LECŢIA 7 : PROBLEME PALNE ÎN COORDONATE POLARE PP(CONTINUARE);PROBLEME POLAR – SIMETRICE (PPS)

7.1 Particularizări ale problemei Mitchell (fig. 7.1a ; 7.1b ; 7.1c)

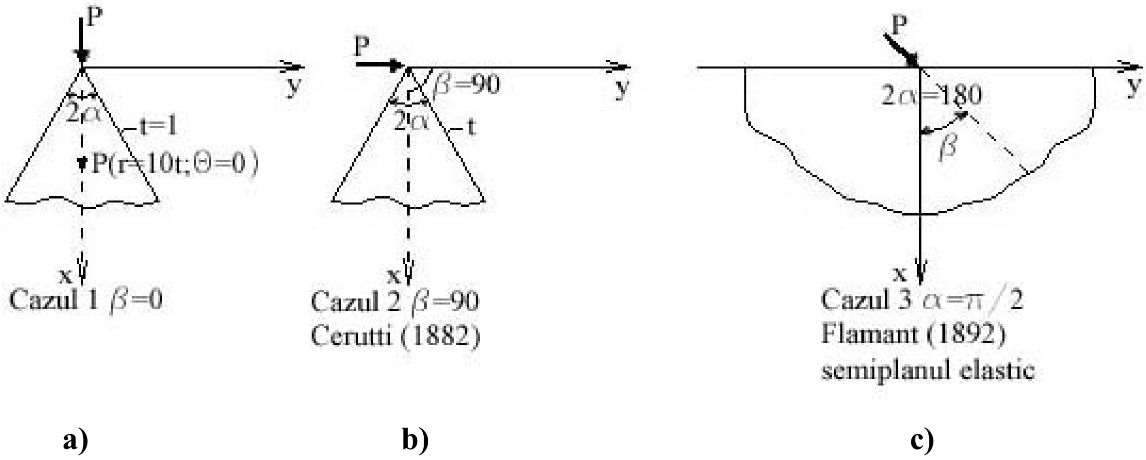


Fig. 7.1 Cazuri particulare ale problemei Mitchell

Soluţiile problemelor din fig. 7.1:

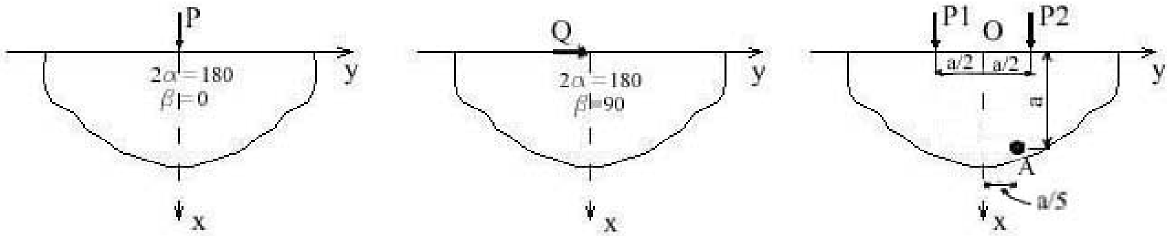
Fig.7.1a: $\beta = 0 \Rightarrow (1)\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{2P}{r}\left(\dfrac{\cos\theta}{2\alpha+\sin 2\alpha}+0\right) = -\dfrac{2P}{r}\dfrac{\cos\theta}{2\alpha+\sin 2\alpha} \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$

Fig.7.1b: $\beta = 90^0 \Rightarrow (2)\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{2P}{r}\left(0+\dfrac{\sin\theta}{2\alpha-\sin 2\alpha}\right) = -\dfrac{2P}{r}\dfrac{\sin\theta}{2\alpha-\sin 2\alpha} \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$

- Fig.7.1c: $2\alpha = 180^0 \Rightarrow (3)\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{2P}{r}\left(\dfrac{\cos\theta\cos\beta}{\pi+0}+\dfrac{\sin\theta\sin\beta}{\pi-0}\right) = -\dfrac{2P}{\pi r}\left(\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\beta\right) \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$

- **Ex. 7.1:** Particularizaţi soluţia (1) pentru cazul particular α= 30^0 şi calculaţi eroarea: err % $= \dfrac{\sigma_x^{RM} - \sigma_x^{TLE}}{\sigma_x^{TLE}} \cdot 100$ unde σ_x^{RM} este soluţia în punctual $P(r = 10t;\ \theta = 0)$ iar σ_x^{TLE} este valoarea calculată cu TLE .

- **Ex. 7.2** (seminar) fig.7.2 (a,b,c)



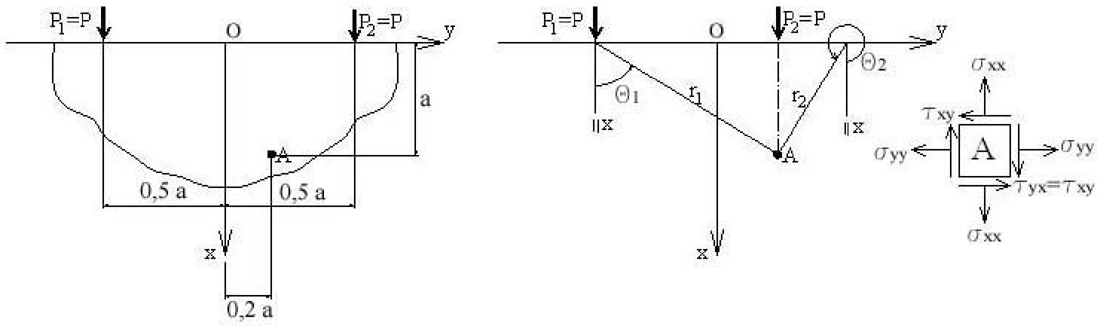
a) date: P **b)** date:Q **c)** date: P_1; P_2; a

Fig.7.2(a,b,c): Aplicaţii pentru semiplanul elastic

- **Ex.7.3: (**fig. 7.3)

Date: P1 ; P2 ; a

Se cere : starea de tensiune în punctual A $(x = a\,; y = \frac{a}{5})$ şi tensorul $\tilde{\sigma}_A$



a)Enuntul problemei 7.3 **b)**Parametrii problemei Flamant **c)**Matricea $\underline{\underline{\sigma}}_A$

Fig.7.3: Problema semiplanului elastic (Flamant). Exerciţiul 7.3

Indicaţie: Problema se rezolvă în următoarele etape:

Etapa 1: Se determineă parametrii care definesc soluţia Flamant:

$$r_1 = \sqrt{(0{,}7a)^2 + a^2} = r_2\sqrt{(0{,}3a)^2 + a^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\theta_1 = arctg\frac{0{,}7a}{a} = arctg 0{,}7 = \ldots\ldots\ldots$$

$$\theta_2 = \underbrace{360^0}_{(2\pi)} - arctg\frac{0{,}3a}{a}$$

Etapa 2: Se calculează **tensiunile normale radiale** în punctual A, induse de forţele P_1 şi P_2.

$\sigma_r^{(1)} = -----;\sigma_\theta^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(1)} = 0$

$\sigma_r^{(2)} = -----;\sigma_\theta^{(2)} = \tau_{r\theta}^{(2)} = 0$

Etapa 3: Se realizează trecerea la coordonatele carteziene (fig. 7.3c) şi se se construieşte tensorul $\widetilde{\sigma}_A$, folosind baza canonică a reperului cartezian OXY (a se rezolva ca la seminar!)

$\widetilde{\sigma}_A = \underline{i}^T \otimes \underline{\underline{\sigma}}_A \underline{\hat{i}}$

- **Ex: 7.3:** $\underline{\underline{\sigma}}_A = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \rightarrow$ seminar

7.2 . Probleme plane polar- simetrice **(PPS)** - fig.7.4

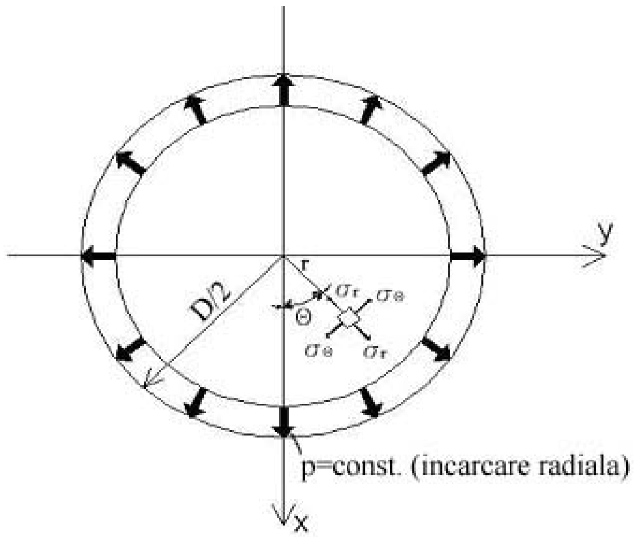


Fig.7.4 : Definirea problemelor polar – simetrice (PPS)

Definirea **PPS :** aceste probleme se definesc pe domenii circulare (pline sau cu gol central).

Caracterizare:

- $u_\theta = 0;\ \frac{\partial}{\partial\theta} = 0$ (fenomenul nu variază în raport cu θ)
- grosimea t=const. pe întreg domeniul (şaibă circulară plină de diametrul D)
- încărcarea: polar- simetrică

b. Exemple practice : (fig. 7.5; 7.6 ; 7.7)

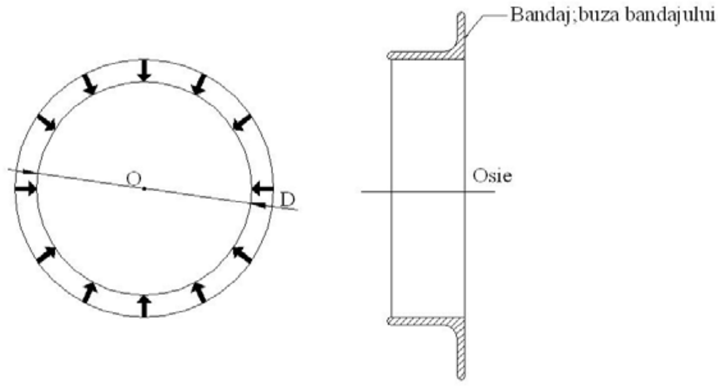


Fig. 9: Saiba preintinsa;bandajul rotii

Fig.7.5 Şaibă precomprimată (bandajul roţii, preîncălzit, se aplică pe roată)

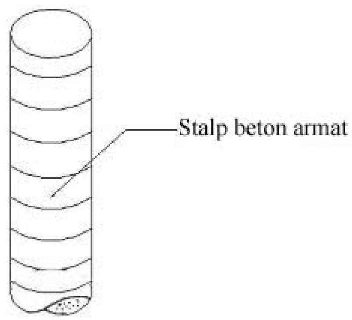


Fig. 7.6: Procedeul fretării: cilindrul este ''fretat''prin aplicarea unei frete (sârme) pe contur, circular şi cu pas uniform.

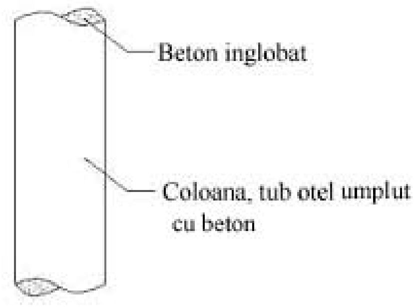


Fig. 7.7 : Coloană tub oţel cu beton înglobat (pentru fundaţii de poduri)

- **Teoria PPS:**

- **Ex.7.4:** Particularizaţi studiile (S); (G); (F) pentru PPS

Indicaţii : Dispar $\frac{\partial}{\partial\theta};\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}=0$

$$\textbf{(S1)}_{\text{PP}} \Rightarrow (S1)_{PPS}:\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+\rho f_r=0\Rightarrow\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+\rho f_r=0$$

Forţele masice ρf_r se pot prezenta [n dou` variante:

1. $\rho f_r = 0$ în probleme statice, când se neglijează greutatea proprie;

2. $\rho f_r \neq 0$ când există forţe centripete (radiale) – fig. 7.8

Consideră numai cazul ρf_r =0; rezultă:

(S1)$_{PPS}$: $\boxed{\dfrac{d\sigma_r}{dr}+\dfrac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0}$ 2 necunoscute . σ_r,σ_θ $\Rightarrow$ GNS = 2 – 1 = 1 (o dată interior static nedeterminată)

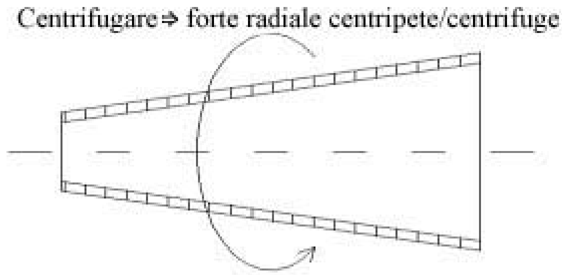


Fig. 7.8: Forţe radiale rezultate prin centrifugare (stâlpii circulari din beton armat , prefabricaţi)

(G1) $_{PP}$ $\begin{cases} \varepsilon_r=\dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta=\dfrac{u_r}{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta} \\ \gamma_{r\theta}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-\dfrac{u_\theta}{r} \end{cases}$ **(G1)$_{PPS}$** $\boxed{\begin{cases} \varepsilon_r=\dfrac{\partial u_r}{\partial r}=\dfrac{du}{dr} \\ \varepsilon_\theta=\dfrac{u_r}{r}=\dfrac{u}{r} \\ \gamma_{r\theta}=0 \end{cases}}$

- *Com*:
  i) în studiul **(G1)$_{PPS}$** există numai deplasări radiale; acestea pot fi notate simplu $u_r=u$
  ii) În problemele PPS apar 3 necunoscute: $\begin{cases} (S1)_{PPS}:\sigma_r\ si\,\sigma_\theta \quad (2\ \ nec) \\ (G1)_{PPS}:u_r=u \quad (1\ \ nec.) \end{cases}$
  iii) Problema **PPS** este deci , static determinată! concluzie: (studiul **(F)** nu intervine în sistemul de ecuaţii); problemele **PPS** sunt <u>solubile</u> fără intervenţia ecuaţiilor **(F).**

- **Ex. 7.5:** Scrieţi expresiile $\vec{\nabla}_{PPS},\vec{\nabla}_{PPS}\cdot\vec{\nabla}_{PPS}=\nabla^2{}_{PPS}=\Delta\ \ si\ \ \nabla^4_{PPS}=(\nabla^2)^2$ (operator armonic ∇^2şi biarmonic ∇^4 pentru problema **PPS**.

Indicaţie:

$$\vec{\nabla}_{PP}=\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\hat{e}_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta}$$

$$\vec{\nabla}_{PPS}=\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r};\quad de\quad ce?$$

$$\nabla^2{}_{PPS}=\nabla^2=\frac{d}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(de\quad ce?)$$

$$(\nabla^2)^2_{PPS}=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2=?\text{(indicaţii şi rezolvare în Ex.7.6)}$$

- **Ex. 7.6:** Să se scrie ec. de biarmonicitate Airy $\nabla^4 F(r) = 0$
  Indicaţie:

$$\nabla^4 F(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{d}\frac{d}{dr} \right)^2 F(r) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Răspuns:

$$\boxed{(ecuatia\ Airy)\quad \frac{d^4F}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3F}{dr^3} - \frac{1}{r}\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} = 0 \ldots\ldots\ldots(5)}$$

- *Com:* Caracterizare şI rezolvare a ecuaţiei de biarmonicitate Airy.

Ecuaţia diferenţială ordinară , de ordinul 4 , cu coeficienţi variabili

$$\left(1, \frac{2}{r}, -\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}\right)$$

Substituţie (Euler) $r = \lambda^t \Rightarrow t = \ln r \to \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}$

- **Ex. 7.7:** Efectuând substituţia $r = \lambda^t$ aduceţi ecuaţia (5) la forma (6)

$$\frac{d^4F(t)}{dt^4} - 4\frac{d^3F}{dt^3} + 4\frac{d^2F}{dt^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

- *Com*: Ecuaţia (6) este o ecuaţia diferenţială ordinară , de ordinul 4 cu coeficienţi constanţi :

Demonstraţie:

$$\frac{dF}{dr} = \frac{dF}{dt}\frac{dt}{dr} = \frac{dF}{dt}\frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{dF}{dt}$$

$$\frac{d^2F}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{dF}{dr}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{dF}{dt}\frac{1}{r}\right) = \frac{d^2F}{dt^2}\cdot\frac{1}{r^2} - \frac{dF}{dt}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2F}{dt^2} - \frac{dF}{dt}\right)$$

$$\frac{d^3F}{dr^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^4F}{dr^4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- **Ex.7.8** Obţineţi soluţia ec. (6) sub forma (7) sau (7') urmând metoda Euler.

Indicaţie : se scrie ecuaţia characteristică în R, căreia i se calculează rădăcinile:

$$R^4 - 4R^3 + 4R^2 = 0 \rightarrow R_{1,2} = 0.; \quad R_{3,4} = 0$$

Solutia Euler :

$$F(t) = C_1 + C_2 t + C_3 \lambda^{2t} + C_4 t \lambda^{2t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

sau :

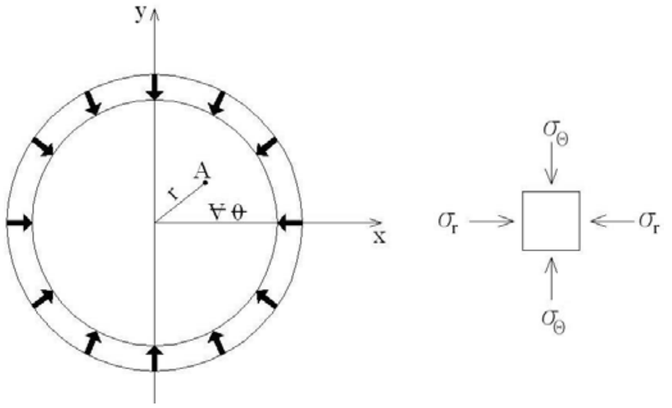
$$F(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7')$$

- **Ex. 7.9:** Cunoscând soluţia **F(r)** (7') să se obţină expresiile pt: $\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}$ şi $\sigma_\theta = \frac{d^2F}{dr^2}$

Răspuns : $$\begin{cases} \sigma_r = \frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(1 + 2\ln r) \\ \sigma_\theta = -\left(\frac{C_2}{r^2}\right) + 2C_3 + C_4(3 + 2\ln r) \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

7.3 Aplicaţii **PPS**

- **Ex. 7.10:**Fig. 7.9 pentru enunţul Ex: 7.10: şaibă circulară cu bandaj ,stâlpul fretat (fig. 7.9).



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_\theta \end{bmatrix} = -p\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) definirea problemei:p,r, $\forall\theta$ **b)** Matricea $\underline{\underline{\sigma}}_A$ Stare de tensiune omogenă

Fig 7.9: Pentru enunţul ex. 7.10: şaibă circulară cu bandaj, stâlp fretat

Condiţiile problemei:

$$\text{r = a} \Rightarrow \sigma_r = p \Rightarrow (8), \ \ \sigma_r = 2C_3 = -p \Rightarrow C_3 = \frac{-p}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

$$C_2 = C_4 = 0 \Rightarrow \sigma_\theta = \sigma_r = -p$$

- *Com*: Stare de tensiune omogenă
- **Ex. 7.11** Tuburi cu pereţi groşi (fig.7.10)

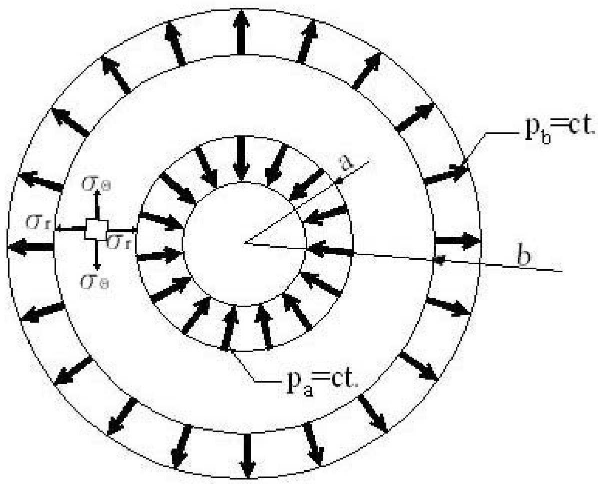


Fig. 7.10: Tuburi cu pereţi groşi

- a = raza interioară încărcarea radială p_a
- b = rază exterioară încărcare radială p_b

$$\begin{cases} r = a; \quad \sigma_r = p_a ;(8),(9) \\ \quad r = b \quad ;\sigma_r = p_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_r = \dfrac{C_2}{r^2} + 2C_3 \\ \sigma_\theta = \dfrac{C_2}{r^2} + 2C_3 \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

$\boxed{\text{[de ce ? r } \rightarrow 0 \Rightarrow \ln r \text{ nu există]}}$

Rezultă: Rezolvare (9) în (10) $\Rightarrow \sigma_r ; \sigma_\theta$

$$\boxed{\begin{cases} C_2 = \dfrac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2} \\ C_3 = \dfrac{p_b \cdot b^2 p_a \cdot a}{2(b^2 - a^2)} \end{cases}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

- *Com*: $\sigma_r + \sigma_\theta = 2\dfrac{p_b \cdot b^2 \cdot p_a \cdot a^2}{b^2 - a^2} = ct.$ **(** nu depinde de r**)**

- *Com*: $\varepsilon_z \big|_{PPS\varepsilon} = -\dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) = const.$
  (stâlpi lungi)

$\varepsilon_z =$ deformaţie specifică liniară în lungul stâlpului

Caz practice: Date: a; b $\rightarrow \infty$ şi $p_a = 0;$ $p_b = -p_0$ este cazul unui tub circular (conducte) pozată în apă la adâncime pentru transportul ţiţeiului de la o platformă marină la rezervoarele rafinăriei