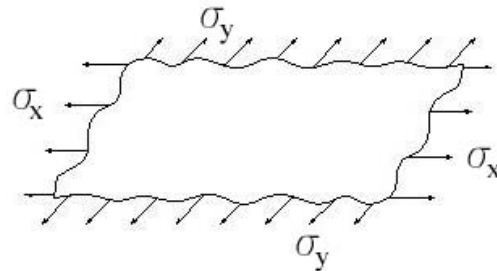


## LECȚIA 9: TEORIA DE MEMBRANĂ A REZERVOARELOR DE ROTAȚIE (DE REVOLUȚIE)

### 9.1 Teoria de membrană (fig. 9.1)



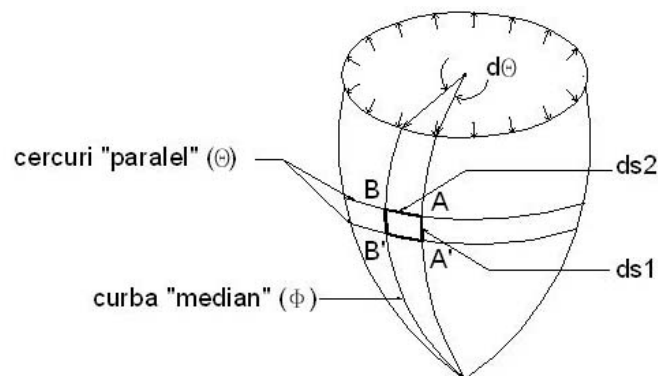
**Fig. 9.1:** Starea de tensiune de tip membrană ( $PP_\sigma$ , incompletă)

➤ *Com:*  $\tilde{\sigma}_{PP\sigma} \rightarrow \text{fara } \tau_{xy}$

**Definiția 1.** Membrană = placă extrem de subțire [(folie, exemplu: membranele din aparatul de telefon, invenție (Marconi)].

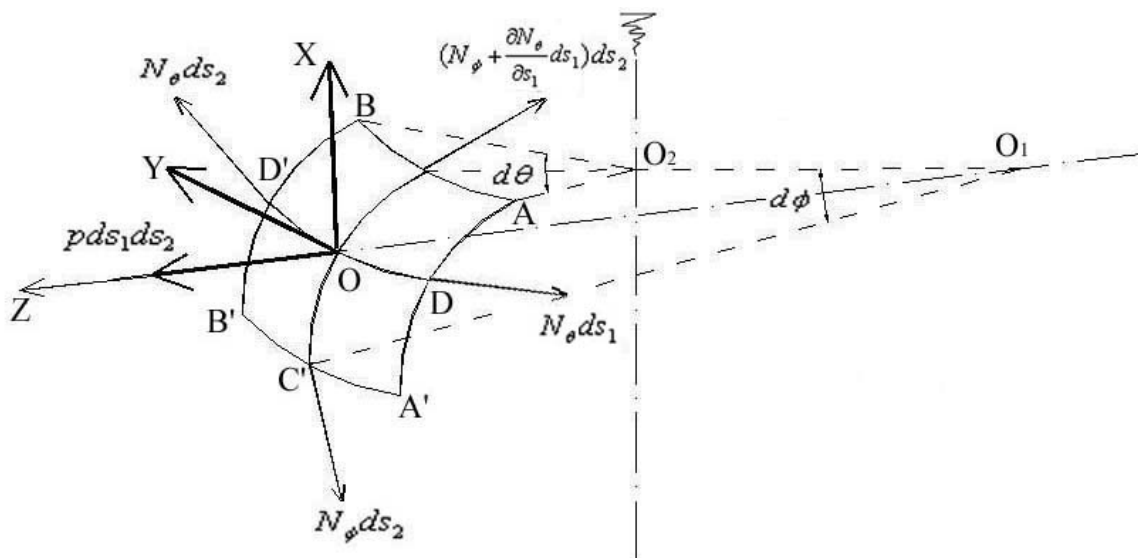
Caracteristicile definitorii ale teoriei de membrană :

- $M_r, M_\theta$  - neglijabile !
- variabile de lucru  $\phi$  și  $\theta$  :  $\phi$  pe arcul median;  $\theta$  pe cercul paralel.
- $D \cong 0$  (rigiditate la încovoiere neglijabilă)



**Fig. 9.2:** Structuri ‘‘pneumatice’’; rezervoare; teoria de membrană

➤ *Com:* Teoria se extinde și la structurile gonflabile și la rezervoarele de revoluție, la care rigiditatea cilindrică poate fi neglijată:  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \cong \text{neglijabila}$



**Fig.9.3** Geometria și echilibrul membranelor de revoluție (cu simetrie de rotație)

$OO_1 = R_\phi =$  raza de curbură în planul meridian;

$OO_2 = R_\theta =$  raza de curbură în planul paralel;

Reperul cartezian OXYZ:

OX = direcția tangentă la curba meridian ( $\phi$ );

OY = direcția tangentă la curba paralel ( $\theta$ );

OZ = direcția normalei exterioare în punctul O.

Coordonate curbilini ortogonale:

$$ds_1 = CC' = R_\phi d\phi$$

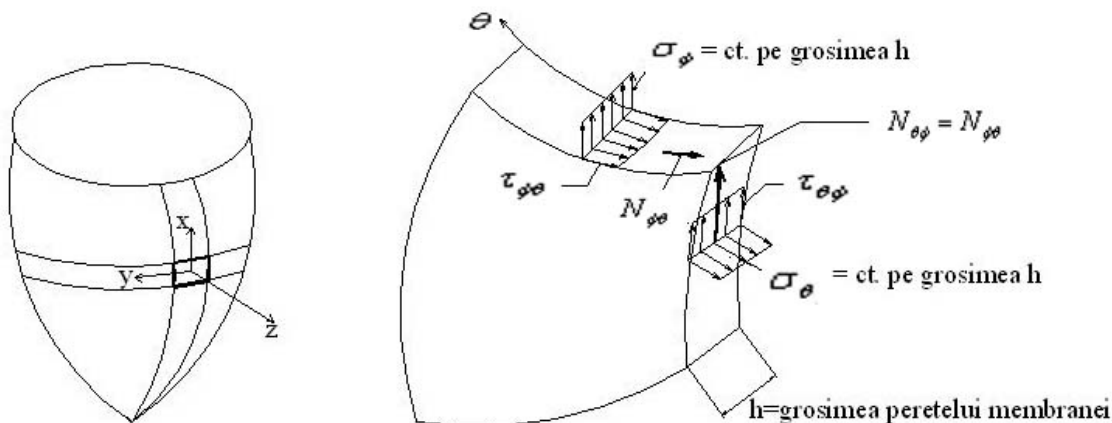
$$ds_2 = DD' = R_\theta d\theta$$

Elementul de arie:

$$dA = \text{aria } ABB'A' = ds_1 ds_2 = R_\phi R_\theta d\phi d\theta$$

➤ **Ex. 9.4** Să se prezinte elementele geometrice de lucru în teoria rezervoarelor de rotație. Completați prezentarea din fig. 9.4.

➤ *Com:* Eforturile de forfecare  $N_{\phi\theta} = N_{\theta\phi}$  sunt identic nule în membranele de revoluție, încărcate și rezemate axial-simetric.



**Fig. 9.4(a):** Geometria (de completat)

**Fig.9.4(b):** Tensiuni și eforturi de membrană

**Fig.9.4:** Tensiuni și eforturi în teoria de membrană

Eforturile de membrană se definesc astfel (fig. 9.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} N_\phi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta dh = \sigma_\phi \cdot h \text{ si } \text{ asemanator} \\ N_\theta = \sigma_\theta h \\ N_{\theta\phi} = \tau_{\theta\phi} h \end{array} \right.$$

( $N_{\theta\phi}$  sunt identic nule în membrana de revoluție încărcată și rezemată axial-simetric).

### 9.2. Ecuațiile de echilibru diferențial

➤ **Ipoteze de lucru**

**I<sub>1</sub>:** h neglijabil dar numai pentru factorul de rigiditate cilindrică:  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \cong 0$

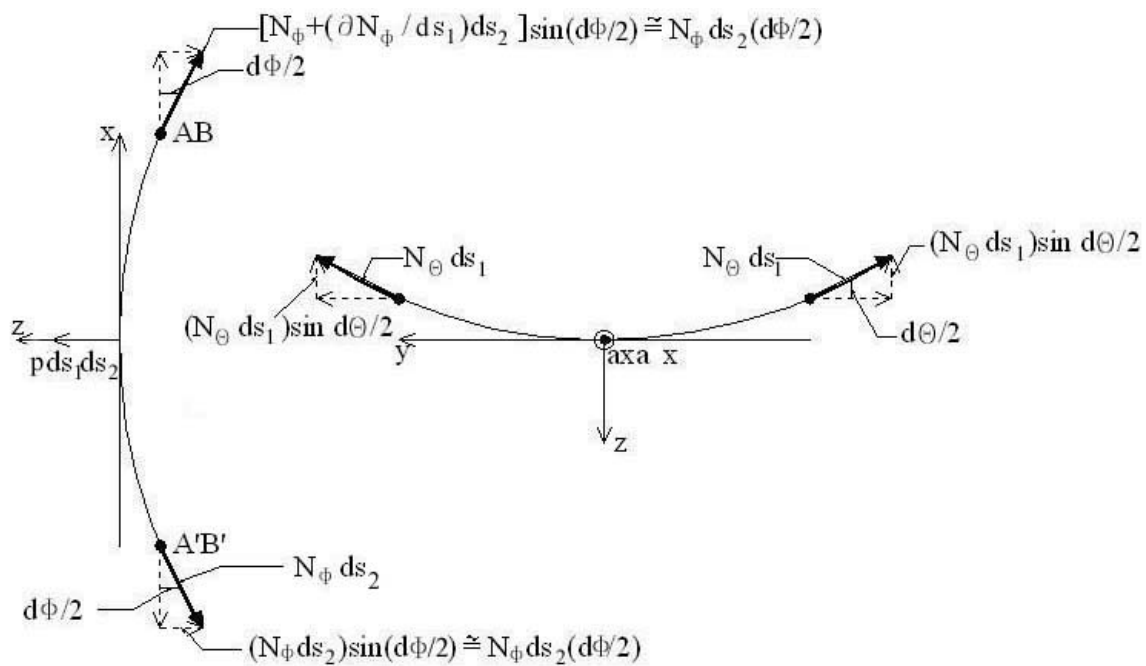
➤ *Com:* h se folosește pentru a defini eforturile  $N_\phi$  și  $N_\theta$  (fig.9.4 b)

**I<sub>2</sub>:** Acceptăm calculul de ordin I (pentru  $N_\phi$ ) care are creșteri diferențiale de lineare de la C la C.

➤ *Com:* **I<sub>2</sub>**  $\sin \frac{d\phi}{2} \cong \frac{d\phi}{2} \rightarrow \sin \frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2}$

**I<sub>3</sub>:** Neglijăm eforturile tangențiale  $N_{\theta\phi} = N_{\phi\theta} \cong 0$

### 9.3. Ecuațiile de echilibru (fig. 9.5)



**Fig.9.5:** Forțele de echilibru diferențial  $\sum Z = 0; \sum X = 0; \sum Y = 0$

Prezintă interes numai ecuațiile de proiecție  $\sum Z = 0$ ;  $\sum X = 0$ ; ecuația  $\sum Y = 0$  este identic satisfăcută în cazul teoriei de membrană-modelul axial-simetric.

În ecuația  $\sum Z = 0$  se rețin relațiile *calculului de ordinul I*:  $\sin \frac{d\phi}{2} \cong \frac{d\phi}{2}$  și se neglijează

creșterea diferențială  $\frac{\partial N_\phi}{\partial s_1} ds_1$ ; rezultă:

$$\downarrow \sum Z = 0 \rightarrow p ds_1 ds_2 - 2N_\phi ds_2 \frac{\sin d\phi}{2} - 2N_\theta ds_1 \frac{\sin d\theta}{2} \Rightarrow p ds_1 ds_2 = N_\phi ds_2 d\phi + N_\theta ds_1 d\theta = 0$$

$$\begin{cases} d\phi = \frac{ds_1}{r_1} \\ d\theta = \frac{ds_2}{r_2} \end{cases} \Rightarrow p ds_1 ds_2 = \frac{N_\phi}{r_1} ds_1 ds_2 + \frac{N_\theta}{r_2} ds_1 ds_2$$

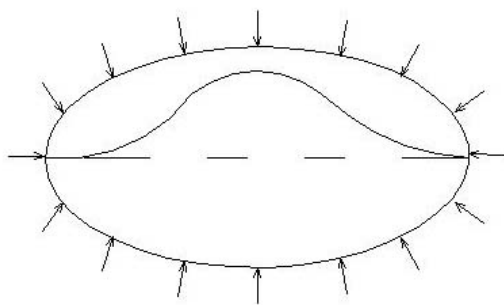
$$\Rightarrow p = \frac{N_\phi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} \rightarrow \text{sau inlocuind : } r_1 = R_\phi. \text{ si } r_2 = R_\theta \text{ rezulta ecuatia lui Laplace:}$$

$$\text{(Laplace): } \boxed{\frac{N_\phi}{R_\phi} + \frac{N_\theta}{R_\theta} = p}$$

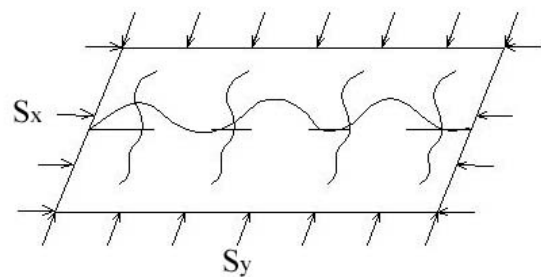
## 9.4. Concluzii practice .Aplicații

Ecuația de echilibru Laplace pune în relație eforturile axiale de membrană  $N_\phi$ ,  $N_\theta$  cu *curburile* membranei  $\frac{1}{R_\phi}$ ;  $\frac{1}{R_\theta}$

Aceste rezultate vor fi utilizate în teoria stabilității plăcilor plane - [fig.9.6(a,b)]



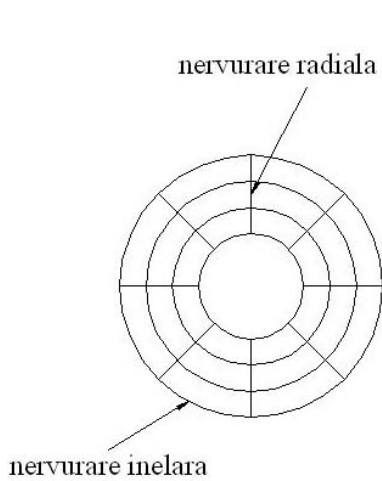
**Fig.9.6(a):** Placă circulară încărcată radial cu sarcina  $S \Rightarrow$  burdușire



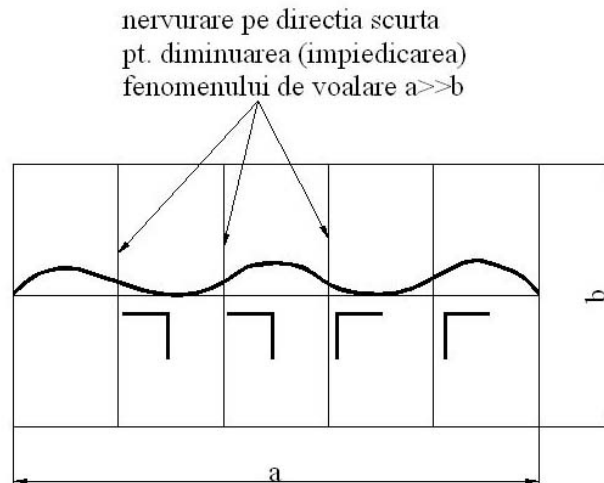
**Fig. 9.6(b):** Placă dreptunghiulară încărcată pe două direcții ( $S_x$ ,  $S_y$ )  $\Rightarrow$  voalare

**Fig.9.6:** Fenomenele de **burdușire și de voalare**

Măsuri tehnice de asigurare împotriva pierderii stabilității prin burdușire sau voalare, sunt *procedeele de nervurare* [fig. 9.7(a,b)].



**Fig. 9.7(a):** nervurare radială



**Fig. 9.7(b):** Pentru grinzi cu inimă înaltă

**Fig. 9.7:** măsuri de asigurare împotriva fenomenelor de pierdere a stabilității

- *Com:* Teoria pentru fenomenul de voalare (burdușire) : în aceste zone, teoria de membrană, care este comprimată, se aplică punând  $p = 0$  și înlocuind curburile cu funcțiile (vezi RM).

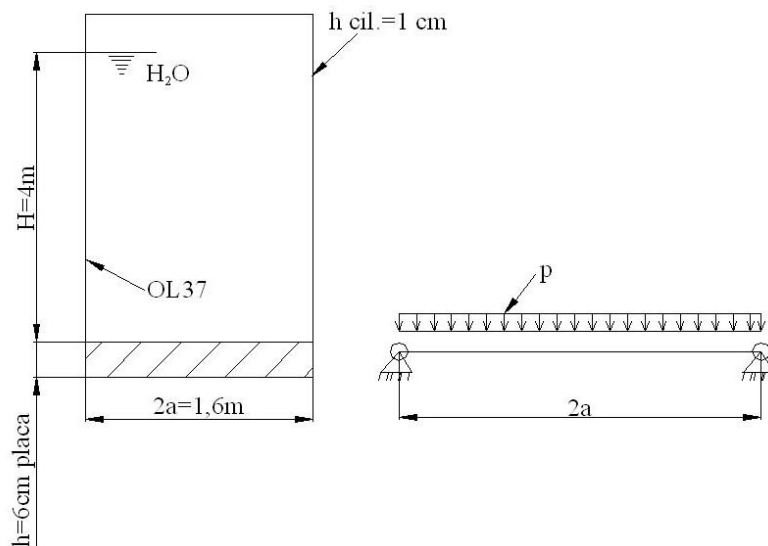
Teoria pierderii stabilității prin voalare a fost elaborată acum un secol (~ 1910: KÁRMAN; ~ 1920 FÖPPL)

$$\frac{1}{R_\phi} \cong -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{1}{R_\theta} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

- **Ex. 9.5** Rezervor cilindric, OL37.(fig. 9.8). Date: cilindru- teoria de membrană ,placă circulară - teoria **PL-PPS**

Se cer : 1. eforturile  $N_\phi, N_\theta$  în cilindru.

2. eforturile  $M_\theta, M_r$  și  $w_{\max}$  în placa circulară.



Placă circulară încărcată cu sarcina uniformă(introdusă de greutatea apei, înălțimea H

**Fig. 9.8** Pentru enunțul ex. 9.5

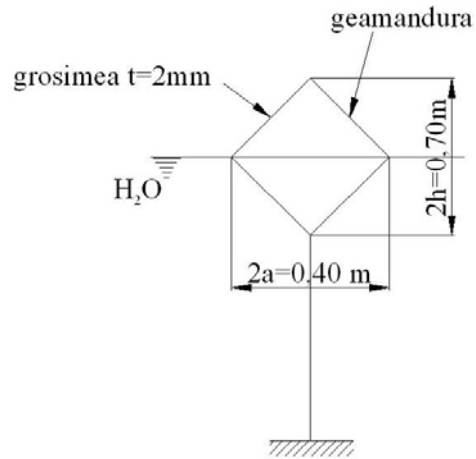
➤ **Ex. 9.6 : Calcule de tip membrană pentru o geamandură (fig. 9.9)**

Se cere : 1.  $T = ?$  în firul de fixare.

Indicație: Se folosește formula lui Arhimede.

2. Diagramele  $N_\phi$ ,  $N_\theta$  în geamandură.

**Indicație:** Calculați  $\gamma_{OL}$  astfel încât geamandura să se afle în situația din figură.



**Fig. 9.9:** Pentru enunțul Ex: 9.6