E}{2(1+\upsilon)} = \lambda(1 + \dfrac{1-2\upsilon}{\upsilon}) = \lambda \cdot \dfrac{1-\upsilon}{\upsilon}$

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} = \frac{E\upsilon}{1+\upsilon(1-2\upsilon)} \cdot \frac{1-2\upsilon}{2\upsilon} = \lambda \cdot \frac{1-2\upsilon}{2\upsilon}$$

Răspuns:

$$\underline{\underline{E}}_{(6x6)}\,|_{izotrop}^{Timoshenko} = \frac{E\cdot\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1-\upsilon}{\upsilon} & 1 & 1 & & & \\ 1 & \frac{1-\upsilon}{\upsilon} & 1 & & \underline{\underline{0}}_{(3x3)} & \\ 1 & 1 & \frac{1-\upsilon}{\upsilon} & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & & & \frac{1-2\upsilon}{2\upsilon} & & \\ & \underline{\underline{0}}_{(3x3)} & & & \frac{1-2\upsilon}{2\upsilon} & \\ & & & & & \frac{1-2\upsilon}{2\upsilon} \end{array}\right]$$

4.4. Formularea ecuaţiilor TLE în deplasări (Lame' ~ 1880)

Formularea în deplasări conduce la rescrierea ecuaţiilor (S1) astfel încât necunoscutele problemei TLE sunt deplasările $\underline{u}(x,y,z)$, astfel:

(S1) $\underline{\underline{D}}^T \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{D}}\underline{u} + \rho \underline{f} = \underline{0} \in V$

(F) $\underline{\sigma}_{(6x1)} = \underline{\underline{E}}_{(6x6)} \underline{\varepsilon}_{(6x1)}$

(G1) $\underline{\varepsilon}_{(6x1)} = \underline{\underline{D}}_{(6x3)} \underline{u}_{(3x1)}$

Se introduce operatorul diferenţial de ordinul doi,

(L) Lamé $\boxed{\underline{\underline{L}}_{(3x3)} = \underline{\underline{D}}^T_{(3x3)} \underline{\underline{E}}_{(6x6)} \underline{\underline{D}}_{(6x3)}}$

astfel că formularea Lamé se scrie:

$$\underline{\underline{L}}_{(3x3)} \underline{u}_{(3x1)} + \rho \underline{f}_{(3x1)} = \underline{0}_{(3x1)} \quad \in \quad V$$

Condiţiile la limită se transcriu – unde este cazul – de asemeni în deplasări; unde $\underline{\underline{\sigma}(u)}_{3x3}$ reprezintă rezultatul condiţiilor pe frontiera S_σ în deplasări, astfel:

(S3) $\underline{p}_n = \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\hat{n}} \in S_\sigma \Rightarrow \underline{p}^T{}_{(1x3)} = \underline{\hat{n}}^T_{(1x3)} \underline{\underline{\sigma}(u)}_{(3x3)} \in S_\sigma$

(F) $\underline{\sigma} = \underline{\underline{E}}\underline{\varepsilon}$

(G1) $\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{D}}\underline{u}$

$\Rightarrow$ **(G1+F)** $\underline{\sigma} = \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{D}}\underline{u} \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}(u)}_{(3x3)}$

- *Com*: Studiul **(G1+F)** trebuie rescris,pentru condiţiile la limită, sub forma $\underline{\underline{\sigma}(u)}_{(3x3)}$.

  (G3) $\underline{u}\big|_{S_u} = \underline{u}^* \in S_u$

- *Com:* Sistemul de ecuaţii (L) + (S3) + (G3) reprezintă formularea în deplasări a ecuaţiilor TLE; necunoscutele sunt deplasările: $\underline{u}_{(3x1)}(x,y,z)$

- **Ex. 4.7:** Dezvoltaţi operatorul diferenţial Lamé: $\underline{\underline{L}}_{(3x3)} = \underline{\underline{D}}^T_{(3x3)} \underline{\underline{E}}_{(6x6)} \underline{\underline{D}}_{(6x3)}$

4.5. Formularea în tensiuni (ec. Beltrami- Mitchell ~ 1890)

(G2) $\underline{\underline{B}}_{(6x6)} \underline{\varepsilon}_{(6x1)} = \underline{0}_{(6x1)} \in V$

(G1) $\underline{\varepsilon}_{(6x1)} = \underline{\underline{D}}_{(6x3)} \underline{u}_{(3x1)} \in V$

$\Rightarrow$ **(G$_1$+G$_2$):** $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{D}}\underline{u} = 0 \Rightarrow \underbrace{(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{D}})}_{\underline{\underline{D}}^*} = 0 \Rightarrow \underset{(6x3)}{\underline{\underline{D}}^*} \underset{(3x1)}{\underline{u}} = \underset{(3x1)}{\underline{0}}$

Rezultatul $\underline{\varepsilon}^* = \underline{\underline{D}}^* \underline{u} = \underline{0}$ arată că $\underline{\varepsilon}^*$ reprezintă o parte a mişcării corpului deformabil, anume: <u>mişcarea corpului rigid</u>!; această parte se pune în corespondenţă cu soluţia omogenă din soluţia în tensiune obţinută în absenţa forţelor masice.

(S1) $\underline{\underline{D}}^T \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0$ unde $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_{omogen} + \underline{\sigma}_{particular}$

Soluţia $\underline{\sigma}_{omogen}$ se pune în corespondenţă cu mişcarea de corp rigid, aşadar: $\boxed{\Leftrightarrow \underline{\underline{D}}^{*T} \underline{\sigma}^* = \underline{0} \in V}$

unde: $\underline{\underline{D}}^*_{(6x3)} = \underline{\underline{B}}_{(6x6)} \underline{\underline{D}}_{(6x3)} \Rightarrow \underline{\underline{D}}^{*T} = \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{B}}^T \Rightarrow \underline{\underline{D}}^T (\underline{\underline{B}}^T \underline{\sigma}^*) = 0$

Se justifică notaţia (Airy ~1860):

$\underline{\sigma}_{omogen(6x1)} = \underline{\underline{B}}^T_{(6x6)} \underline{\sigma}^*_{(6x1)} = \underline{\underline{B}}^T_{(6x6)} \underline{F}_{(6x1)}(x,y,z)$

în care $\underline{F}_{(6x1)}(x,y,z)$ sunt funcţii scalare de punct P (x,y,z).

În cazul 2 Dim F(x,y,z) reprezintă funcţia (scalară) Airy F(x,y,z) (vezi : Ex: 4.8)

- *Com:* Funcţiile $\underline{F}_{(6x1)}(x,y,z)$ în 3Dim, asociate operatorului $\underline{\underline{B}}_{(6x6)}$ au fost obţinute de Neuber ~1920; Papkovicz, Trefftz ~ 1950, Menabrea ~ 1950.

- **Ex. 4.8:** Prezentaţi soluţiile AIRY pentru problema în 2 dimensiuni (2Dim).

Rezolvare:

AIRY

$$\underline{\sigma}_{omogen}\,|_{2D} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{omogen} \\ \sigma_y^{omogen} \\ \sigma_{xy}^{omogen} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{B}}^T_{(3x1)} F(x,y)_{1x1} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} F(x,y) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow \sigma_x^{omogen} = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} \\ \Rightarrow \sigma_y^{omogen} = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} \\ \Rightarrow \tau_{xy}^{omogen} = -\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \end{array}}$$

Ecuaţiile Beltrami-Mitchell (notate B-M) se obţin astfel :

(G2) $\underline{\underline{B}}\underline{\varepsilon} = \underline{0} \Rightarrow \underline{\underline{B}}\underline{\underline{E}}^{-1}\underline{\sigma} = 0 \in V \Rightarrow \underline{\underline{B}}\underline{\underline{E}}^{-1}(\underline{\sigma}_{omogen} + \underline{\sigma}_{particular}) + \rho \underline{f} = 0$

(F^{-1}) $\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{E}}^{-1}\underline{\sigma}$

Rezultatul obţinut se completează cu soluţia omogenă $\underline{\sigma}_{omogen}$ obţinută în formularea Airy, astfel că: soluţia completă constă din : i) + ii)

B.M.

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } \underline{\underline{B}}_{(6x6)} \underline{\underline{E}}^{-1}_{(6x6)} \underline{\underline{B}}^T_{(6x6)} \underline{F}_{(6x1)}(x,y,z) = \underline{0}_{(6x1)} \Rightarrow \underline{\sigma}_{omogen} \text{ în V} \\ \text{ii) } \underline{\underline{D}}^T_{(3x6)} \underbrace{\underline{\sigma}_{partic.}}_{(6x1)} + \rho \underline{f}_{(3x1)} \Rightarrow \underbrace{\underline{\sigma}_{partic.}}_{(6x1)} \text{ în V} \end{array}\right\} \quad \underline{\sigma}_{(6x1)} = \underbrace{\underline{\sigma}_{omogen}}_{(6x1)} + \underbrace{\underline{\sigma}_{partic}}_{(6x1)}$$

$$(S3)\ldots \underbrace{\underline{p}_n}_{(3x1)} = \underline{\underline{\sigma}}^T_{(3x3)} \underline{\hat{n}}_{(3x1)} \in S_\sigma, unde: \underline{\sigma} = \underline{\sigma}_{omogen} + \underline{\sigma}_{particular}$$

$$(G3)\ldots u\,|_{Su} = \underline{u}^* \in S_u$$