LECŢIA 5 : PROBLEMELE PLANE ALE TLE (PPTLE)

5.1. Rezumat: formulările TLE -3Dim

a) ÎN DEPLASĂRI (LAMÉ) $\boxed{\underbrace{\underline{\underline{D}}^{T}_{(3x6)}\underline{\underline{E}}_{(6x6)}\underline{\underline{D}}_{(6x3)}}_{\underline{\underline{L}}_{(3X3)}}\underline{u}_{(3x1)}+\rho\underline{f}_{(3x1)}=\underline{0}_{(3x1)}\in V}$

Condiţiile la limită pe frontiera S

$$\textbf{Lamé}\left\{\begin{array}{l}(S3)..\vec{p}_n=\hat{n}\cdot\tilde{\sigma}\Leftrightarrow\underline{p}_n=\underline{\underline{\sigma}}^T\cdot\underline{n}\in S_\sigma\\ \\ (G3)\vec{u}\Big|_{S_u}=\underline{u}^*\in S_u\end{array}\right\}\quad unde\quad S_u\cup S_\sigma=S;\;\; S_u\cap S_\sigma=\varnothing$$

b)TENSIUNI (BELTRAMI – MITCHEL): (S+G+F)

(B.M)

i) $\underline{\underline{B}}_{(6x6)}\underline{\underline{E}}^{-1}_{(6x6)}\underline{\underline{B}}^{T}_{(6x6)}\underline{F}_{(6x1)}(x,y,z)=\underline{0}_{(6x1)}\Rightarrow\underline{\sigma}_{omogen}$ în V

ii) $\underline{\underline{D}}^{T}_{(3x6)}\underbrace{\underline{\sigma}_{partic.}}_{(6x1)}+\rho\underline{f}_{(3x1)}\Rightarrow\underbrace{\underline{\sigma}_{partic.}}_{(6x1)}$ în V

iii) $\underline{\sigma}_{(6x1)}=\underbrace{\underline{\sigma}_{omogen}}_{(6x1)}+\underbrace{\underline{\sigma}_{partic}}_{(6x1)}$

$$\left.\begin{array}{l}(S3)...\underbrace{\underline{p}_n}_{(3x1)}=\underline{\underline{\sigma}}^T_{(3x3)}\underline{\hat{n}}_{(3x1)}\in S_\sigma,unde:\underline{\sigma}=\underline{\sigma}_{omogen}+\underline{\sigma}_{particular}\\ (G3)...u\,|_{Su}=\underline{u}^*\in S_u\end{array}\right\}\quad unde\quad S_u\cup S_\sigma=S;S_u\cap S_\sigma=\varnothing$$

5.2 Probleme plane ale TLE

Clasificarea problemelor plane conduce la următoarele două categorii de probleme PP_σ şi PP_ε unde:

$PP_\sigma = probleme\quad plane\quad de\quad tip\quad STARE\quad PLANA\quad DE\quad TENSIUNE$

$PP_\varepsilon = probleme\quad plane\quad de\quad tip\quad STARE\quad PLANA\quad DE\quad DEFORMATIE$

5.2.1 Probleme plane : $PP_{\sigma} - fig.5.1$

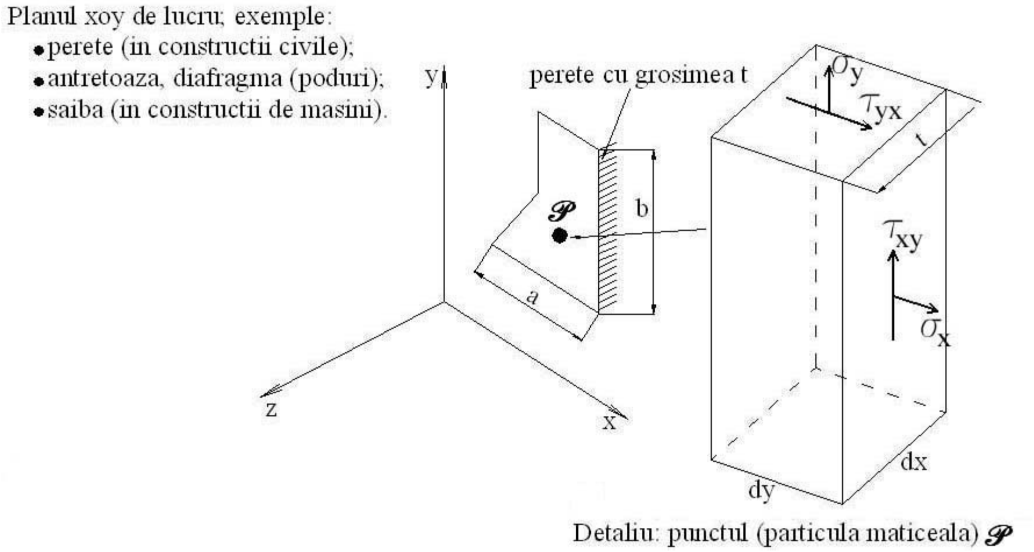

Fig.5.1: PP_{σ}: Probleme plane de tip Stare Plană de Tensiune

$$\underline{\underline{\sigma}}_{2x2}\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_y\end{bmatrix} \rightarrow \underline{\sigma}_{(3x1)} = \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}$$

Caracterizarea PP_{σ}

- Tensiunea σ_z este neglijabilă în raport cu tensiunile $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ fiindcă nu $\exists$ încărcare pe direcţia Z
- $\vec{p}_n \cdot \hat{\underline{i}}_z = 0$ (nu există încărcare normală pe planul xoy)
- feţele peretelui sunt frontiere S_{σ}

➢ *Com:* Astfel spus, încărcările $\vec{p}_n$ şi $\rho\vec{f}$ sunt conţinute în planul median al peretelui!

- grosimea t << Dim PP_{σ}: [adică t << (min(a,b)] unde (a,b) sunt dimensiunile maxime ale peretelui xoy.

Concluzie: $PP_{\sigma} : \sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$ (aceste tensiuni sunt identic nule sau pot fi neglijate)

De observat , însă că : $\varepsilon_z \neq 0$ (vezi Ex. 5.1)

➢ **Ex. 5.1:** Definiţi ε_z pentru o problemă , PP_{σ}; Date $t = 12cm$, $\upsilon = 0{,}25$, $\sigma_x = -40 daN/cm^2$, $\sigma_y = 10 daN/cm^2$, $E = 400.000 daN/cm^2$. Se cer: $\sigma_z = ?$ şi $\Delta t = ?$ (variaţia grosimii peretelui)

Indicaţie: (F^{-1}): $\underline{\varepsilon}_{(3x1)} = \underline{\underline{E}}^{-1}_{(3x3)}\underline{\sigma}_{(3x1)} \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z^{\Rightarrow 0} - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)\right] = -\frac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \neq 0$

➢ **Ex. 5.2:** Să se rescrie studiile **(F^{-1}) şi (F)** pentru problemele PP_σ, scriidu-le astfel: $(F^{-1}_{PP_\sigma})$ si (F_{PP_σ})

Rezolvare: $(F^{-1}_{PP_\sigma})$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon\sigma_y\right]\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon\sigma_x\right]\\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\upsilon & | & 0\\ -\upsilon & 1 & | & 0\\ - & - & | & -\\ 0 & 0 & | & 2(1+\upsilon)\end{bmatrix}_{(3x3)} \Rightarrow \underline{\varepsilon}_{(3x1)} = \underline{\underline{E}}^{-1}_{(3x3)} \cdot \underline{\sigma}_{(3x1)}$$

Invers : Se cunoaşte $(F^{-1}_{PP_\sigma})$ se obţine prin inversare, $(F_{PP\sigma})$

Rezolvare : $\underline{\underline{E}} = (\underline{\underline{E}}^{-1})^{-1} = \underbrace{.......?.....}_{de\ rezolvat}\underline{\underline{E}}_{PP_\sigma} = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix}1 & \upsilon & | & 0\\ \upsilon & 1 & | & 0\\ - & - & | & -\\ 0 & 0 & | & \dfrac{1-\upsilon}{2}\end{bmatrix}$

Indicaţie : se va urma cazul 3D, astfel:

5.2.2 Probleme plane PP_ε - fig. 5.2

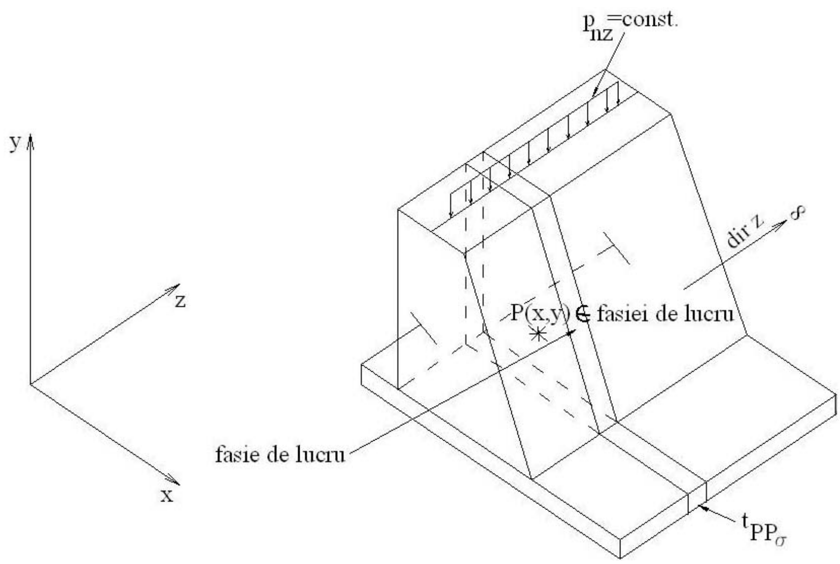

Fig. 5.2: Definirea PP_ε : Probleme Plane de tip Stare Plană de Deformaţie.

Caracterizarea PP_ε

- Construcţii dezvoltate pe o direcţie (z) . Se lucrează pe unitatea de lungime t_{PP_σ} =1.
- Toate elementele geometrice şi constitutive sunt uniforme pe direcţia (z)
- Orice ,,fâşie" de lucru (cu t_{PP_σ} =1) se comportă identic ca toate celelalte (excepţie : capetele construcţiei care ,,respiră")
- Un punct P(x,y) situat în planul fâşiei t_{PP_ε} =1 este constrâns de condiţia $\varepsilon_z = 0$ (,,fâşiile" se blochează una pe alta, pe direcţia z, mai puţin în zonele de capăt, care ,,respiră", deci unde $\varepsilon_z \neq 0$).

- *Com*: Deşi $\varepsilon_z = 0$, în problemele PP_ε avem $\sigma_z \neq 0$!

(de ce? Răspuns din studiul **(F)** rezultă: $\sigma_z = \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + (\lambda + 2G)\varepsilon^{=0}_z \neq 0$ **!**)

- Aşadar, $\sigma_z^{PP_\varepsilon} = \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \neq 0$

- *Com*: Problemele plane pot fi prezentate în **format unic**, reţinând forma unică- notată PP:

(PP) $\boxed{\underline{\sigma}_{(3x1)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(3x1)} ; \qquad \underline{\varepsilon}_{(3x1)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(3x1)}}$

Problemele plane (PP), păstrează, totuşi, atributele distincte, specifice categoriei de problemă plană:

$$(PP_\sigma) : \sigma_z^{PP_\sigma} = 0; \qquad \varepsilon_z^{PP_\sigma} = -\frac{\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$(PP_\varepsilon) : \varepsilon_z^{PP_\varepsilon} = 0; \qquad \sigma_z^{PP_\varepsilon} = L(\varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}(\varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

- **Ex. 5.3:** Prezentaţi $\underline{\sigma}_{PP\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{PP\varepsilon}$ folosind constantele Lamé **(L,G) .**

Răspuns: Problema PP_ε se obţine din $\underline{\underline{E}}^{3Dim}_{(6x6)}$ reduceând studiul **(F$_{PP}$)** la forma:

$$\underbrace{\underline{\sigma}_{PP\varepsilon}}_{(3x1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & | & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & | & 0 \\ - & - & | & - \\ 0 & 0 & | & G \end{bmatrix}_{(3x3)}}_{\underline{\underline{E}}_{PP_\varepsilon}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(3x1)}$$

- **Ex.5.4:** Prezentaţi $\underline{\underline{E}}_{PP_\varepsilon}$ utilizând constantele Timoshenko (E, υ).

Răspuns:

$$\textbf{(F)}\Big|_{PP_\varepsilon} \ldots\ldots \to ..\underset{(3x3)}{\underline{\underline{E}}_{PP_\varepsilon}} = \lambda\begin{bmatrix} \frac{1-\upsilon}{\upsilon} & 1 & | & 0 \\ 1 & \frac{1-\upsilon}{\upsilon} & | & 0 \\ - & - & | & - \\ 0 & 0 & | & \frac{1-2\upsilon}{2\upsilon} \end{bmatrix}, unde \quad L = \frac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \text{ (Lamé)}$$

Indicaţie : în ex.5.3. forţaţi scoaterea lui L în afara matricei.

Concluzie: asupra Problemei Plane PP:
Se poate unifica prezentarea ambelor categorii de probleme plane astfel:

- Lucrăm cu : $\underbrace{\varepsilon_{PP}}_{(3x1)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$.........*si*.......$\underbrace{\sigma_{PP}}_{(3x1)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$ cu condiţiile specifice fiecărei categorii: $\begin{cases} (PP_\sigma)... \to ..\sigma_z = 0 \\ (PP_z)... \to ..\varepsilon_z = 0 \end{cases}$
- Prezentarea unificată se poate face, de exemplu, folosind constantele Timoshenko (E,υ) pentru PP_σ şi (E^*,υ^*) pentru PP_ε şi relaţia de legătură

$$\boxed{\upsilon^* = \frac{\upsilon}{1-\upsilon} \quad si \quad E^* = \frac{E}{1-\upsilon^2}}$$

$$(\mathbf{F^{-1}_{PP}})\ldots \underline{\underline{E}}^{-1}_{PP_\sigma} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\upsilon & | & 0 \\ -\upsilon & 1 & | & 0 \\ - & - & | & - \\ 0 & 0 & | & 2(1+\upsilon) \end{bmatrix} \quad si \quad \underline{\underline{E}}^{-1}_{PP\varepsilon} = \frac{1}{E^*}\begin{bmatrix} 1 & -\upsilon^* & | & 0 \\ -\upsilon^* & 1 & | & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 2(1+\upsilon^*) \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{F_{PP}})\ .\underline{\underline{E}}_{PP\sigma} = \frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & \upsilon & | & 0 \\ \upsilon & 1 & | & 0 \\ - & - & | & - \\ 0 & 0 & | & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix} \quad si \quad .\underline{\underline{E}}_{PP\varepsilon} = \frac{E^*}{1-\upsilon^{*2}}\begin{bmatrix} 1 & \upsilon^* & | & 0 \\ \upsilon^* & 1 & | & 0 \\ - & - & | & - \\ 0 & 0 & | & \frac{1-\upsilon^*}{2} \end{bmatrix}$$

- **Ex. 5.5:** Introducând relaţiile de legătură (E , υ) $\Leftrightarrow (E^*,\upsilon^*)$ să se efectueze trecerea de la:
  - i) $\underline{\underline{E}}^{-1}_{PP_\sigma} \to \underline{\underline{E}}^{-1}_{PP_\varepsilon}$;
  - ii) $\underline{\underline{E}}_{PP_\sigma} \to \underline{\underline{E}}_{PP_\varepsilon}$
- **Ex. 5.6:** Stabiliţi relaţiile de legătură între constantele Lamé (L,G) şi Timoshenko (E^*,υ^*).

5.3. Probleme practice pentru Probleme Plane

- **Ex.5.7.**Să se demonstreze codiţia de biarmonicitate a funcţiei AIRY: F(x,y)

Rezolvare : Din formula BELTRAMI- MITCHELL ,cazul PP, soluţie omogenă:
(B-M) $\underline{\underline{B}}_{(1x3)}\underline{\underline{E}}^{-1}_{(3x3)}\underline{\underline{B}}^T_{(3x1)}\underline{F}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \underline{\sigma}_{(3x1)omog.} = \underline{B}^T_{(3x1)}F(x,y)$, unde F(x,y)este o funcţie scalară de coordonatele punctului P(x,y).
Dezvoltând, rezultă condiţia de biarmonicitate : $\to \underbrace{(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{E}}^{-1}\underline{\underline{B}}^T)}_{(1x1)}F(x,y) = 0 \Leftrightarrow \nabla^4 F(x,y) = 0$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{-\partial^2}{\partial x\partial y} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\upsilon & \vert & 0 \\ -\upsilon & 1 & \vert & 0 \\ - & - & \vert & - \\ 0 & 0 & \vert & 2(1+\upsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{-\partial^2}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix}}_{operatia\ 1} F(x,y) \Rightarrow$$

operaţia 2

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{bmatrix}_{(1x3)} \cdot \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \upsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\upsilon \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -2(1+\upsilon)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix}_{(3x1)} =$$

$$= \frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \upsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\upsilon \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + 2(1+\upsilon)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{E}\left[\frac{\partial^4}{\partial y^4} - \upsilon \frac{\partial^4}{\partial y^2\partial x^2} - \upsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(1+\upsilon)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} \right] F(x,y) =$$

$$= \frac{1}{E}\left[\underbrace{\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial y^2}}_{\nabla^4} \right] F(x,y) = 0 \Rightarrow \nabla^4 F(x,y) = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

- *Com*: $\frac{1}{E} \neq 0$; $\frac{1}{E^*} \neq 0$ iar υ, υ^+ dispar! Problemele plane PPTLE se pot prezenta într-o formă unică; F(x,y,z) este, deasemeni, unică!

- *Com*: $\nabla^2 F(x,y) = \Delta F(x,y) = 0$ Condiţia de armonicitate impusă funcţiei F(x,y)

$$\left.\begin{array}{l} \nabla^4 F(x,y) = \Delta(\Delta F) = 0 \\ \text{sau} \quad \Delta^2 F(x,y) = 0 \end{array}\right\} \text{Condiţia de biarmonicitate impusă funcţiei F(x,y)}$$

Exemplu: Se dă polinomul $F(x,y) = ax^3 + bx^2 y + cxy^2 + dy^3$ unde (a,b,c,d) $\in$ R; este F funcţie biarmonică?

- **Ex: 5.8.** Să se scrie dezvoltat ecuaţiile diferenţiale Lamé pentru problemele plane – formularea în deplasări !

Rezolvare: Lamé $_{PP}: .\underline{\underline{D}}^T_{2X3}\underline{\underline{E}}_{3x3}\underline{\underline{D}}_{3x2}\underline{u}_{2x1} + \rho \underline{f}_{2x1} = 0_{2x1}$ sistem de 2 ecuaţii diferenţiale cu 2 necunoscute u_x, u_y.

Dezvoltând ecuaţiile Lamé, **scrise în extenso** astfel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}^T_{(2x3)}} \underbrace{\frac{E}{(1-\upsilon^2)}\begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{E}}_{(3x3)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}_{(3x2)}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}}_{\underline{u}_{(2x1)}} + \rho \underbrace{\begin{Bmatrix} Fx \\ Fy \end{Bmatrix}}_{\underline{f}_{(2x1)}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(2x1)} \Rightarrow$$

Rezultă sistemul de 2 ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale în necunoscutele u_x şi u_y:

$$\begin{cases} \frac{E}{1-\upsilon^2}\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \left(\frac{1-\upsilon}{2}\right)\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \upsilon\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{1-\upsilon}{2}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}\right] + \rho f_x = 0 \to ec.1 \\ \frac{E}{1-\upsilon^2}\left[\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \left(\frac{1-\upsilon}{2}\right)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \upsilon\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\upsilon}{2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}\right] + \rho f_y = 0 \to ec.2 \end{cases}$$

- **Ex.5.9.** Idem ex. 5.8 pentru PP_ε

Indicaţie : Exerciţiul 5.8 se rescrie folosind constantele $E^* si \ \ \upsilon^*$

Exemplu:

$$\frac{E^*}{1-\upsilon^{*2}}\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \left(\frac{1-\upsilon^*}{2}\right)\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + ----\right] + \rho f_x = 1 \quad (ec.1)$$

$$\frac{E^*}{1-\upsilon^{*2}}\left[\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \left(\frac{1-\upsilon^*}{2}\right)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + ---\right] + \rho f_y = 0 \quad (ec.2)$$

- **Ex. 5.10.** Să se scrie ecuaţiile de mai sus **(ex.5.8** şi **5.9)** folosind operatorul $\nabla^2 = \Delta$

Rezolvare : Ilustrez artificiul care introduce operatorul ∇^2 în formularea Lamé (ex.5.8)

$$\frac{E}{1-\upsilon^2}\left[\underbrace{\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}}_{\nabla^2 u_x} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} ----\right] + \rho f_x = 0$$

- *Com* **:** În formularea Lamé lucrăm cu operatorul $\Delta = \nabla^2$, iar în formularea lui Airy lucrăm cu ∇^4.