LECŢIA 6: PROBLEME PLANE (CONTINUARE); COORDONATE CILINDRICE (3 Dim) ŞI POLARE (2DIM)

6.1 Probleme plane (PP) continuare

Rezumat: Lecţia 5

$$\underline{\underline{L}}_{(2x2)} = \underline{\underline{D}}^T_{2x3}\underline{\underline{E}}_{3X3}\underline{\underline{D}}_{3x2} = \frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1-\upsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} & | & \frac{1+\upsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \\ \frac{1+\upsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & | & \frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1-\upsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}$$

- *Com*: Relaţia a fost cu E şi $\upsilon(PP_\sigma)$

- **Ex.6.1:**

i. Rescrie operatorul $\underline{\underline{L}}_{(2x2)}$ folosind E* şi $\upsilon^*(PP_\varepsilon)$

ii. Să se arate că G* = G (modulul de elasticitate transversal rămâne nemodificat)

Indicaţie : $E^* = \frac{E}{1-\upsilon^2}$; $\upsilon^* = \frac{\upsilon}{1-\upsilon}$, $G = \frac{E^*}{2(1+\upsilon^*)}$

Exemplu: $\begin{bmatrix} \frac{E^*}{1-\upsilon^{*2}} & \frac{\partial^2}{\partial x}+\frac{1-\upsilon^*}{2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & | & ---- \\ - & - & - & | & ---- \end{bmatrix}$

$$G^* = \frac{E^*}{2(1+\upsilon^*)} = -------- = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

Rezultatul G* = G va fi folosit în fotoelasticitate !
Fotoelasticitatea – tehnică de lucru (în laborator) cu modele alcătuite dintr-un material asemănător plexiglasului supuse analizei cu lumină polarizată.
Rezultatul prelucrării imaginilor reprezintă câmpul de tensiuni din elemente de construcţie studiat.
Remember: Ă 1955 prof. M. Iosipescu (INCERC), specialist în Fotoelasticitate.

- **Ex. 6.2:** Dezvoltaţi ecuaţia Lamé pentru probleme plane aducându-le la forma :

$$\begin{cases} \frac{E}{1-\upsilon^2}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1-\upsilon}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_x + \left(\frac{1+\upsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)u_y\right] + \rho f_x = 0 \quad (ec.1) \\ \frac{E}{1-\upsilon^2}\left[\left(\frac{1+\upsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)u_x + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1-\upsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_y\right] + \rho f_y = 0 \quad (ec.2) \end{cases}$$

Sau, echivalent:

$$\begin{cases} \dfrac{E}{1-\upsilon^2}\left[\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\dfrac{1-\upsilon}{2}\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\dfrac{1+\upsilon}{2}\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}\right]+\rho f_x=0 \quad (ec.1)\\ \dfrac{E}{1-\upsilon^2}\left[\dfrac{1+\upsilon}{2}\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\dfrac{1-\upsilon}{2}\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\right]+\rho f_Y=0 \quad (ec.2)\end{cases}$$

- **Ex.6.3:** Să se introducă operatorul $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ în ecuaţiile Lamé:

Indicaţie:

$$\begin{cases} ec\ \ 1\ \ Lame' \Rightarrow \dfrac{E}{1-\upsilon^2}\left[\underbrace{\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}}_{\vec{\nabla}^2 ux}-\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+----------\right]+\rho f_x=0 \\ ec\ \ 2\ \ Lame' \Rightarrow ------------------------------\end{cases}.$$

$$\boxed{{}^{PP}\Big|\ LAME \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{E}{1-\upsilon^2}\left[\nabla^2 u_x-\dfrac{1+\upsilon}{2}\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\dfrac{1+\upsilon}{2}\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}\right]+\rho f_x=0 \quad (ec.1)\\ \dfrac{E}{1-\upsilon^2}\left[\nabla^2 u_Y-\dfrac{1+\upsilon}{2}\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\dfrac{1+\upsilon}{2}\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}\right]+\rho f_y=0 \quad (ec.2)\end{cases}}$$

- **Ex.6.4:** Demonstraţi **principiul fotoelasticităţii** (~1945) (se neglijează forţele masice: $\rho f_x, \rho f_y, \rho f_z$: pentru problemele plane (2 Dim) (ecuaţia FotoPP); generalizare în cazul (3 Dim) (ec. Foto3D)

$$\boxed{\begin{array}{l}(ec.\ \ FotoPP)\ \ \nabla^2(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})=0....(PP)\\ (ec.\ \ Foto3D)\ \ \nabla^2(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})=0...(3D)\end{array}}$$

Indicaţie: se va obţine numai rezultatul (Ec.FotoPP) acţionând astfel: (ec.1) din sistemul Lamé se derivează în raport cu x, (ec. 2) din sistemul Lamé se derivează în raport cu y iar rezultatele se însumează:

$$\Rightarrow .\frac{E}{1-\upsilon^2}\left[\underbrace{\nabla^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)}_{veziG1;\varepsilon_{xx}}+\underbrace{\nabla^2\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)}_{\varepsilon_{yy}}+\underbrace{--------}_{0(dem.)}\right]=0$$

$$\Rightarrow \nabla^2(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})=0 \quad (ec.\ \ FotoPP)$$

Rezultatul FotoPP se obţine prin generalizarea ecuaţiei FOTOPP; în practică, fotoelasticitatea 3D necesită instalaţii de îngheţare a modelului 3D, după care acest este tăiat în felii („fâşii'') PP_ε, care, îngheţate fiind, conservă rezultatele pentru analiza cu ajutorul luminii polarizate. Tehnica de lucru 3D e dificilă, de curând s-a trecut la **tehnica holografică.**

6.2 TLE în coordonate cilindrice (3D) şi polare (PP)

Coordonatele cilindrice şi coordonatele polare sunt utilizate pentru formularea convenabilă (ca format) a unor probleme practice importante din TLE.

Semispaţiul elastic- fig. 6.1 **semiplanul elastic**- fig. 6.2.

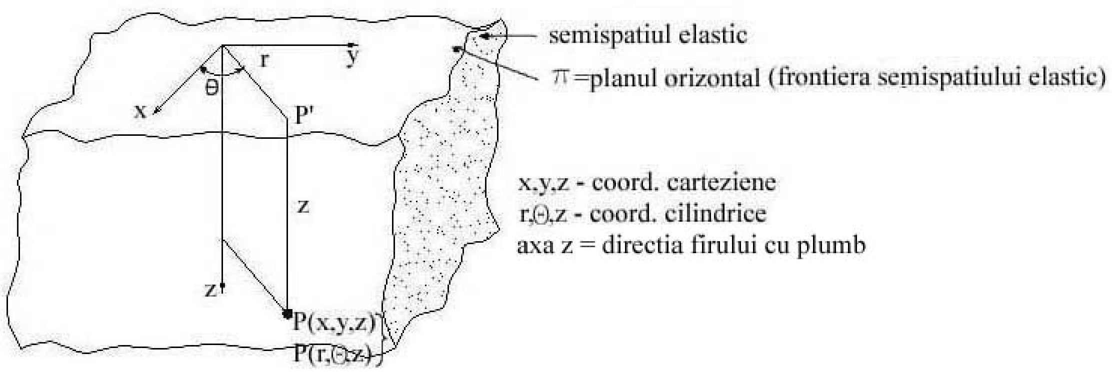


Fig.6.1: Semispaţiul elastic; pentru construcţii axa z are direcţia şi sensul firului cu plumb**.**

- **Definiţia 6.1:** Un mediu continuu limitat de planul orizontal z=0 denumeşte semispaţiul elastic.

Caracterizare: I se zice semispaţiu dar este infinit; utilizare: corpul deformabil pentru căi de comunicaţii.

Noţiunea '' soluţie la infinit'' ex: $u_z = 0 \mid z \to \infty$ (tasare se ''stinge'' spre ∞)

- *Com***:** coordonatele polare nu fac uz de coordonata z_ϕ; $P(r,\theta)$ este un punct definit în coordonate polare coordonate polare (z=0)

- **Definiţia 6.2 : Semiplanul elastic** (fig.6.2) ; este rezultatul intersecţiei semispaţiului elastic cu un plan vertical, (încărcarea p=const. este rectilinie de la +∞ la -∞ şi are direcţia z).

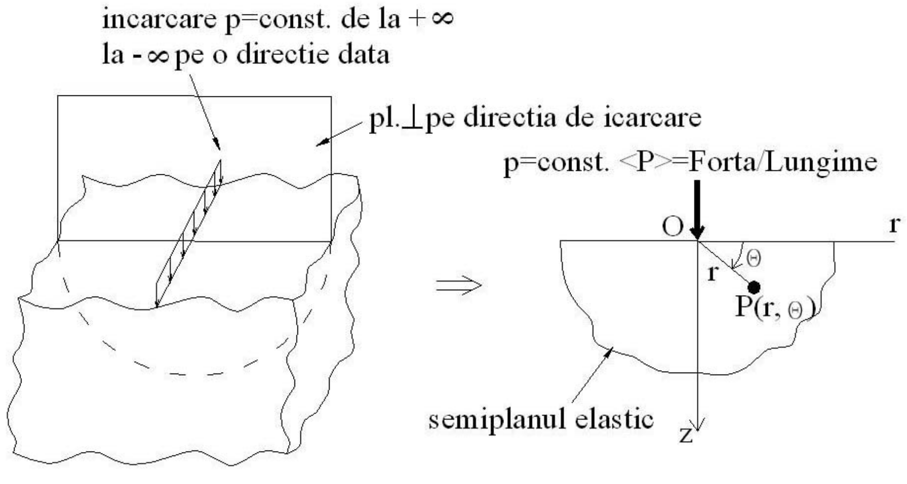


Fig. 6.2: Semiplanul elastic; rezultatul intersectţiei semispaţiului elastic cu un plan vertical; semiplanul este definit în reperul r o z $\perp \pi$.

- **Ex. 6.5:** Definiţia semispaţiului elastic.

- **Ex. 6.6:** Definiţia semiplanului elastic.

- *Com*: Boussinesq (~1880) a elaborat primul model de calcul în care semispaţiul elastic a fost utilizat drept **solid deformabil pentru TLE.**

Baze canonice în coordonate cilindrice (polare) –fig.6.3 Modelul **solidului deformabil** se edifică, în mod tradiţional, folosind reperul matematic oxyz din fig. 6.3

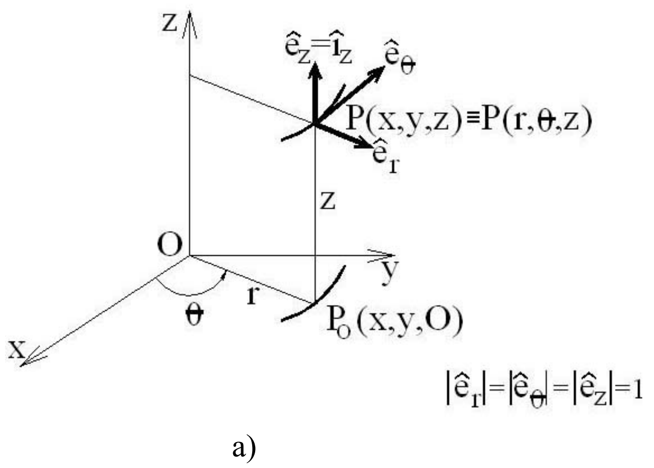


Fig.6.3: Baze canonice utilizate în Mecanica Solidului Deformabil (MSD) pentru reperele:
a) coordinate cilindrice (3 Dim); $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z \equiv \hat{i}_z$
b) coordinate polare (2 Dim) $\hat{e}_r$ *si* $\hat{e}_\theta$

- **Ex.6.7:** Completaţi baza canonică pentru semispaţiul elastic utilizat în construcţii (fig. 6.1) şi semiplanul elastic (fig. 6.2)

- **Ex. 6.8:** Seminar- Studiul **S1(PP)** în coordonate polare (r, θ)

Rezultat: ecuaţiile diferenţiale de echilibru, scrise în coordonate polare (r, θ)

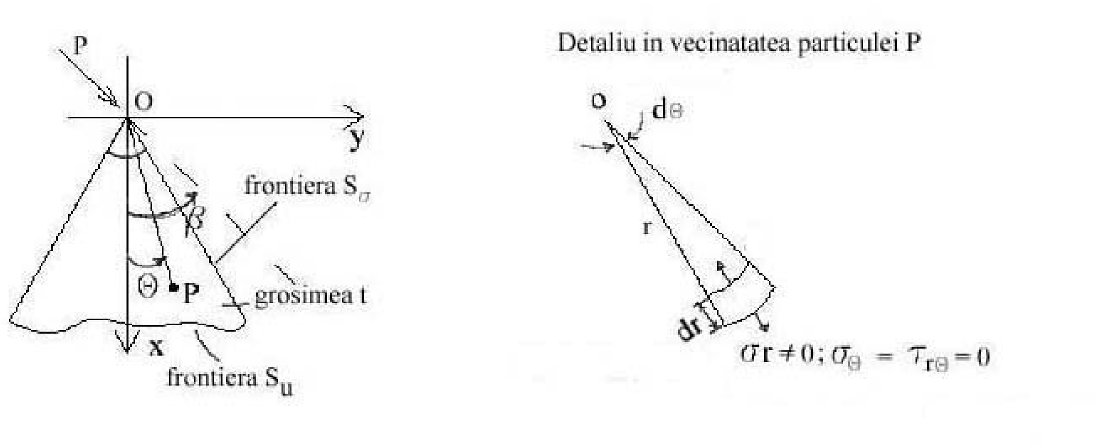
S1(PP,polare)
$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho f_r = 0 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{2\tau_{r\theta}}{r} + \rho f_\theta = 0 \end{cases}}$$

- **Ex. 6.9:** Seminar **G1(PP,polare)** : relaţiile diferenţiale între deplasări şi deformaţiile specifice:

Rezultat: relaţiile diferenţiale între deplasări şi deformaţiile specifice:

$$\mathbf{G_1(PP,polare)}\quad \begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial_r} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \gamma_{r\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r} \end{cases}$$

6.3 Aplicaţii rezolvate în coordonate polare (seminar); problema panei elastice (MitchellĂ1900) fig. 6.4.



Fi. 6.4: Problema panei elastice (Mitchell , 1900)

- **Desciere:**

$$\text{Problemă} \begin{cases} PP_\sigma - grosimea \;\; .,incarcarea \;\; este \;\; \dfrac{P}{t} \\ PP_\varepsilon - grosimea \;\; t = 1, incarcarea \;\; este \;\; P \end{cases}$$

Notaţii: coordonate polare $: r, \theta, r = O\overline{P}$; $2\alpha =$ deschiderea panei elastice: rezemare la ∞ (frontiera S_u).

Stare de tensiune în vecinătatea particulei P(r,θ); (soluţia Mitchell):

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(2x2)}\,|_{PP} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Interesează şi deplasarea punctului P: $u_{r(2x1)} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix}$ (funcţia deplasare $\vec{u} = u_r \hat{e}_r + u_\theta \hat{e}_\theta$ nu face obiectul cursului de faţă).Se face doar observaţia conform căreia S_u este o frontieră depărtată (r $\rightarrow \infty$), de-a lungul căreia deplasarea punctului P este identic nulă.

Soluţia se obţine cu funcţia Airy în coordonate polare; (soluţiaMitchell)

$\boxed{Mitchell: F(r,\theta) = Ar\theta \sin\theta + Br\theta\cos\theta}$ unde: A,B sunt constante ce urmează a fi determinate din condiţiile la limită (pe frontiera) $S_\sigma \cup S_u$. De fapt frontiera S_u nu intervine, fixarea panei fiind presupusă a fi departe de vârful acesteia.

- *Com:*

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{coordonate}{polare} \Rightarrow \sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

- **Ex.6.10 :** Urmând comentariul de mai sus obţineţi expresiile tensiunilor

$\underline{\underline{\sigma}}_{PP} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}$ sub forma generală:

$$\boxed{Airy\Big|_{coordonate \quad polare} \begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta = \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{r} \quad \dfrac{\partial F}{\partial \theta}\right] \end{cases}}$$

şi , folosind soluţia Mitchell, să se obţină rezultatele: $\begin{Bmatrix} \sigma_r = \dfrac{2}{r}(A\cos\theta + B\sin\theta) \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{Bmatrix}$

- **Ex.6.11:** Arătaţi că soluţia de mai sus satisface ec. **S1(PP,polare)** oricare ar fi A şi B în absenţa forţelor masice.

- **Ex. 6.12:** Să se determine (precizeze) constantele A şi B impunând condiţiile la limită (pe frontiera S_σ).

Indicaţie: Vom folosi direct ecuaţiile de echilibru ale sectorului ORS-fig. 6.5

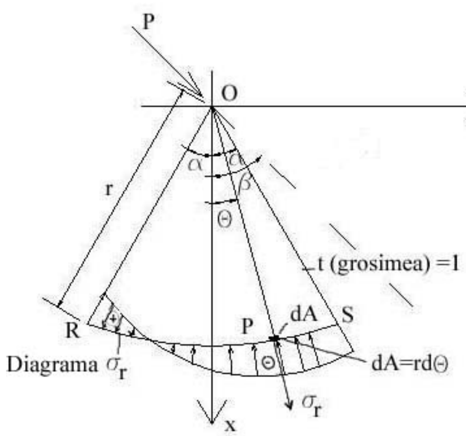


Fig. 6.5: Pentru ecuaţiile de echilibru al sectorului de cerc ORS

$$\begin{cases} \downarrow \sum X = 0 = P\cos\beta + \int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_r r d\theta)\cos\theta \\ \overrightarrow{\sum} Y = 0 = P\sin\beta + \int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_r r d\theta)\sin\theta \end{cases}$$

Necunoscute : A şi B

Rezultă : A= $-\dfrac{P\cos\beta}{2\alpha+\sin 2\alpha}$ B = $-\dfrac{P\sin\beta}{2\alpha-\sin 2\alpha}$

Soluţia: $\sigma_r = \dfrac{2}{r}(A\cos\theta + B\sin\theta) = -\dfrac{2P}{r}\left[\dfrac{\cos\theta\cos\beta}{2\alpha+\sin 2\alpha} + \dfrac{\sin\theta\sin\beta}{2\alpha-\sin 2\alpha}\right]$; $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$

- *Com:* mărimea α se introduce în radiani !