

LECȚIA 10: PLĂCI PLANE ÎN COORDONATE CARTEZIENE

10.1 Clasificare ;notații de lucru; modele de calcul.

Date: a, b, h , - grosimea plăcii E, ν ; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ = rigiditatea cilindrică a plăcii

$p(x, y)$ – încărcare distribuită (acționează pe direcția z); încărcare normală pe planul median OXY; a, b = laturile plăcii dreptunghiulare.

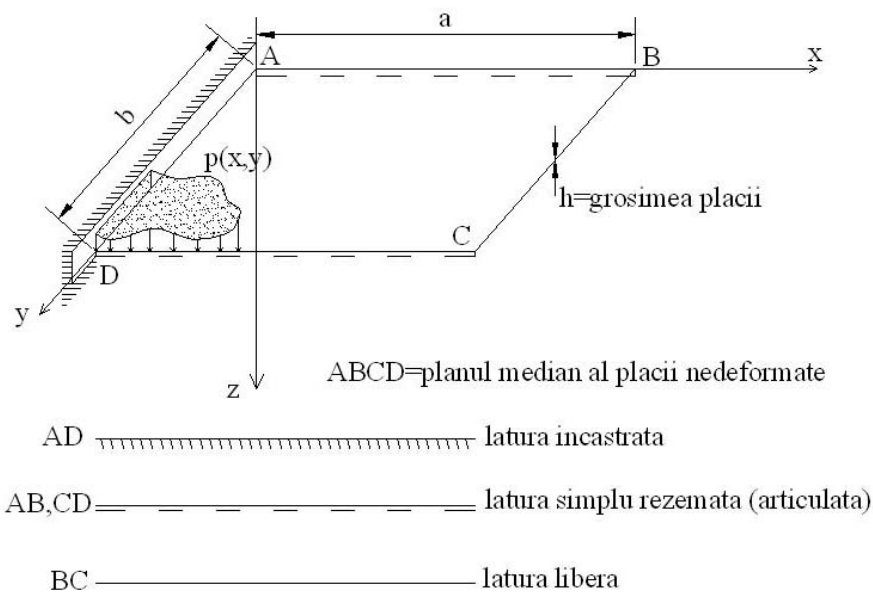


Fig.10.1: Definierea și clasificarea plăcilor plane; coordonate carteziene; oxy = planul median

➤ *Com:* Pot exista și alte situații :

- încastrare parțială
- reazeme late
- plăci pe mediu elastic (dale, radiere,.....)

Scurt istoric: Modelele de calcul pentru analiza plăcilor plane au evoluat în ultimele două secole astfel:

- ~ 1760: LGK: Teoria (modelul) Lagrange-Sophie Germain – Kirhhoff
- ~ 1910: CSR: Teoria (modelul) Cosserat
- ~ 1950: MRN: Teoria (modelul) Mindlin – Reissner - Naghdi

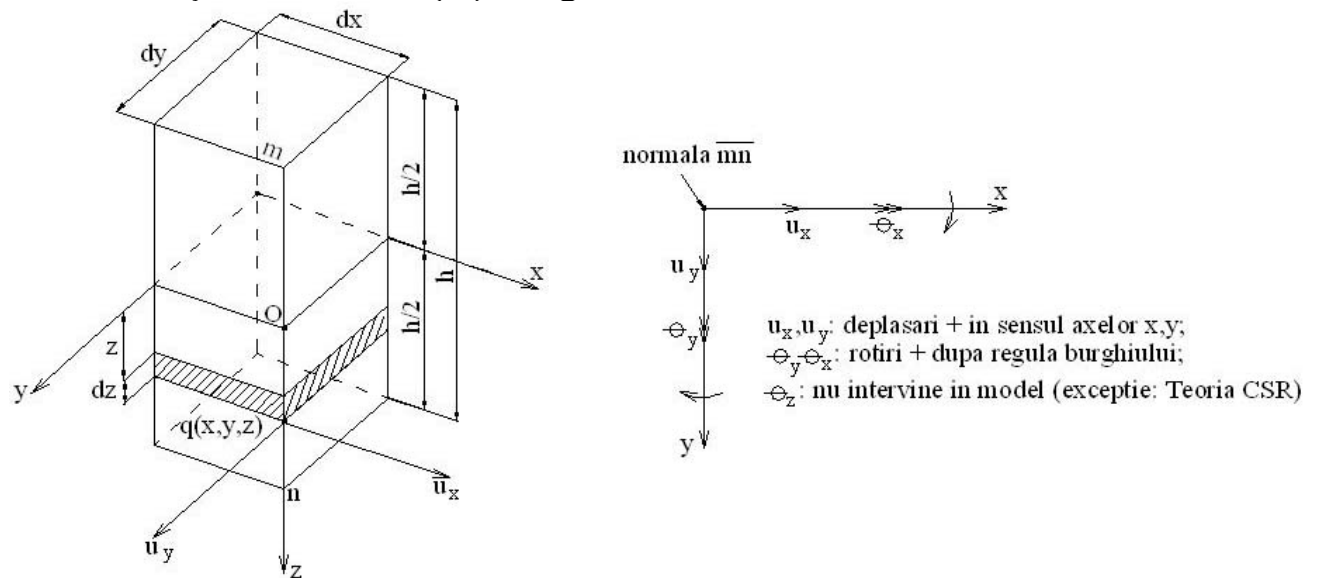
➤ **Ex. 10.1.** Definiți plăcile plane și modul lor de rezemare , clasificarea în funcție de raportul $\frac{l}{h}$: $l = \max(a, b)$; h = grosimea plăcii.

➤ Clasificarea plăcilor; modele de calcul adecvate:

- $\frac{l}{h} \leq 2$: **bloc**, cuzinet \Rightarrow modelul de calcul TLE (3 Dim)
- $2 < \frac{h}{l} \leq 5 \div 6$ **plăci groase** , teoria MRN (în care se ține seama de influența forței tăietoare T)
- $5 \div 6 < \frac{l}{h} \leq 10 \div 20$ **plăci de grosime medie**, teoria MRN (în care se poate neglija influența (T);
- $10 \div 20 < \frac{l}{h} \leq 25 \div 50$ **plăci subțiri** (sau flexibile) teoria LGK; nu se ține seama de influența (T).;exemple:-planșee (construcții civile)
 - diafragme (la poduri)
- $25 \div 30 < \frac{l}{h} \leq 50 \dots \dots \dots 100$ **pânze subțiri** (plăci foarte subțiri)– teoria neliniară a elasticității TNE, teoria CSR
- $100 \leq \frac{l}{h}$ **membrane** ; teoria de membrană: exemple: folii, suprafețele gonflabile, foi de cort etc...!

➤ Com: În cursul de față lucrăm (dezvoltăm) numai teoria LGK (Lagrange- Sophie – Germain- Kirhhoff)

10.2. Ecuațiile studiului (G) – fig.10. 2



a) Elementul de placă $hdx dy dz$

b) Normala \overline{mn} , conținând punctual $q(x,y,z)$ de cotă

Fig. 10.2: Geometria plăcii la nivelul normalei \overline{mn} ; notații de lucru; convenții de reprezentare și de semn algebric

Deplasările punctului $q(x,y,z)$ sunt: u_x, u_y, u_z (ca în TLE 3Dim) .Rotirile normalei \overline{mn} , care trece prin punctual q se notează cu $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ (vezi fig.10.2b).

Relațiile între deplasări și rotații sunt:

$$(1) \begin{cases} u_x(x, y, z) = \theta_y(x, y)z \\ u_y(x, y, z) = -\theta_x(x, y)z \end{cases}$$

➤ *Com:* $\theta_z(x, y) = ?$ (rotirea normalei \overline{mn} în jurul axei proprii, adică a axei z) a condus istoric vorbind, la diverse teorii (modele), astfel:

I. Teoriile **LGK** și **MRN** utilizează $\theta_z = 0$ adică, de fapt nu utilizează θ_z ; aceste teorii sunt considerate, în prezent, teorii clasice;

II. Teoria **COSSERAT** (1900) utilizează $\theta_z \neq 0$. Teoria **CSR** este considerată teorie neclasică (modernă); este utilizată azi, preponderent, pentru plăcile composite.

Com: **LGK** (Lagrange – Sophie Germain – Kirchhoff) neglijează influența forței tăietoare (T) asupra normalei \overline{mn} . \overline{mn} este o **normală rectilinie și inextensibilă** ($\varepsilon_z = 0$) în teoria **LGK**.

MRN: Mindilin – Naghdi – Reissner se ține seama de influența forței tăietoare (T).

Teoriile **LGK** și **MRN** sunt prin concepție (teoretică) analoge modelelor de calcul din RM, fundamentale pe ipoteza lui Bernoulli și respectiv, Timoshenko (fig. 10.3)

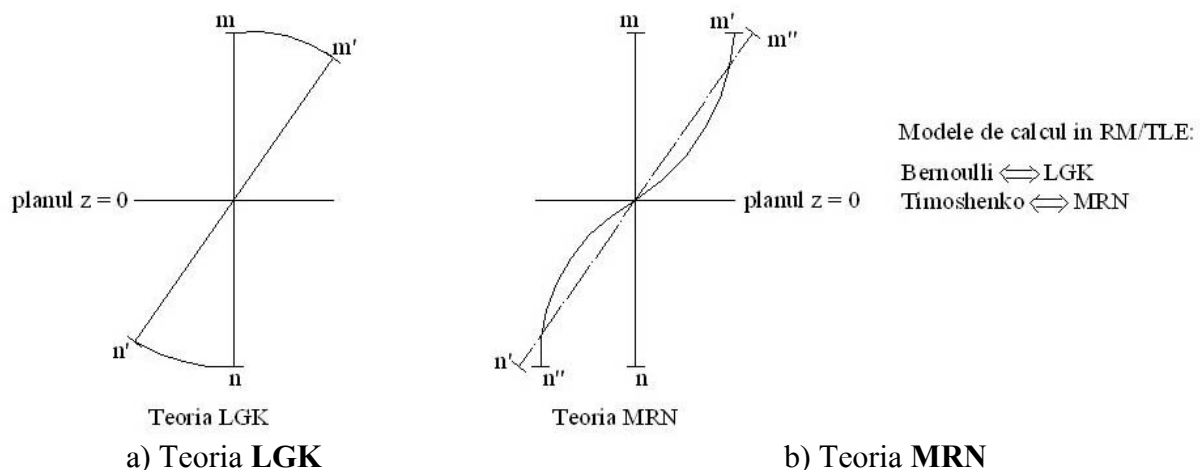


Fig. 10.3 Modele de calcul **LGK** și **MRN**

În continuare se va dezvolta numai teoria **LGK**, al cărei câmp de aplicații cuprinde plăcile subțiri (flexibile).

Ipoteza LGK: $\overline{mn} \Rightarrow \overline{m'n'} = \text{normală rectilinie și inextensibilă}$; această ipoteză conduce la relațiile:

$$(2) \begin{cases} u_z(x, y, z) = u_z(x, y, z = w(x, y)) \\ (\varepsilon_z = 0) \quad \text{condiția de inextensibilitate} \end{cases}$$

Inextensibilitatea ($\varepsilon_z = 0$) este utilizată în **teoriile clasice (LGK și MRN)**, fiind folosită pentru definirea funcției deplasare $w(x, y)$ pentru orice punct q situate pe normala \overline{mn} .

- **Ex.10.2.** Enunțați teoriile plăcilor și comentați deplasările, rotațiile, și inextensibilitatea normalei mn .

Deformații specifice: Se rețin 5 componente distincte din matricea $\underline{\varepsilon}_{(6 \times 1)}$, notate $\underline{\varepsilon}_{PPL(3 \times 1)}$ și $\underline{\varepsilon}_{PPL(2 \times 1)}$ astfel:

$$(3) \quad \underline{\varepsilon}_{6 \times 1} \stackrel{TLE}{=} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \dots\dots \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \varepsilon_z = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{\varepsilon}_{PL} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(3 \times 1)} \quad si \Rightarrow \underline{\gamma}_{PL} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}_{(2 \times 1)}$$

- **Com:** În studiul **(G)** al deformatelor lucrăm cu $\underline{\varepsilon}_{PP(5 \times 1)}^{MNR}$; în teoria **LGK**, deoarece neglijăm influența (T), lucrăm cu $\underline{\varepsilon}_{(3 \times 1)}^{LGK}$; iar $\underline{\gamma}_{2 \times 1}^{LGK} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = 0$ (neglijabil)

- **Concluzie:** Reținând numai teoria **LGK** \Rightarrow (4); $\underline{\varepsilon}^{LGK} = \underline{\varepsilon}_{PP} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$ astfel încât relațiile

(G₂) (între deformațiile specifice și deplasări) se scriu:

(G₂)^{LGK}: (5)	$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} z \stackrel{RM}{=} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} z \stackrel{RM}{=} -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \quad si \quad \underline{\gamma}_{PL}^{LGK} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}_{(2 \times 1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} z - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} z = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \end{cases}$
---	--

- **Com:** Rezultatele (5) pot fi comparate cu ușurință cu cele din RM unde, dacă x, y sunt axele principale în planul secțiunii, iar z este axa barei, atunci:

$$(RM): \begin{cases} \theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

Așadar, în teoria **LGK**, avem relația (6):

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \\ \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \\ \gamma_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \end{cases}$$

10.3. Studiul (F) teoria LGK

Se lucrează cu indice PP ,(probleme plane , plăci plane) unde: $\underline{\sigma}_{PP} = \underline{\sigma}_{PL}^{LGK}$ și $\underline{\tau}_{PL}^{LGK} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} =$ neglijabil

$$(F) \quad \underline{\sigma}_{PP(3 \times 1)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{E}}_{(3 \times 3)} \underline{\underline{\varepsilon}}_{PP(3 \times 1)}$$

- **Ex. 10.3** Să se obțină matricea $\underline{\underline{E}}_{3 \times 3}^{-1}$; cunoscând $\underline{\underline{E}}$, în variantele de lucru: a) constantele Timoshenko (E, ν); b) constantele (L,G); indicație:

$$(7) \quad \underline{\underline{E}}_{PP} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{E}}_{PP}^{-1} = ?$$

10.4: Sinteza (G+F)

$$(8) \quad \underline{\sigma}_{PP} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\varepsilon}}_{PP} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \end{Bmatrix}$$

- **Ex.10.4** Dezvoltați (8) și obțineți expresiile pentru : $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

Răspuns :

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] z \\ \sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] z \\ \tau_{xy} = -\frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \end{cases}$$

10.5 Studiul (S)

(Sa) --- relații de echivalență pe elementul de placă (fig. 10.4)

(Sb) ---ecuațiile diferențiale de echilibru

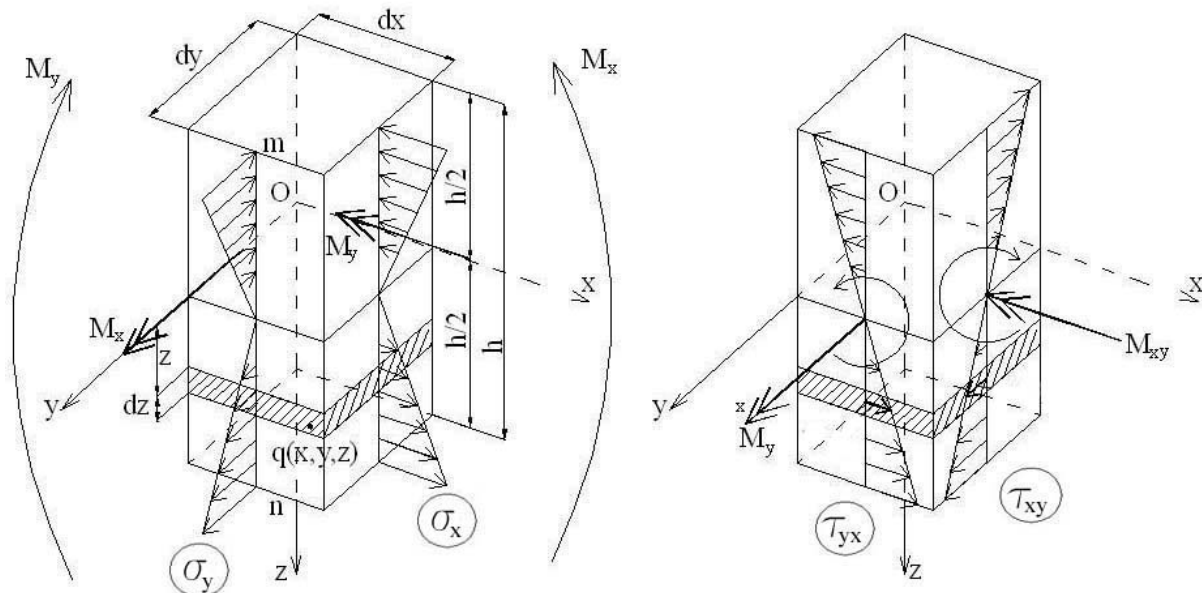


Fig. 10.4 Relațiile de echivalență între diagramele de tensiuni și momente

Studiul (Sa)

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z^2 dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

unde s-a notat cu D caracteristica denumită **rigiditatea cilindrică** a plăcii:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

➤ **Ex. 10.5** Reprezentați M_y și M_{xy} (torsiune) și obțineți expresiile eforturilor ; momente: M_x, M_y, M_{xy}

Rezultă: (9)
$$\begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

