LECŢIA 12:PLĂCI PLANE ÎN COORDONATE CARTEZIENE: APLICAŢII MDF ŞI SOLUŢIA NAVIER

Metoda Diferenţelor Finite **MDF** este prezentată în extensor în **Anexa A** ; metoda Navier este importantă din două motive:

i. este o metodă exactă;
ii. este prima metodă de calcul – sub aspect istoric – deschizând metode şi procedee noi de calcul.

- **Ex: 12.1:** Utilizând raportul $\bar{r} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \geq 1 \rightarrow$ vezi Anexa A, $r = \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 1$ să se scrie operatorul $(\Delta_x^4)\nabla^4 w(x, y)$ în diferenţe finite.

- **Ex: 12.2:** Date a, p – sarcină uniform distribuită pe o placă pătrată, simplu rezemată pe contur: E= 300000 daN/ cm^2 ; $\upsilon = \frac{1}{6}$; $h = \frac{a}{16}$

Reţeaua **MDF** are pasul $\Delta x = \Delta y = \frac{a}{2}$ (fig.12.2).

Să se obţină $w_{\max}^{MDF} = ?$

Indicaţie: modelul MDF are o singură necunoscută, deci $w_{\max} = w_1$ (săgeata din centrul plăcii)

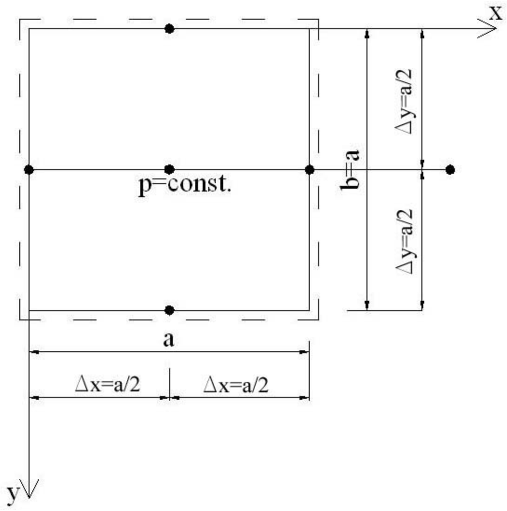

Fig.12.1: Pentru enunţul **Ex. 12.1**

Rezolvare:

Avem $r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \Rightarrow$ caroiajul este egal (de tip pătrat).- fig. 12.2

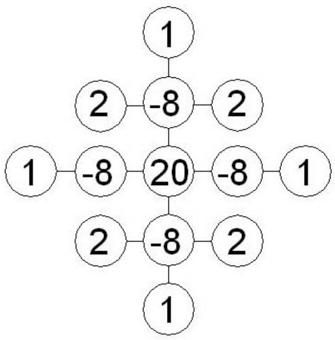

Fig. 12.2: "Moleculă" de lucru a metodei MDF pentru $r = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

$$w_1 : 20w_1 - 8(0+0+0+0) + 2(0+0+0+0) + 1(-w_1 - w_1 - w_1 - w_1) = \frac{p\Delta^4{}_x}{D}$$

$$16w_1 = \frac{p\dfrac{a}{2}^4}{4^4 D} = \frac{pa^4}{16D}; \quad sau \qquad w_1 = w_{\max} = \frac{pa^4}{256D}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)} = \frac{300000}{12\left[1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\right]} = ...w_1 = .$$

- **Ex.12.3:** Date : $p = p_0 \sin\dfrac{\pi x}{a}\sin\dfrac{\pi y}{b}$; D , a, b = a ; toate laturile sunt simplu rezemate (fig. 12.3.)

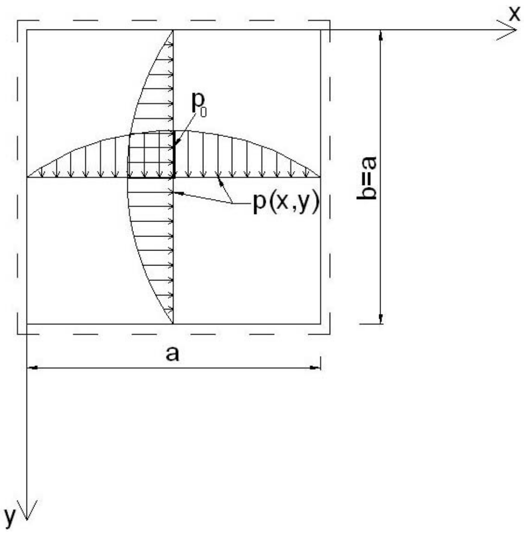

Fig. 12.3: Pentru enunţul **Ex. 12.3**

Se cere:

i. Semnificaţia parametrului: p_o se va arăta că p_o reprezintă intensitatea funcţiei – încărcare în centrul plăcii;

ii. Soluţia adoptată $w^{\sin}(x,y) = w_0 \sin\dfrac{\pi x}{a}\sin\dfrac{\pi y}{\underset{=a}{b}}$ se va arăta că w_0 este mărimea săgeţii în centrul plăcii;

iii. $p_o = ?$ astfel încât $w_0^{\sin} = w_0^{MDF}$ comparaţie între rezultatele din **Ex. 12.2** şi **Ex. 12.3**

Rezolvare :

i.

$$\begin{cases} p_0 = p(x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}) = p_0 \underbrace{\sin\frac{\frac{\pi a}{2}}{a}}_{=1} \underbrace{\sin\frac{\frac{\pi a}{2}}{a}}_{=1}; \text{ deci } p_0 \text{ reprezintă intensitatea încărcării sinusoidale în centrul plăcii} \\ w_0^{MDF} = ? \text{ (se va rezolva cu ecuaţia Ex.12.2)}; 16 w_1 = \frac{p_{unif}\left(\frac{a}{2}\right)^4}{D} = \frac{p_{unif}\, a^4}{16D} \Rightarrow w_{\max}^{MDF} = \frac{p_{unif}\, a^4}{256D} \end{cases}$$

ii. Arătăm că: $w_0 = w(x = \frac{a}{2}; y = \frac{a}{2}) = w_0 \underbrace{\sin\frac{\pi\frac{a}{2}}{a}}_{=1} \underbrace{\sin\frac{\pi\frac{a}{2}}{a}}_{=1} \Rightarrow w_0^{\sin} = w_{\max}^{\sin} = ?$

iii. Transfomăm încărcarea $\begin{cases} p(x,y) \ \ in \ \ p \Rightarrow (Ex.12.2) \ \ w_{\max}^{MDF} \\ w_{\max}^{\sin} = w_{\max}^{MDF} = ... \Rightarrow \frac{p_0}{p_{unif}} = ? \end{cases}$

- **Ex. 12.4:** Enunţ identic cu **Ex12.3** dar a = a ; b = 1,5 a

Indicaţie : $r = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{0{,}50a}{0{,}75a} = 0{,}667$

- *Com:* Principii de armare ale plăcilor din beton armat (fig.12.4)
  Aceste principii sunt inspirate din examinarea comportării plăcilor dreptunghiulare, simplu rezemate pe contur, încărcate uniform cu sarcina distribuită p = const.

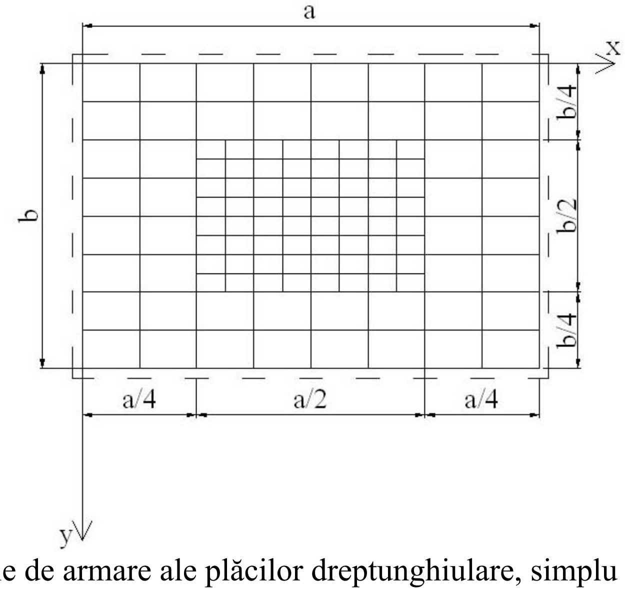

Fig. 12.4: Principiile de armare ale plăcilor dreptunghiulare, simplu rezemate pe contur.

Principiul 1: Armarea pe direcţia mai scurtă este mai densă.(de ce?)

Principiul 2: Zona centrală (de dim. $\frac{a}{2};\frac{b}{2}$) se armează mai dens (dublu) faţă de zonele marginale care ocupă dim. $(\frac{a}{4};\frac{b}{4})$

Principiul 3: Colţurile trebuie fixate împotriva tendinţei de ridicare.(de ce?)

- **Ex: 12.5** Prezentaţi şi explicaţi principiile de armare ale plăcilor dreptunghiulare simplu rezemate pe contur, încărcate cu sarcina uniform distribuită p = const.

- **Ex.12.6:** Date a,b,D,p = const. (placă încastrată pe contur, încărcată cu sarcină uniform distribuită) – fig. 12.5

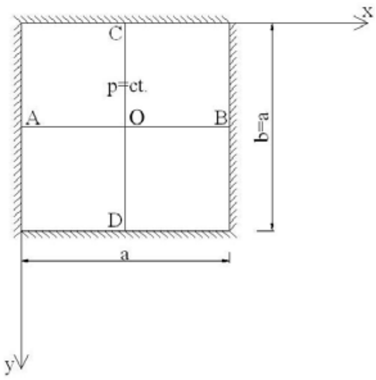

Fig. 12.5: Pentru enunţul **Ex. 12.6**

Se cere:

i. Soluţia $w/_{MDF} \Rightarrow w_{\max} = w_0 = ?$

ii.Soluţia $Mx_{\|x};My_{\|y}$ de-a lungul liniilor AB,CD,care trec prin centrul plăcii (fig. 12.5)

iii. Să se sugereze principiile de armare la o placă încastrată pe contur.

Indicaţie: pentru punctual iii **.**(fig. 12.6)

- p% armarea zonei centrale
- 1,5p% zonele laterale
- 2p% zonele de colţ

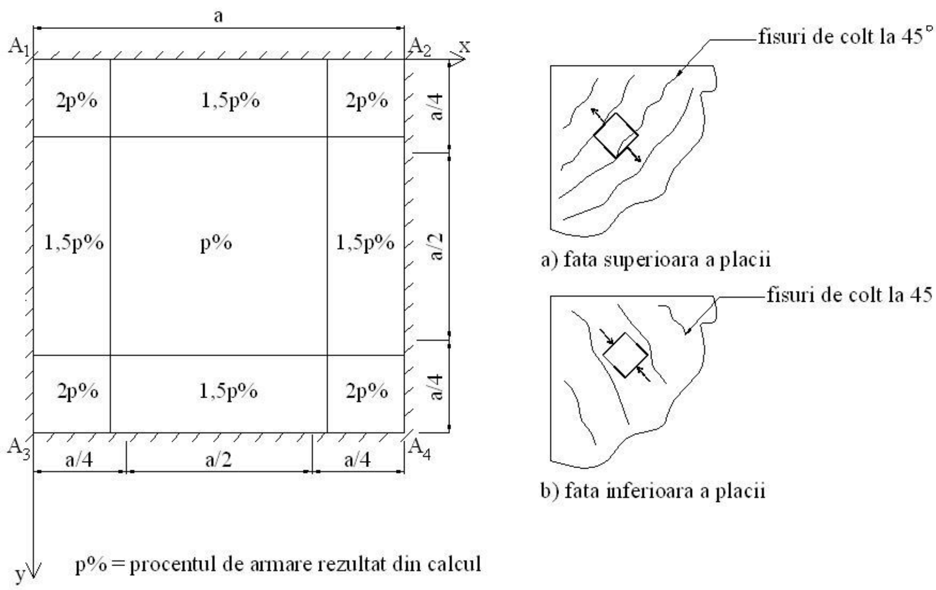

Fig. 12.6: Principii de armare a placilor patrate incastrate pe contur

Soluţia Navier pentru plăci dreptunghiulare , simplu rezemate pe contur: soluţia în serii duble Fourier

- **Ex. 12.7:** Date D, a, b, p(x,y). Se prezintă strategia de calcul a soluţiei w(x,y).

Soluţia Navier: constă în adaptarea soluţiei sub forma unei serii Fourier duble:

$$\boxed{w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}$$

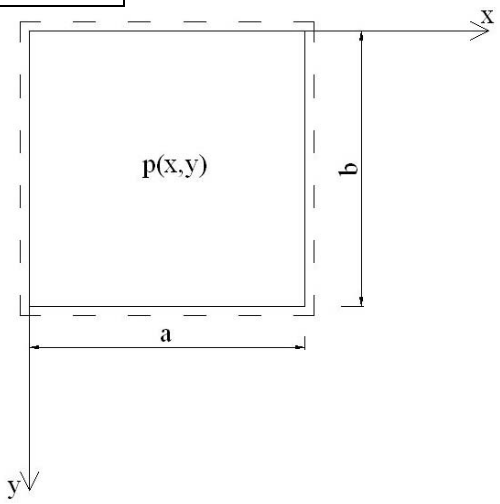

Fig. 12.7

(1) Soluţia se obţine calculând coeficienţii Fourier Amn adică rezolvând ecuaţia diferenţială **LGK**!

(2) $\nabla^4 w(x,y)=\dfrac{p(x,y)}{D}\Rightarrow A_{mn}$ (după determinarea coeficientului B_{mn}). Încărcarea p(x,y) se dezvoltă, de asemeni în serie Fourier dublă:

(3) $p(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}$ unde p(x,y) este încărcarea dată, cunoscută $\Rightarrow B_{mn}$.

- **Ex: 12.8:** Să se obţină coeficienţii B_{mn}; Date: încărcarea p(x,y)

(4) $B_{mn}=\dfrac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b p(x,y)\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}dxdy$

Dacă p = const. (încărcare uniform distribuită):

$$B_{mn}^{p=const}=\frac{4p}{ab}\int_0^a\int_0^b\left(\sin\frac{m\pi x}{a}dx\right)\left(\sin\frac{n\pi y}{b}dy\right)$$

- **Ex: 12.9:** Dezvoltaţi ecuaţia diferenţială $\nabla^4 w(x,y)$ cu soluţia (1) (Navier) şi obţineţi rezultatul:

(5) $\nabla^4 w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_{mn}\left[\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^4+2\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^4\right]\cdot\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\right\}$

- **Ex: 12.10:** Din ecuaţia (2) a strategiei de calcul a soluţiei (Ex. 12.7) obţineţi rezultatul: deduceţi relaţia:

(6) $A_{mn} = \frac{1}{\pi^4 D} \frac{B_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}$ Ex: m = 1; n = 3; A13=?

- **Ex: 12.11:** Dacă p = const. arătaţi că:

$w = \frac{16pa}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$ pentru: m = 1,3; n = 1,3; calculaţi: $w_{\max} = w(x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2})$.