LECŢIA 8: PLĂCI PLANE CIRCULARE – CAZUL AXIAL – SIMETRIC

8.1 Definiţii, notaţii; clasificare.

Placa plană subţire h << min (a,b) - fig. 8.1 încărcarea p(x,y) are direcţia z ; h = grosimea (poate fi constantă sau variabilă).

Notaţii:

- **PL – XYZ:** plăci dreptunghiulare în coordonate carteziene;
- **PL - CIL :** plăci circulare în coordonate cilindrice;
- **PL - PPS :** plăci circulare axial simetrica.

Feţele plăcii sunt : $z = -\frac{h}{2}$ (faţa superioară); $z = \frac{h}{2}$ (faţa inferioară)

- *Com:* Rezemarea plăcii plane se realizează pe conturul plăcii sau în orice punct al ei (de exemplu : rezemare pe stâlpi).

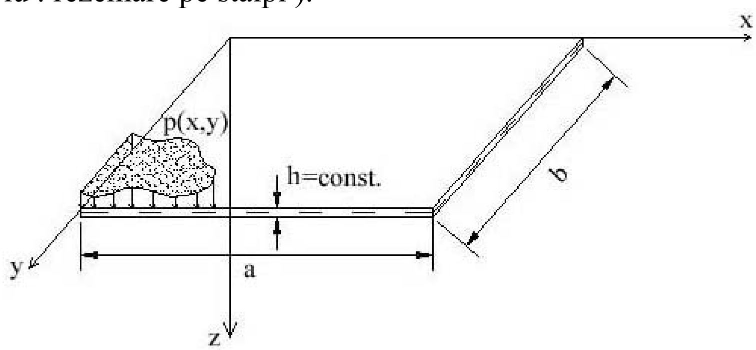


Fig. 8.1(a): Plăci dreptunghiulare în coordonate carteziene: **PL-XYZ**

- *Com:* Placa pe mediu elastic (= semispaţiul elastic) este ,,încărcată'' şi pe faţa

$z = +\frac{h}{2}$ (inferioară).

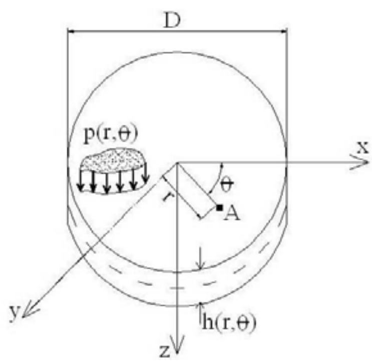


Fig. 8.1(b): Placă circulară în coordonate cilindrice: **PL- CIL**

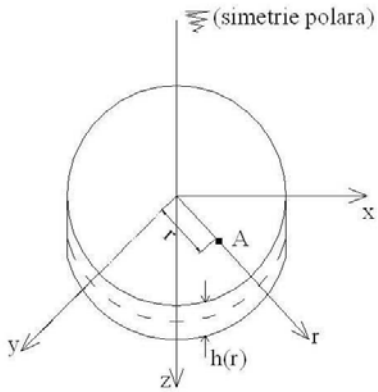


Fig. 8.1(c): Placă circulară în coordonate polare ; cazul axial – simetric **PL-PPS**

- *Com:* În lecţia de faţă ne ocupăm numai de plăcile **PL- PPS**, pentru care modelul **TLE-PPS** este prezentat în Lecţia 7.

Rezumat PPS

(S1)$_{\mathbf{PPS}}$ $$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \text{ în V}$$

(G1)$_{\mathbf{PPS}}$ $$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{du_r}{dr} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u_r}{r} \\ \gamma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

AIRY$\big|_{PPS}$: $\nabla^2 F(r) = 0$ sau , dezvoltat, $\dfrac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial r} + \dfrac{1}{r^3}\dfrac{\partial F}{\partial r} = 0$

- *Com*: Ecuaţia plăcilor din fig.8.1 (a,b,c) se va putea scrie în mod unic astfel:

Ecuaţia fundamentală a plăcilor plane : SOPHIE GERMAIN-LAGRANGE (~ 1780)

$$\left.\begin{array}{l} PL - XYZ: \ \nabla^4 w(x,y,z) = \dfrac{p(x,y)}{D} \\ PL - CIL: \ \nabla^4 w(r,\theta) = \dfrac{p(r,\theta)}{D} \\ PL - PPS: \ \nabla^4 w(r) = \dfrac{p(r)}{D} \end{array}\right\} \rightarrow \nabla^4 w(....) = \frac{p(...)}{D}$$

unde s-a notat : $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$ se numeşte rigiditatea cilindrică a plăcii :

E = modulul Young
h = grosimea plăcii
υ = coeficientul Poisson

- **Ex. 8.1** Definiţi plăcile plane în mod unic (o descriere conform fig.8.1 (a,b,c,) şi prezentaţi ecuaţia diferenţială asociată:

8.2 Plăcile **PL-PPS**; Studiul **(G)** (fig 8.2)

- ***Com*:** În planul plăcii avem o singură variabilă de lucru notată cu „ r’’şi pe direcţia ei putem lua axa „x ‘’, A este punct oarecare în planul medial al plăcii (z = 0) (fig. 8.2)

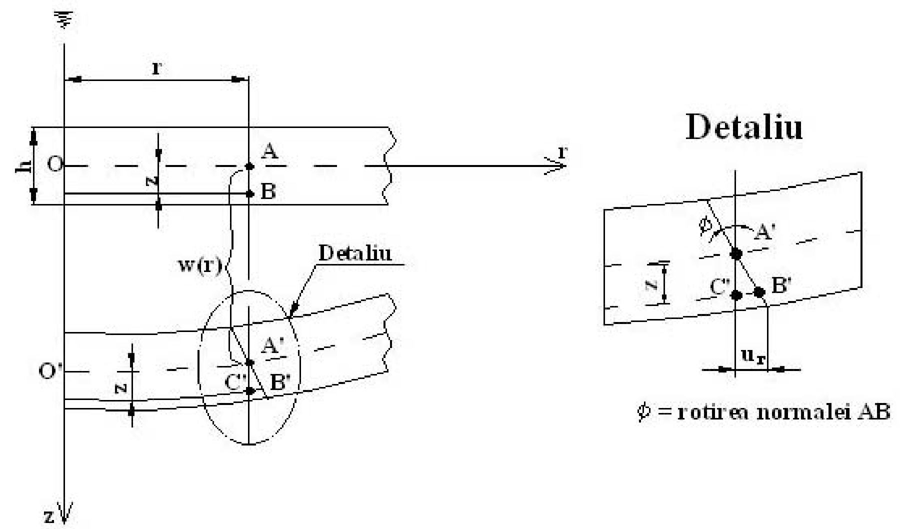


Fig.8.2: Plăci plane **PL- PPS** ; Studiul **(G)**

Notaţii de lucru pentru studiul **(G):**

OA– planul median nedeformat
$O'A'$ – planul median deformat (notă: în RM: fibră medie deformată)
La cota „ z’’vorbim de **planul de la cota** „z’’;sau mai sunt: planul „z’’(= planul de la cota z = z_B)
Notaţie pentru detaliu din fig. 8.2 : ∠ $C'A'B' = \phi$ - rotirea normalei AB faţă de axa z ;
$C'B' = u_r$ deplasarea pe direcţia „r’’ la cota „z’’
Din examinarea fig. 8.2 (detaliu) rezultă:

(1) $\begin{cases} u_r = C'B' = z tg\phi \cong z \sin\phi \cong z\phi \ \textbf{(calcul de ordin I)} \\ u_\theta = 0 \ \text{(numai în modelul } \textbf{PL-PPS}\text{)} \end{cases}$

Ipoteza (I) în teoria plăcilor plane

Ne situăm în calculul de ordinul I $tg\phi \cong \sin\phi \cong \phi$ (relaţii valabile în calculul de ordinul I , rotiri mici)

Deformaţii specifice:

$$(2) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{du_r}{dr} \overset{rel(1)}{=} z\dfrac{d\phi}{dr} \\ \varepsilon_\phi = \dfrac{u_r}{r} = z\dfrac{\phi}{r} \\ \gamma_{r\theta} = 0 \ \text{numai in modelul PL - PPS} \end{cases}$$

8.3 Studiul **(F)**

Ipoteza II : În studiul **(F)** folosim modelul $TLE_{PP\sigma}$

Relaţia $\underline{\sigma}_{PP\sigma} = \underline{\underline{E}}\,\underline{\varepsilon}_{PP\sigma}$ conduce la expresiile:

$$
(3)\left\{\begin{array}{l}
\sigma_r = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_r + \upsilon\varepsilon_\theta\right) \\
\sigma_\theta = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_\theta + \upsilon\varepsilon_r\right) \\
\tau_{r\theta} = 0 \\
\tau_{rz} = ?(neprecizat!)
\end{array}\right\}
$$

- *Com*: Pentru plăci groase se va folosi PP_ε ;deci: $\underline{\sigma}_{PP\varepsilon} = \underline{\underline{E}}_{PP\varepsilon}\,\underline{\varepsilon}_{PP\varepsilon}$ [screţi expresiile analoage (3) pentru plăci groase ! expresiile (3')].

- **Ex: 8.2:** Enunţaţi şi comentaţi ipotezele teoriei plăcilor plane (Teoria Sophie Germain-Lagrange) [Indicaţie, revedeţi relaţiile: (1), (2) ,(3), (3')]

Studiul (G+ F)

$$
(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
\sigma_r = \dfrac{Ez}{1-\upsilon^2}\left(\dfrac{d\phi}{dr} + \upsilon\dfrac{\phi}{r}\right) \\
\sigma_\theta = \dfrac{Ez}{1-\upsilon^2}\left(\dfrac{\phi}{r} + \upsilon\dfrac{d\phi}{dr}\right)
\end{array}\right.
$$

8.4 Studiul **(S)** . Se compune din 2 părţi (substudii) **Sa** şi **Sb**

(Sa) : Stabilim **relaţiile de echivalenţă** pe grosimea plăcii –fig.8.3

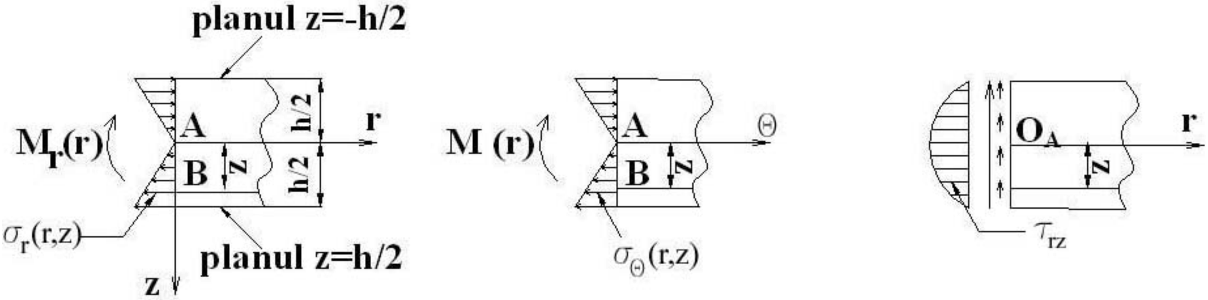


Fig.(a) Momentul $M_r(r)$ **Fig.(b)** Momentul $M_\theta(r)$ **Fig.(c)**Forţe tăietoare $T(r)$

Fig.8.3: Pentru studiul Sa: momentul $M_r(r)$, momentul $M_\theta(r)$ şi forţa tăietoere $T(r)$

Ipoteza III: acceptăm calculul de ordinul I ; lucrăm pe configuraţia nedeformată.
Eforturile plăcii se definesc pe unitatea de lungime (r sau θ) şi pe grosimea plăcii, astfel:

$$(5)\ \textbf{(Sa)}\quad \begin{cases} M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz \\ M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta z dz \\ T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{rz} dz \end{cases}$$

- *Com* **:** Contradicţie:!

Ipoteza IV: pentru τ_{rz} (mărime neprecizată încă –vezi relaţia 3): se acceptă rezultatul din RM, folosind o relaţie (sau o variaţie) parabolică pe înălţimea „h'' (Jurawski); rezultatul este prezentat în fig. 8.3c.

Studiul (Sb) – **relaţiile diferenţiale** de echilibru ale elementului de placă - fig.8.4

- **Ex. 8.3** Să se reprezinte echilibrul diferenţial al unui element de placă circulară **PL-PPS**

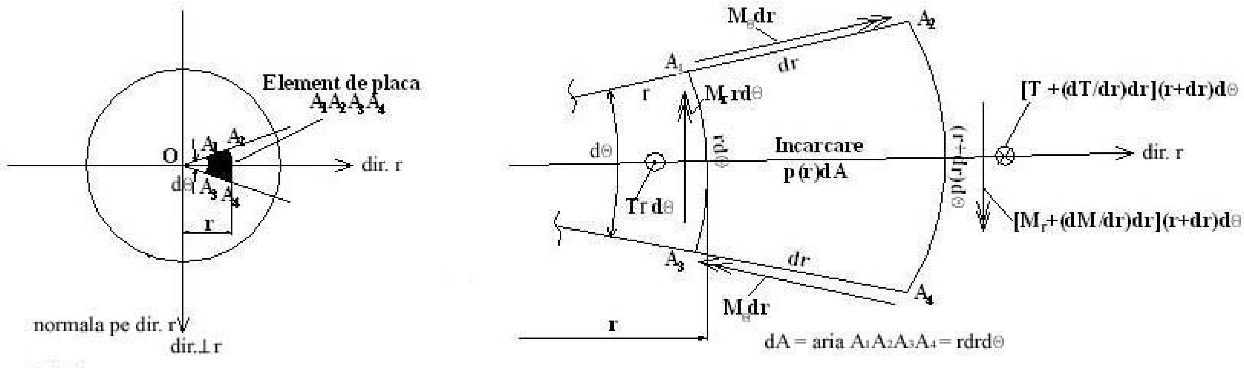


Fig.8.4(a): Element de placă văzut de sus **Fig.8.4(b):** Echilibrul elementului de placă

Fig. 8.4: Studiul **Sb**: Echilibrul diferenţial al elementului de placă **PL-PPS**

Indicaţie: Se pot scrie două ecuaţii (vectoriale) de ecilibru; $_{+}\!\downarrow \sum Z = 0$ şi $_{+}\!\downarrow \sum M_{\perp r} = 0$ (se va observa că ecuaţia de proiecţie pe direcţia r este identic satisfăcută!).
Încărcarea p(r)dA = p(r) r dr $d\theta$ are direcţia z

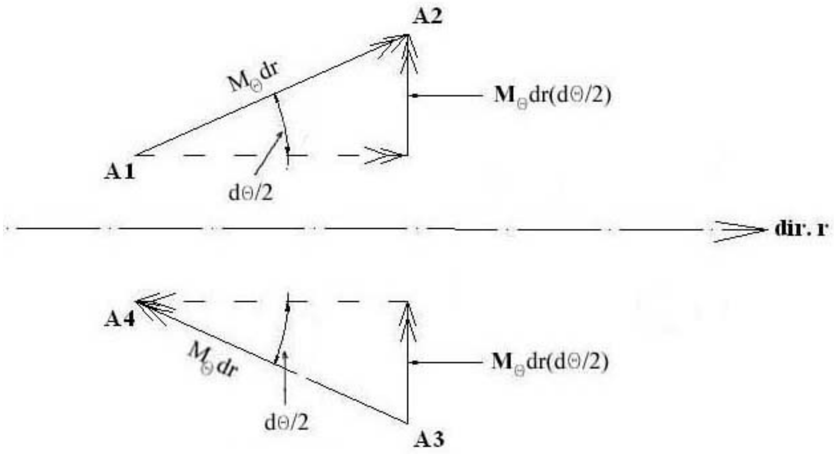
- **Ex.8.4** Să se obţină ecuaţiile diferenţiale de echilibru ale studiului **Sb**

$$\underset{+}{\downarrow} \sum Z = 0 \rightarrow p(r) r dr d\theta - T r d\theta + \left(T + \frac{dT}{dr} dr \right)(r + dr) d\theta = 0$$

$$\Rightarrow T + r\frac{dT}{dr} = -pr$$

$$_{+}\downarrow \sum M_{\perp r} = 0 \rightarrow \frac{d}{dr}\left(rM_r\right) - M_\theta = Tr$$

Rezultă: **(Sb)** (6) $\begin{cases} T + r\dfrac{dT}{dr} = -pr \quad sau \quad \dfrac{d}{dr}(rT) = -pr \\ \dfrac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = Tr \end{cases}$



pentru proiecţia $\perp$r : $\dfrac{M_\theta}{2} dr \cdot d\theta + \dfrac{M_\theta}{2} dr \cdot d\theta = M_\theta dr \cdot d\theta$

Fig. 8.5 : Detaliu de lucru pentru ecuaţia de momente $\sum M_{\perp r} = 0$

- *Com:* Mr şi Mθ se măsoară pe unitatea de lungime având unităţile de măsură : $\langle M_r \rangle$ în daN (unităţi de forţă) ; $\langle T \rangle$ în $\dfrac{daN}{cm}$ [unităţi de forţă (lungime)], fiindcă:

$$\begin{cases} M_r = \dfrac{daNcm}{cm} \\ T = \dfrac{daN}{cm} \end{cases}$$

Dezvoltăm relaţiile **(Sa)** astfel:

(7) $$\begin{cases} M_r(r) \overset{(S_a)}{=} \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz \overset{(3)}{=} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Ez}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_r + \upsilon\varepsilon_\phi\right)dz \overset{(2)}{=} \frac{E}{1-\upsilon^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz \left(\frac{d\phi}{dr} + \upsilon\frac{\phi}{r}\right) = \\ = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\upsilon^2\right)}\left(\dfrac{d\phi}{dr} + \upsilon\dfrac{\phi}{r}\right) = D\left(\dfrac{d\phi}{dr} + \upsilon\dfrac{\phi}{r}\right) \\ M_\phi(r) \overset{(Sa)}{=} ------------ = D\left(\dfrac{\phi}{r} + \upsilon\dfrac{d\phi}{dr}\right) \end{cases}$$

T – se obţine direct din studiul **(Sb)** $\dfrac{d}{dr}\left(rT\right) = -pr = T$; Rezultatul final:

(S)PL-PPS:

$$\boxed{\begin{aligned} &M_r(r) = D\left(\frac{d\phi}{dr} + \upsilon\frac{\phi}{r}\right) \\ &M_\phi(r) = D\left(\frac{\phi}{r} + \upsilon\frac{d\phi}{dr}\right) \\ &\frac{d}{dr}(rT) = -pr) \end{aligned}}$$

8.5 Sinteza **S+G+F** : ecuaţia diferenţială a modelului **PL-PPS**

- **Ex. 8.5.** Introduceţi expresiile (7) pentru M_r, M_θ, T în ecuaţiile diferenţiale de echilibru (6).Să se obţină ***ecuaţii diferenţiale de ordinul III în rotirile normalei*** ϕ

$$(8) \qquad \boxed{\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} - \frac{1}{r^2}\phi = \frac{T(r)}{D}}$$

- **Ex. 8.6.** Observând identitatea $\left[(\phi r)' + \frac{1}{r}\right]' = \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} - \frac{1}{r^2}\phi$ să se scrie ecuaţia de ordinul II în ϕ astfel:

(9) $\boxed{\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\phi r)\right] = \frac{T}{D}}$ - ***ecuaţia diferenţială de ordinul II în*** ϕ ***(forma'' compactă'').***

- **Ex. 8.7** Să se efectueze , prin integrări successive, calculul expresiei ϕ(r) sub forma:.

(10) $\phi(r) = \frac{1}{Dr}\int r(\int T dr)dr + C_1 r + \frac{C_2}{r}$ unde C_1 , C_2 sunt constante de integrare care se obţin impunând condiţiile limită(de rezemare) ale plăcii, modelul **PL-PPS**

- **Ex. 8.8** Introducând expresia obţinută (9) în ecuaţia de echilibru (6) $\frac{d}{dr}(rT) = -pr$ să se obţină ***ecuaţia diferenţială de ordinul III în*** ϕ ***:***

$$(11) \qquad \boxed{\frac{d^3\phi}{dr^3} + \frac{2}{r}\frac{d^2\phi}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{d\phi}{dr} + \frac{\phi}{r^3} = -\frac{p(r)}{D}}$$

- **Ex. 8.9** Inlocuind $\phi(r)$ cu expresia $\phi(r) = -\frac{dw(r)}{dr}$ unde $w(r)$=AA' (fig. 8.2) (deplasarea transversală a plăcii pe direcţia z), să se rescrie expresia (10) sub forma:

$$(12) \qquad \boxed{\begin{aligned} &\nabla^4 w(r) = \frac{p(r)}{D} \quad unde: \\ &\nabla^4 w(r) = \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} \end{aligned}}$$

Rezultatul (12) reprezintă ecuaţia diferenţială a plăcilor plane în deplasări $w(r)$ -modelul **PL-PPS.**

8.6 Aplicaţii (seminar)

- **Ex. 8.10 Diagramele** T, M_r, M_θ

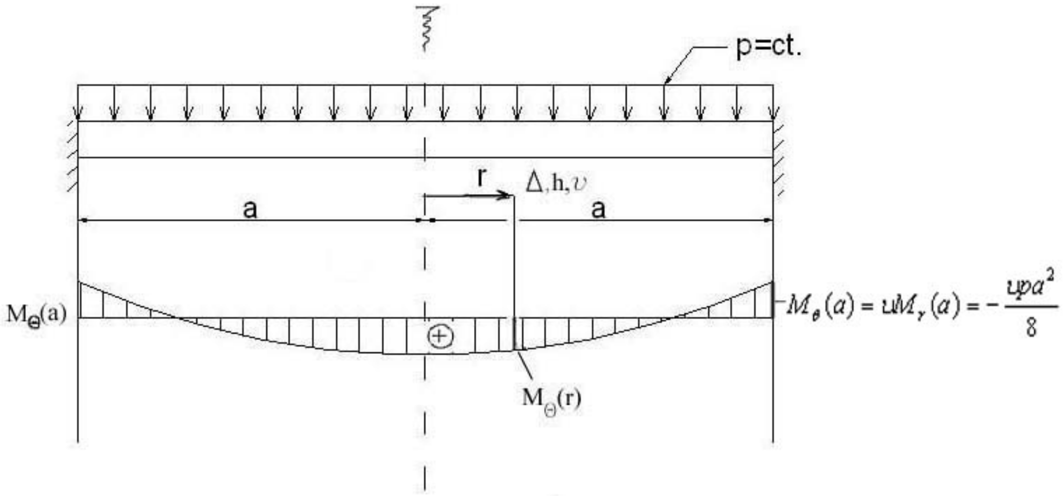


Fig.8.6

Răspuns: $M_\theta(0) = M_r(0) = \dfrac{1+\upsilon}{16} pa^2$

$$M_\theta(a) = \upsilon M_r(a) = -\upsilon \frac{pa^2}{8}$$

- **Ex. 8.11**

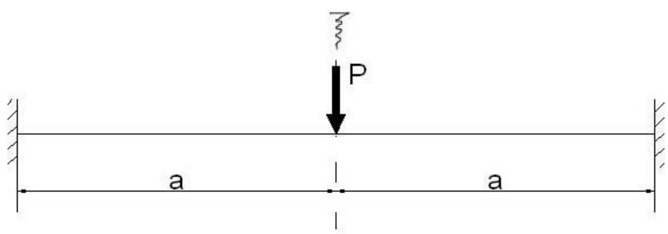


Fig. 8.7

Răspuns:

$$\phi(r) = \frac{P}{4\pi D} r \ln\frac{r}{a}$$

$$M_\theta(r=a) = \upsilon \frac{P}{4\pi}$$

- *Com:* $\left\langle M_r, M_\theta \right\rangle = \dfrac{FL}{L} = F$ (unităţi de forţă)

- **Ex : 8.12**

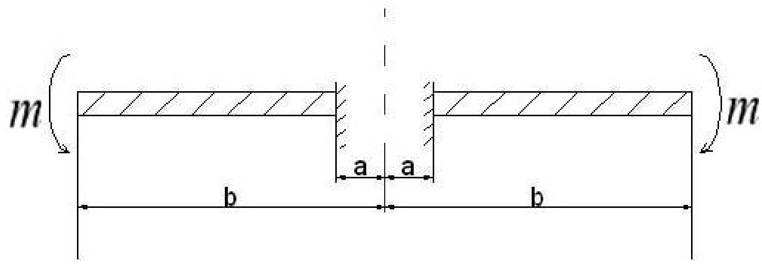


Fig. 8.8

Răspuns:

$$M_\theta(r=b) = m\,\beta\left[(1+\upsilon)\frac{b^2}{a^2} - (1-\upsilon)\right] \quad \textit{unde} \quad \beta = \frac{1}{(1+\upsilon)\dfrac{b^2}{a^2} + (1-\upsilon)}$$