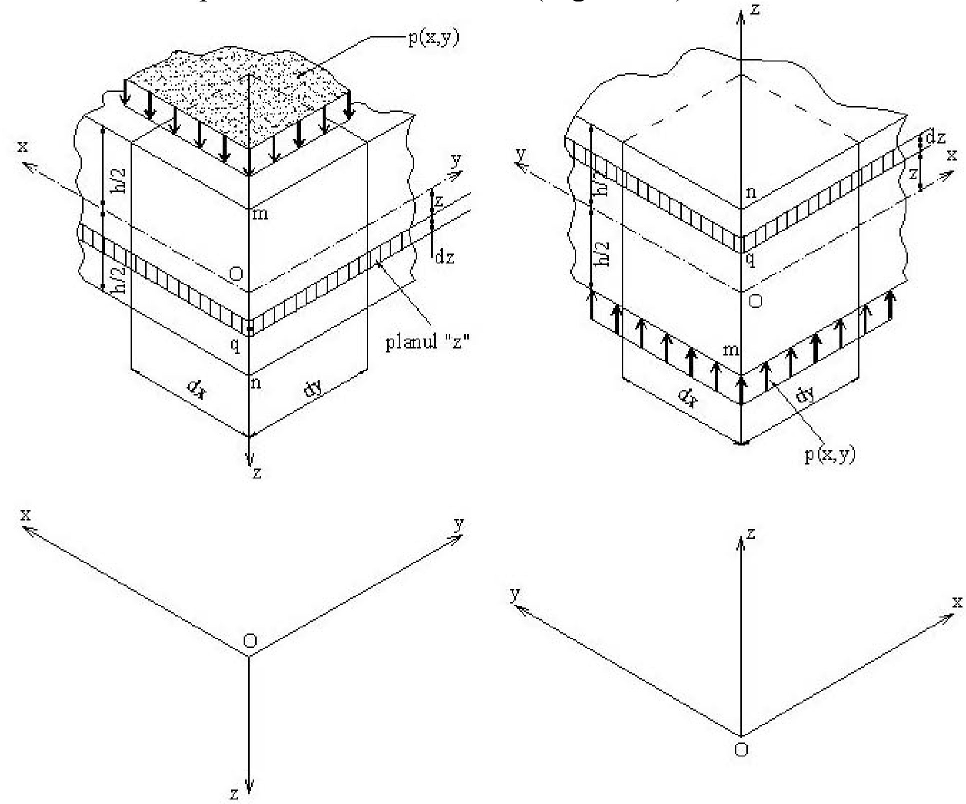
LECŢIA 11: PLĂCI PLANE -TEORIA LGK (CONTINUARE)

11.1 Rezumat

Reperele carteziene utilizate în teoria plăcilor plane sunt adecvate naturii problemelor de rezolvat (fig. 11.1), astfel încât axa z are direcţii şi sensul firului cu plumb (fig. 11.1a), sau axa z urmează sensul reperului cartezian al **MSD** (fig. 11.1b).



a) reperul cartezian utilizat la curs (în construcţii)

b) reperul cartezian utilizat în **MSD** (Mecanica Solidului Deformabil)

Fig.11.1 (a,b) Repere carteziene utilizate în teoria plăcilor plane

Se reamintesc notaţiile asociate normalei $\overline{mn}$ şi a vecinătăţii sale – elementul de placă hdxdy:

- încărcarea p(x,y)
- planul z, punctul q
- rigiditatea cilindrică a plăcii $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$

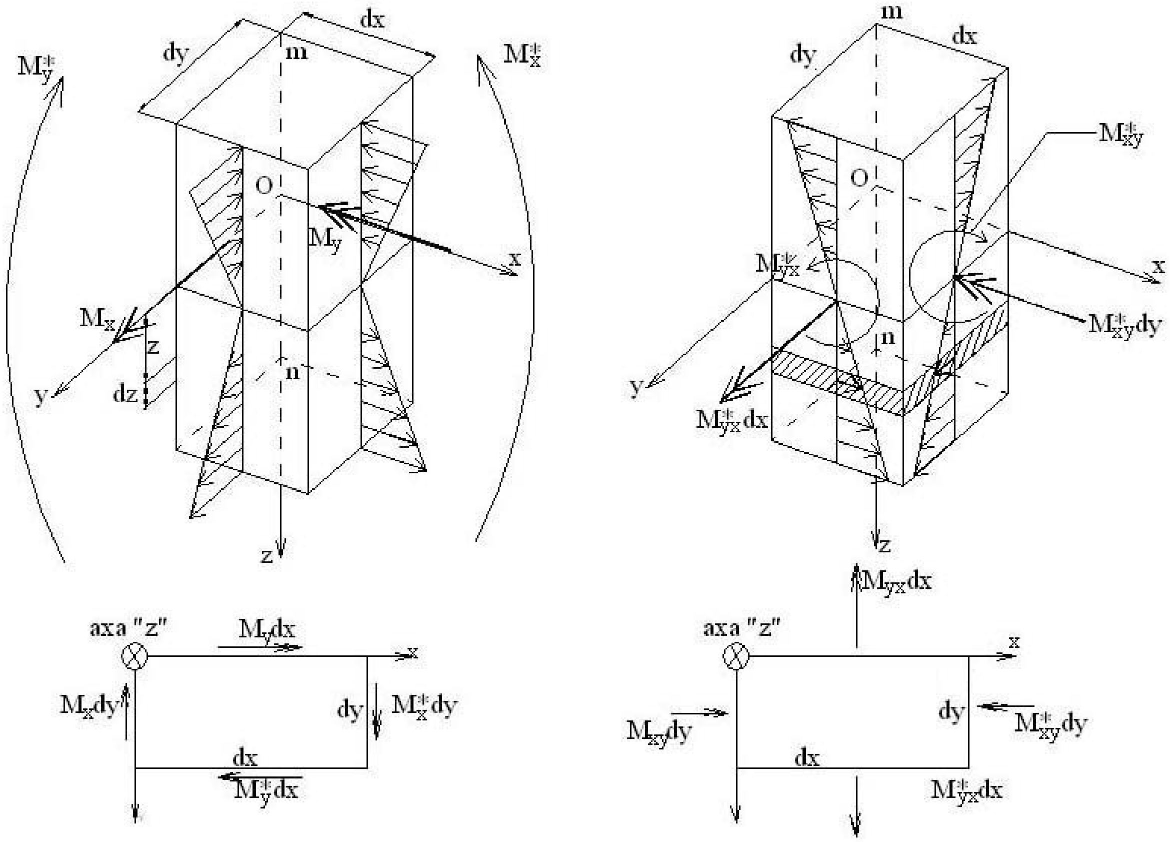
➢ **Ex:11.1:** Să reprezinte eforturile secţionale $\underline{M}$ şi $\underline{T}$ pe elemental de placă în variantele de reprezentare din fig 11.1 (fără creşteri diferenţiale).

Indicaţie:

$$\underline{M}_{(3\times1)} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \underline{T}_{(2\times1)} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}$$

- **Ex. 11.2** Prezentaţi efortule secţionale $\underline{M}$ cu ***creşteri diferenţiale*** (pentru scrierea ecuaţiilor diferenţiale de echilibru în teoria plăcilor , în variantele de reprezentare din fig. 11.1.

Indicaţie : urmând exemplificarea din fig. 11.2 , completaţi exerciţiul cu reprezentarea conform reperului **MDS** din fig. 11.1b.



$$M_x^* = M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \qquad M_{xy}^* = M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$$

$$M_y^* = M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \qquad M_{yx}^* = M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy$$

Fig. 11.2: Momente secţionale – reprezentare în reperul firului cu plumb (pentru construcţii)

Reperul cartezian pentru construcţii:

- reprezentare M_x, M_y şi creşterile diferenţiale M_x^*, M_y^*
- reprezentare M_{xy}, M_{yx} şi creşterile diferenţiale M_{xy}^*, M_{yx}^*

- **Ex. 11.3:** Reprezentaţi eforturile secţionale $\underline{T} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}$ cu creşteri diferenţiale (pentru scrierea ecuaţiilor diferenţiale de echilibru în teoria plăcilor).

Indicaţie: vezi fig. 11.3 pentru varianta de reprezentare a reperului cartezian pentru construcţii; realizaţi exerciţiul folosind apoi reperul din fig. 11.1b

11.3 Studiul **Sb**: Ecuaţiile diferenţiale de echilibru (fig. 11.4)

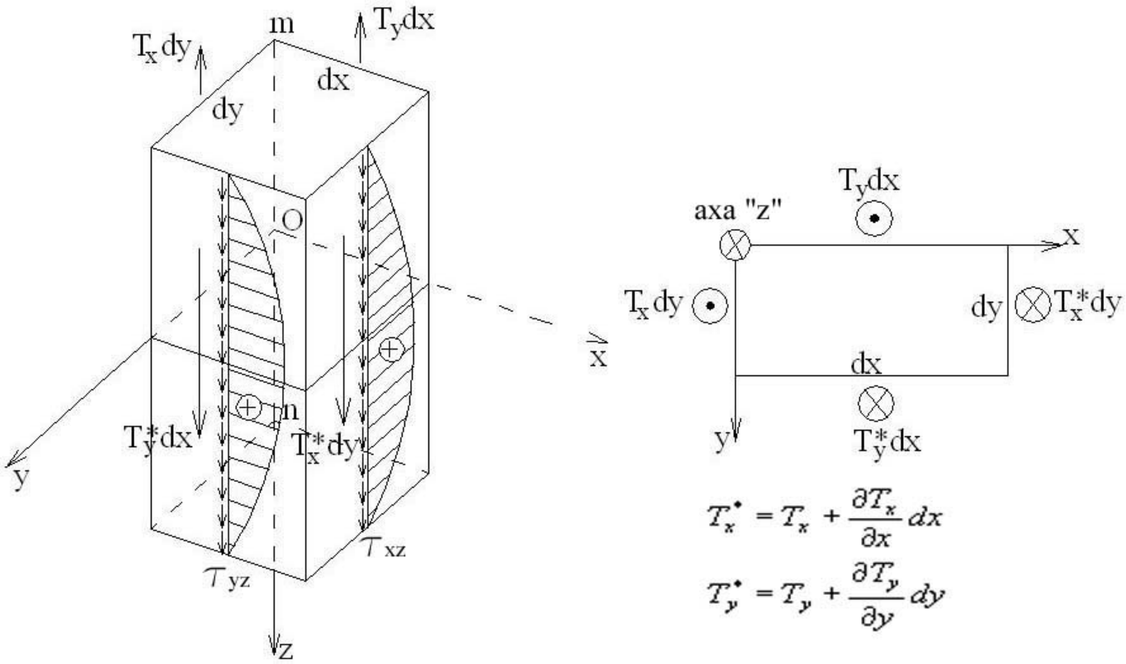


Fig. 11.3 Eforturi secţionale de tip forţe tăietoare în reperul cartezian pentru construcţii; reprezentarea T_x, T_y şi creşterile diferenţiale T_x^*, T_y^*

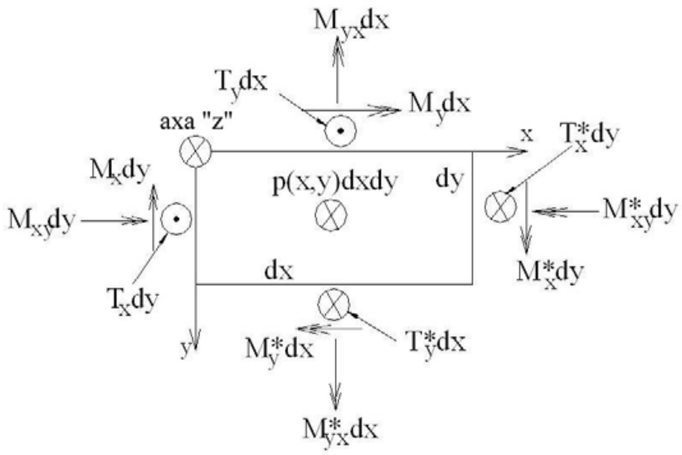


Fig. 11.4 Câmpul eforturilor secţionale pentru studiul (Sb) în teoria plăcilor (ecuaţiile diferenţiale de echilibru)

Recapitulare Studiul (S) - **(Sa)** relaţii de definiţie pentru $\underline{M}$ şi $\underline{T}$ (vezi şi lecţia 10)
-**(Sb)** ecuaţiile diferenţiale de echilibru ale câmpului eforturilor secţionale (fig. 11.4)

În Studiul **(Sb)** se scriu 3 ecuaţii de echilibru vectorial (fig. 11.4):

$$\textbf{(Sb)}\ (1, 2, 3)\quad \begin{cases} \sum \vec{M}_{axa\ x} = 0 \\ \sum \vec{M}_{axa\ y} = 0 \\ \sum \vec{Z} = 0 \end{cases}$$

- *Com:* 5 necunoscute ($\underline{M}_{(3x1)}$ şi $\underline{T}_{(2x1)}$) numai 3 ecuaţii de echilibru; gradul de nedeterminare statică (interioară) GNSint = 5 - 3 =2

Cele 5 eforturi secţionale – necunoscute ale problemei **(Sb)** sunt:

$$\underline{M}_{(3x1)} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \underline{T}_{(2\times1)} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}$$

Reamintim că în **TLE** (3D) ; GNSint = 6 - 3 =3!
Se dezvoltă numai prima ecuaţie de echilibru vectorial din sistemul **(Sb);** celelalte două ecuaţii se prezintă ca ale unor exerciţii.

$$\underbrace{(M_y - M_y^*)}_{-\frac{\partial My}{\partial y}dydx}dx + \underbrace{(M_{xy} - M_{xy}^*)}_{-\frac{\partial Mxy}{\partial x}dxdy}dy + T_y dxdy \cong 0$$

Deoarece elementul de placă este un element diferenţial, rezultă dxdy ≠ 0; prin urmare :

$$-\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + T_y = 0$$

sau:

$$\sum \vec{M}_{axa\quad x} = 0 \ \Rightarrow\ \textbf{(Sb)}_{\textbf{(2)}}\ \ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = T_y$$

- **Ex: 11.4** Să se arate că ecuaţia de echilibru $\sum \vec{M}_{axa\ y} = 0$ conduce la rezultatul:

$$\textbf{(Sb)}_{\textbf{(1)}}\textbf{:}\ \ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = T_x$$

- **Ex : 11.5** Să se arate că ecuaţia de echilibru $\sum \vec{Z} = 0$ conduce la rezultatul:

$$\textbf{(Sb)}_{\textbf{(3)}}\textbf{ :}\ \ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial_Y} = -p(x, y$$

11.4 Analiza comparativă a teoriei **LGK** cu teoria grinzilor

Reamintim rezultatele din Rezistenţa Materialelor (RM)

$$
\textbf{RM} \;:\; \begin{cases}
(1)\;\; \dfrac{dT}{dx} = -p(x) \\
(2)\;\; \dfrac{dM}{dx} = T(x) \\
(3)\;\; \dfrac{d^2M}{dx^2} = \dfrac{dT}{dx} = -p(x) \\
(4)\;\; \dfrac{d^2w}{dx^2} = -\dfrac{M(x)}{EI} \Rightarrow \dfrac{d^3w}{dx^3} = -\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{M(x)}{EI}\right) = -\dfrac{T(x)}{EI} \\
(5)\;\;\; T(x) = -EI\dfrac{d^3w}{dx^2}
\end{cases}
$$

TLE / LGK: Scriem ecuaţiile de echilibru pentru momente astfel:

$$
\textbf{(Sb)}_{\mathbf{(1,2)}} \quad \left.\begin{aligned}
&(1)\;\; \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = T_x \\
&(2)\;\; \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = T_y
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{D^T_{PP(2x3)}} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}}_{\underline{M}_{(3x1)}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}}_{\underline{T}_{(2x1)}} \Rightarrow \underline{\underline{D}}^T_{(2x3)}\,\underline{M}_{(3x1)} = \underline{T}_{(2x1)}
$$

Aşadar, relaţia (2) din RM se generalizează sub forma ecuaţiilor $\mathbf{(Sb)_{(1.2)}}$ din **TLE/LGK**. Aceste ecuaţii pot fi exprimate în deplasări (funcţie w(x,y) şi derivatele ei) : $\mathbf{(Sb)_{(1)}}$**:**

$$
\frac{\partial}{\partial x}(M_x) + \frac{\partial}{\partial y}(M_y) = T_x
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left[-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \upsilon\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[-D(1-\upsilon)\frac{\partial^2 w}{dxdy}\right] = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 w\right) = T_x
$$

$$
unde: \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}
$$

- **Ex : 11.6** Aduceţi ecuaţia $\mathbf{(Sb)_{(2)}}$ $\dfrac{\partial M_y}{\partial y}x + \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x} = T_y$ la forma: $T_y = -D\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2 w\right)$

Aşadar, relaţia (5) din RM se generalizează sub forma:

$$
\underline{T}_{(2x1)}(x,y) = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = -D\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}_{(2x1)} \nabla^2 w
$$

11.5 Ecuaţia diferenţială de ordinul IV a plăcilor plane în coordonate carteziene (sau ecuaţia Lagrange - Sophie Germain)

Indicaţii: vezi lecţia 8 (plăci plane circulare): $\nabla^4 w(x,y) = \dfrac{p(x,y)}{D}$

Rezolvare: Ecuaţia de proiecţie **(Sb)$_{(3)}$** $\sum \vec{Z} = 0$ a condus în **Ex 11.5** la rezultatul:

$$\textbf{(Sb)}_{(3)}\textbf{:}\quad \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -p(x,y)$$

Introducem:

$$\left.\begin{aligned} T_x &= -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 w\right) \\ T_y &= -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2 w\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -D\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nabla^2 w) - D\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\nabla^2 w) = -p(x,y)$$

Rezultă ecuaţia Lagrange – Sophie Germain:

$$\boxed{\nabla^2\left(\nabla^2 w(x,y)\right) = \frac{p(x,y)}{D} \qquad \text{sau} \quad \nabla^4 w(x,y) = \frac{p(x,y)}{D}}$$

Modelul complet constă din introducerea condiţiilor la limită **(S3)** şi **(G3),** dezvoltate în paragraful următor.

11.6 Condiţii la limită (de rezemare) – fig.11.5

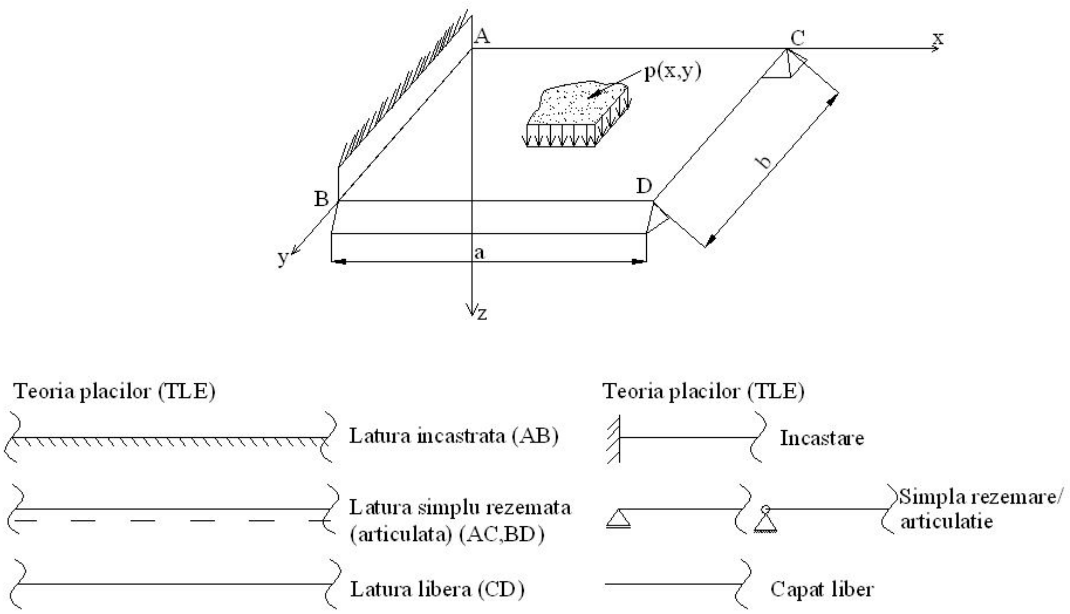


Fig.11.5 Plăci dreptunghiulare . Condiţii la limită (tipuri de rezemare)

- *Com* : Se prezintă numai două tipuri de rezemare: latura încastrată şi latura simplu rezemată (articulată);

- *Com*: Latura liberă nu este examinată în cursul de faţă! justificare: numai pentru cele două tipuri de rezemare anunţate mai sus coondiţiile la limită **(G_3)** pot fi exprimate în deplasări, pentru latura liberă sunt necesare argumente preluate din studiul **(S_3)**, prezentate de Kirchhoff, pe care nu le dăm aici.

- *Com*: În teoria (clasică) a plăcilor , încărcările p(x,y) nu pot fi decât ***funcţii continue pe porţiuni***. Pentru a admite şi încărcări concentrate ar trebui aplicate metodele de lucru ale teoriei distribuţiilor (care se studiază în facultăţile de matematică). Pentru aplicaţiile practice (inginereşti) se utilizează:

MDF = Metoda Diferenţelor Finite
MEF = Metoda Elementului Finit

11.6.1 Latura încastrată (AB)

Condiţiile la limită sunt:

i. x=0 ; w(x=0; y) = 0

ii. $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{AB} = 0$ (dreapta de încastrare rămâne rectilinie ; curbura pe direcţia y este = zero)

iii. $\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{AB} = 0$ (condiţia de încastrare)

Condiţiile la limită sunt exprimate în deplasări , (sunt de tipul **(G3)**): $\begin{cases} i) & w = 0 \\ ii) & \frac{\partial_w}{\partial x}\Big|_{AB} = 0 \end{cases}$

11.6.2. Latura simplu rezemată (articulată) (AC, BD)

i. $\left.\begin{cases} (AC)\, y = 0; & w = 0 \\ (BD)\, y = 0; & w = 0 \end{cases}\right\}$ ecuaţia analitică a laturii respective

ii. $\left.\begin{cases} (AC)\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ (BD)\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases}\right\}$ latura rămâne rectilinie, curbura zero

iii. $M_y\Big|_{\substack{AC\\BD}} = 0 \Rightarrow -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \upsilon\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{=0}\right)\Bigg|_{\substack{AC\\BD}} \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{\substack{AC\\BD}} = 0$

Rămân condiţiile finale exprimate în deplasări (de tipul **G3**) : $\binom{AC}{BD}\begin{cases} i) w = 0 \\ iii)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$

➢ **Ex: 11.7** Să se scrie condiţiile de rezemare (la limită) pentru placa din fig. 11.6.
Scrieţi condiţiile la limită i) – iii) (mai puţin pe latura liberă), evidenţiind condiţiile de rezemare **(G3)** pe fiecare latură.

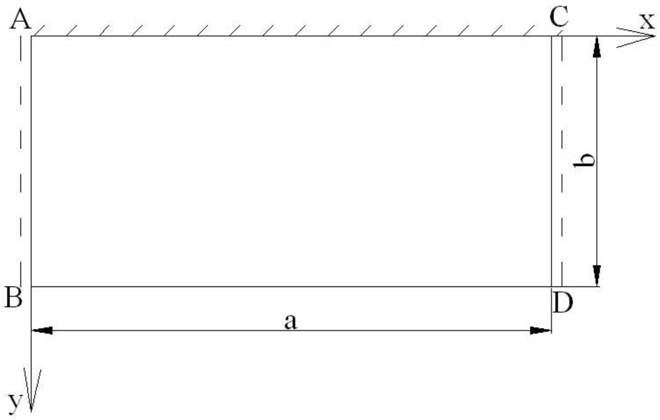


Fig. 11.6 (vedere de sus)