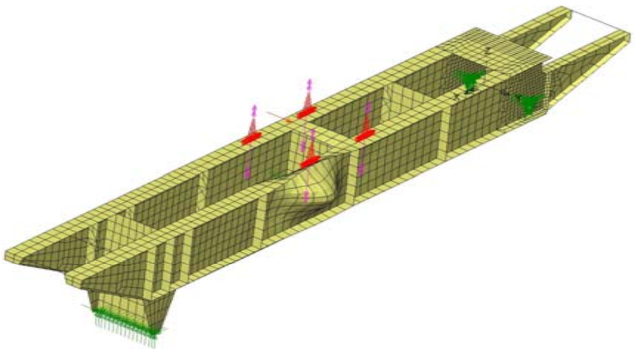
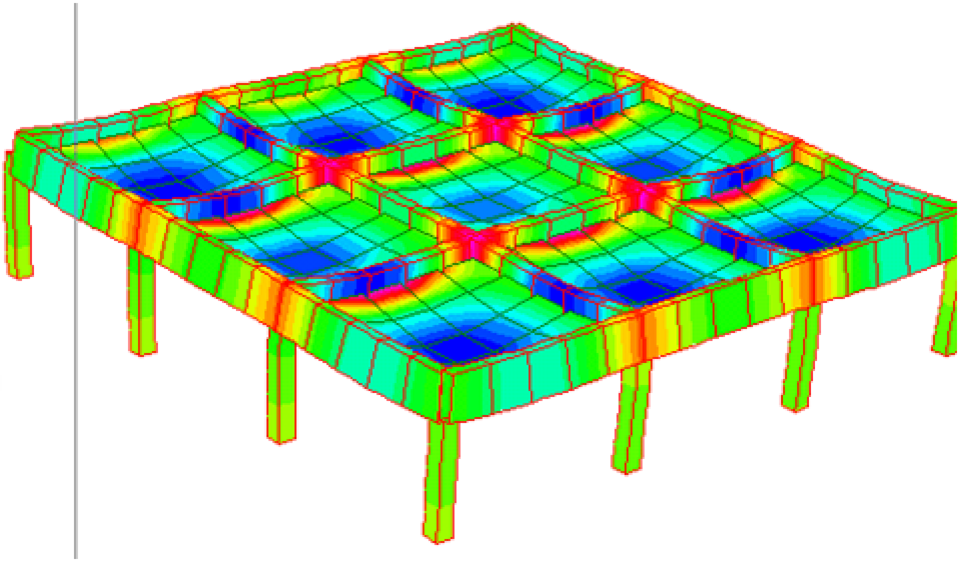
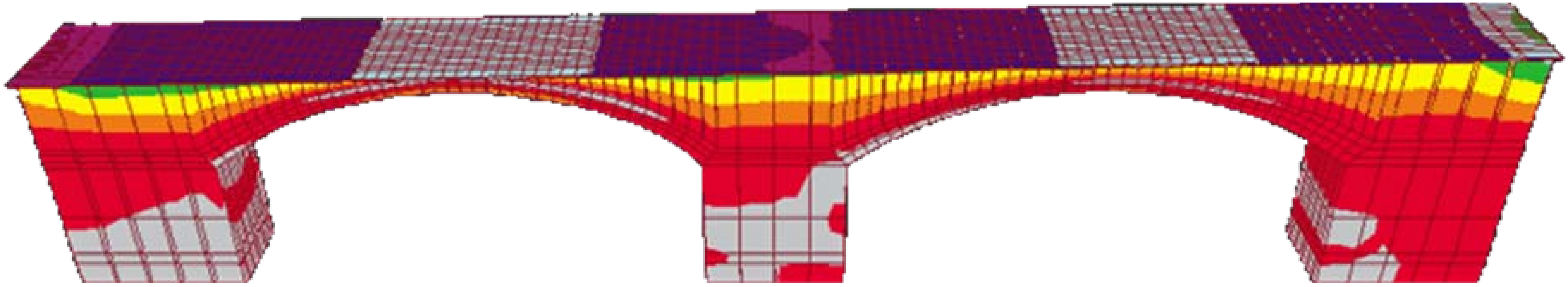
Introducere în Metoda Elementelor Finite, cu aplicații în Mecanica construcțiilor







Domeniul de studiu al Mecanicii poate fi structurat pe trei subdomenii distincte:

MECANICA

- **TEORETICĂ**
- **APLICATĂ**
- **abordată prin procedee de calcul NUMERIC**

Mecanica teretică – studiază legile şi principiile fundamentale ale mecanicii ca ştiinţă fundamentală

Mecanica aplicată – transferă conceptele mecanicii teoretice în domeniile ştiinţei şi ingineriei, cu scopul de a facilita construirea de modele matematice ale fenomenelor studiate

Mecanica numerică – rezolvă problema studiată cu ajutorul procedeelor numerice de calcul prin simulare cu ajutorul calculatoarelor digitale

Mecanica abordată prin SIMULARE NUMERICĂ

Funcţie de dimensiunea fizică a feneomenelor analizate se disting următoarele arii de competenţă ale Mecanicii numerice:

Mecanica NUMERICĂ

- **Nano şi micromecanica**
- **Mecanica mediilor continue**
  - **Solidul deformabil şi structuri**
  - **Lichide**
  - **Probleme combinate**
- **Sisteme**

Nanomecanica – tratează fenomene la nivel molecular şi atomic,

Micromecanica – abordează fenomene cristalografice şi granulare,

Mecanica mediului continu – studiază corpurile la nivel macroscopic, utilizând modele continue în care microstructura este omogenizată printr-un proces de mediere a caracteristicilor acesteia (exemplu: corp omogen, izotrop.....),

Principlalele domenii de studiu: solidul deformabil care include - analiza şi proiectarea structurilor de rezistență şi echilibrul şi miscarea lichidelor sau a gazelor (hidrodinamica, aerodinamica, acustica, şocuri etc.).

Probleme combinate - interacțiuni între solidul deformabil şi fluide, schimbarea stării corpurilor (topire, solidificare....),

Sisteme – identifică obiecte mecanice, naturale sau artificiale, care dispun de o anumită funcționabilitate. Exemple: aeronave, automobile, construcții civile, poduri, sisteme biologice, sisteme ecologice etc. care sunt tratate ca ansambluri de subsisteme ce pot fi analizate separat.

Mecanica mediilor continue

În funcție de considerarea sau neglijarea efectelor inerțiale Mecanica mediilor continue poate fi subdivizată:

1) **Probleme dinamice** – în care dependența de timp este explicit luată în considerare, întrucât calcularea forțelor de inerție şi a celor de amortizare necesită derivarea în raport cu timpul

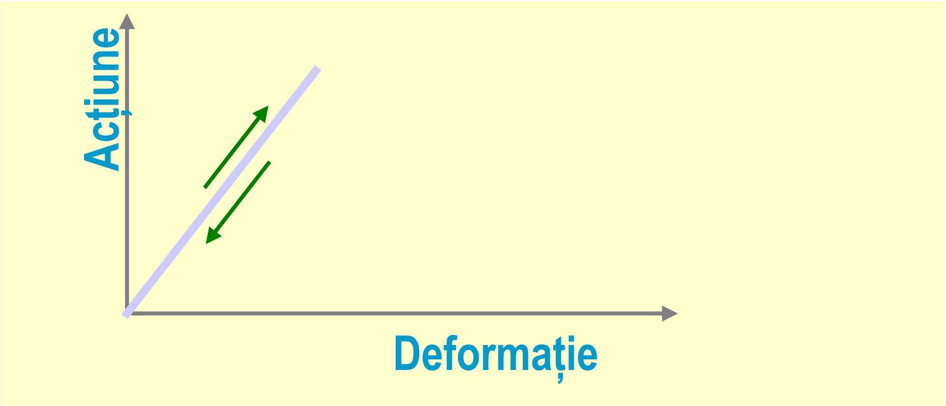
2) **Probleme statice** – care pot şi ele să depindă de timp, dar forțele de inerție sunt ignorate sau neglijate. În consecință problemele statice pot fi considerate:

   - **statice** - nu depind explicit de timp,

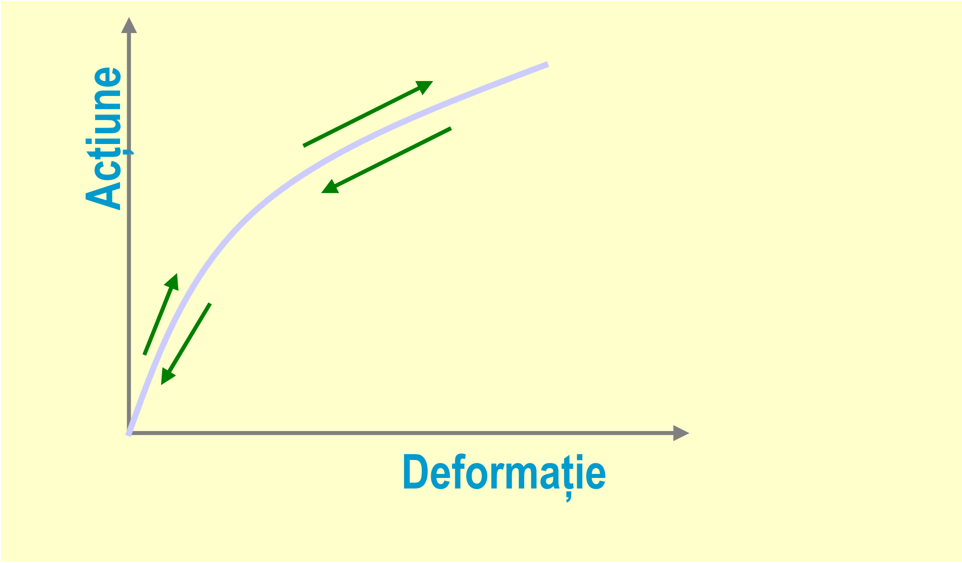
   - cvasi-statice – precum: tasarea fundațiilor, curgerea lentă sau relaxarea, oboseala la încărcări ciclice etc. la care timpul trebuie considerat dar forțele de inerție sunt neglijate.

Probleme de analiză statică

1) **Analiza liniar statică –** în care relația dintre cauză şi efect este liniară



2) **Analiza neliniar statică–** în care relația dintre cauză şi efect este neliniară



Metode de discretizare

Principalele metode de discretizare prin care modelul matematic al mediului continu este convertit într-un model discret cu un număr finit de grade de liberate sunt:

1) Metoda Elementelor Finite (MEF)
2) Metoda elementelor de frontieră
3) Metoda diferențelor finite
4) Metoda volumelor finite
5) Metode spectrale (transformă domeniul spațiu şi timp într-un domeniu convenabil pentru analiză (exemplu: domeniul frecvențelor)
6) Metode combinate (MEF cu Diferențe Finite)

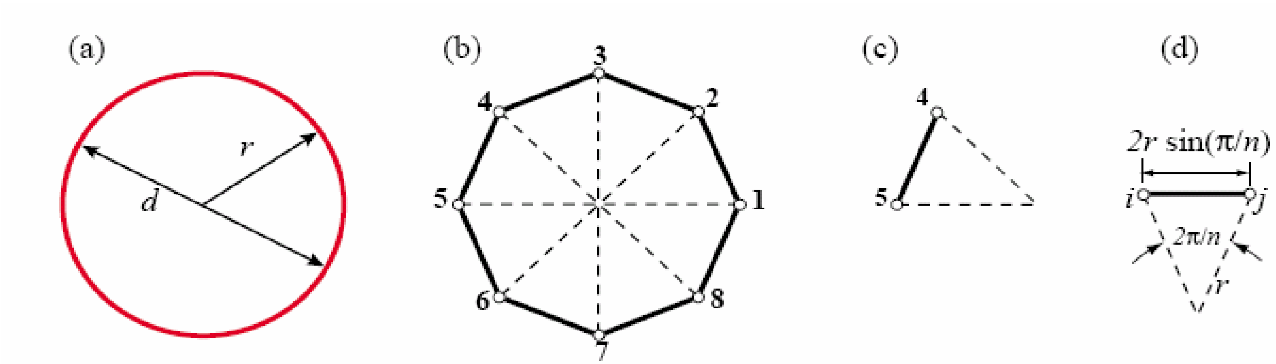
Variante ale Metodei Elementelor Finite

Formularea MEF
- în deplasări
- în eforturi
- mixtă

Rezolvare MEF
- matricea de rigiditate
- matricea de flexibilitate
- combinată

Ce sunt elementele finite?

Conceptul va fi parțial ilustrat prin intermediul unei probleme antice – determinarea perimetrului ***L*** a unui cerc de diametru dat ***d .*** Intrucât $L = \pi d$. problema este echivalentă cu determinarea valorii numerice a lui π



Problema lui Arhimede (anul 250 î.e.n) tratată prin MEF

1) Desenează un cerc cu raza ***r***, diametrul ***d=2r*** – figura a.

2) Înscrie în cerc un poligon regulat cu ***n*** laturi – figura b. Laturile poligonului se numesc ***elemente*** iar vârfurile se numesc ***noduri***

3) Extrage din poligon un element – de exemplu elementul cuprins între nodurile 4 şi 5 – figura c.

4) Analizează elementul izolat şi determină lungimea $L_{ij} = 2r \sin(\pi/n)$. Toate elementele au aceeaşi lungime

5) Asamblează poligonul din elemente şi determină perimetrul acestuia $L_n = nL_{ij}$ şi determină aproximația lui π cu relația $\pi_n = L_n/d = n \sin(\pi/n)$

Valorile lui π_n obținute pentru n = 1,2,3,.....256 sunt prezentate în tabelul de mai jos:

n	$\pi_n = n\sin(\pi/n)$	**Extrapolate**	**Exact cu 16 zecimale**
1	0.000000000000000		
2	2.000000000000000		
4	2.828427124746190	3.414213562373096	
8	3.061467458920718		
16	3.121445152258052	3.141418327933211	
32	3.136548490545939		
64	3.140331156954753	3.141592658918053	
128	3.141277250932773		
256	3.141513801144301	3.141592653589786	3.141592653589793

Prin acest exemplu se pot identifica elementele de bază ale MEF:

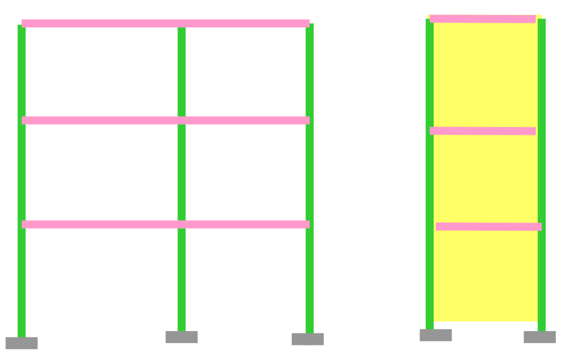
1) Cercul poate fi identificat ca ***modelul matematic*** al problemei analizate,

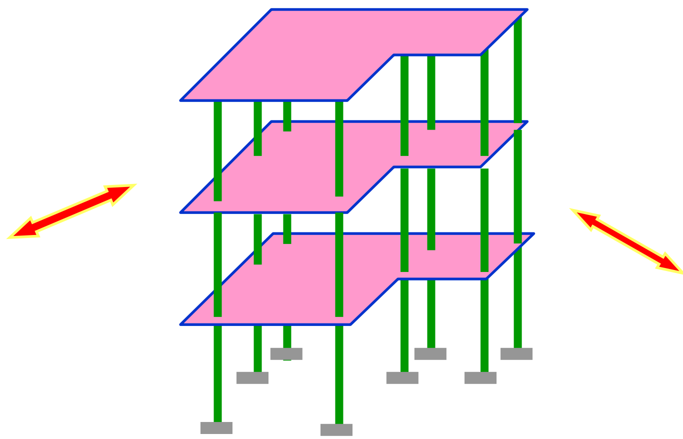
2) Cercul este înlocuit printr-un poligon care reprezintă ***aproximarea discretă*** a cercului,

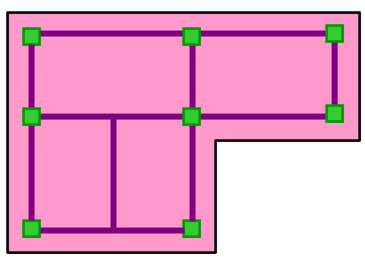
3) Laturile poligonului = ***elemente finite***. Virfurile poligonului = ***nodurile modelului discret***

4) Fiecare element finit este definit prin nodurile sale. ***Caracteristica fiecărui element*** – lungimea L_{ij} poate fi determinată independent de celelalte elemente. Pe această cale poligonul a fost dezasamblat în elemente componente simple care pot fi analizate separat,

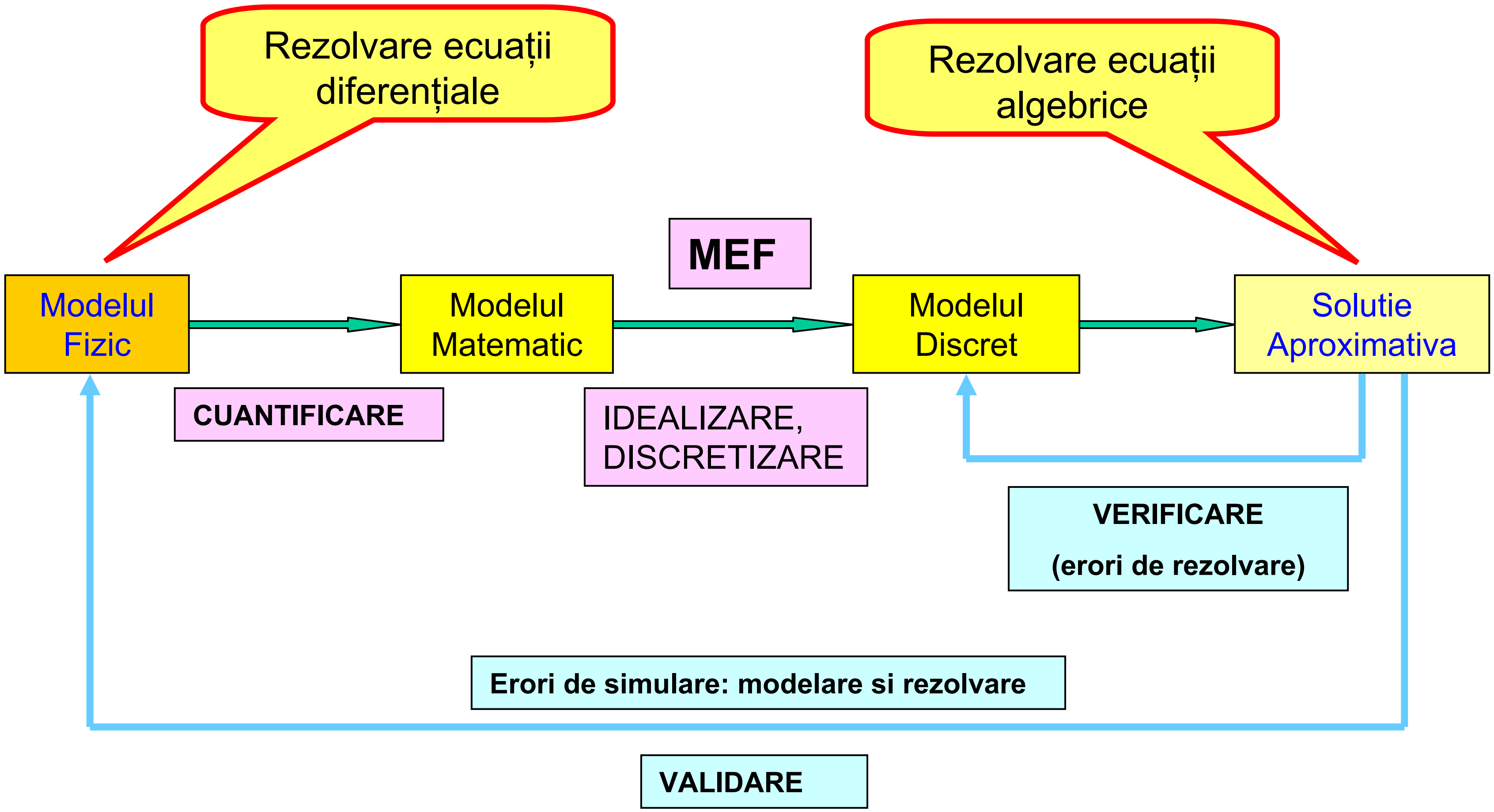
5) Perimetrul poligonului (necunoscuta) se obține reconectând laturile acestuia şi adunând lungimile elementelor. Aceasta corespunde etapei de ***asamblare şi calculul soluției*** din MEF.



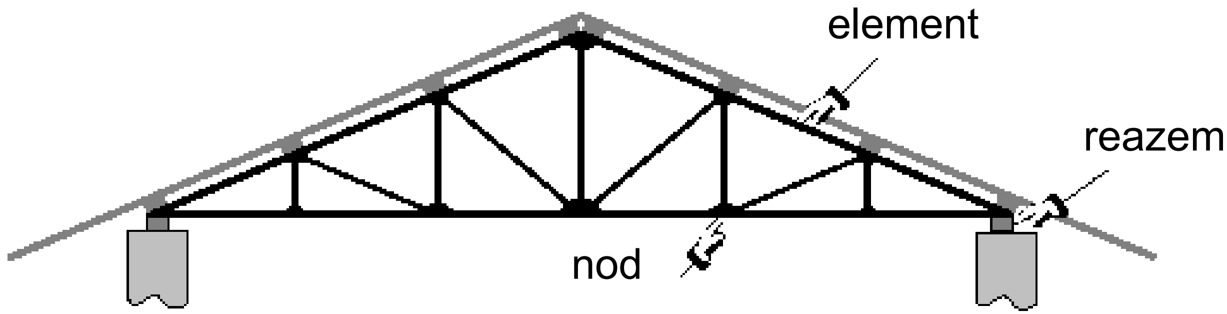




Etape în modelarea cu Elemente Finite



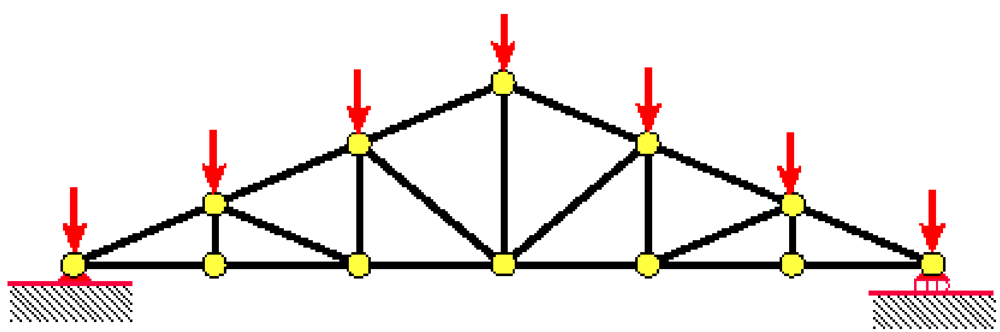
Etape în rezolvarea unei structuri simple prin MEF



Modelul Fizic

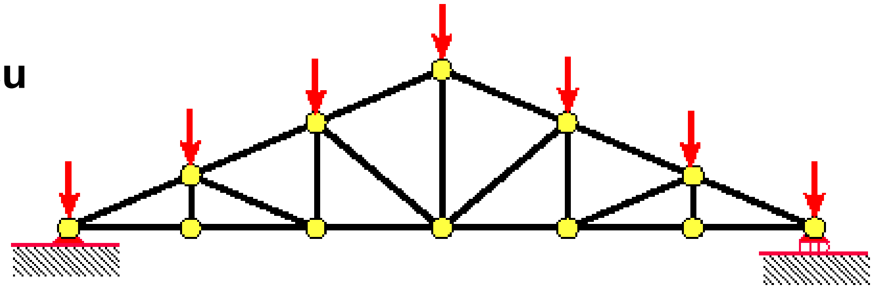
IDEALIZARE

Modelul Matematic

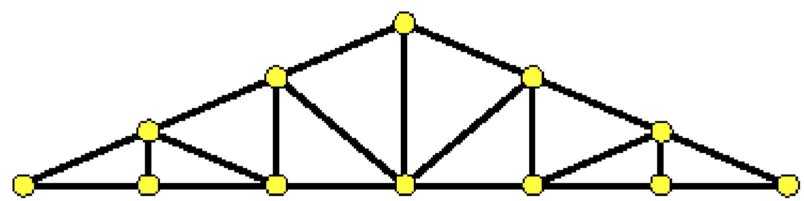


Descompunerea structurii în elemente simple

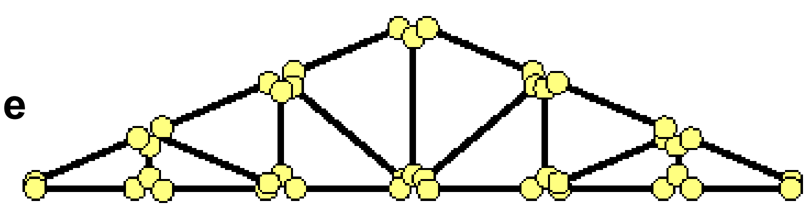
Model discret cu elemente finite



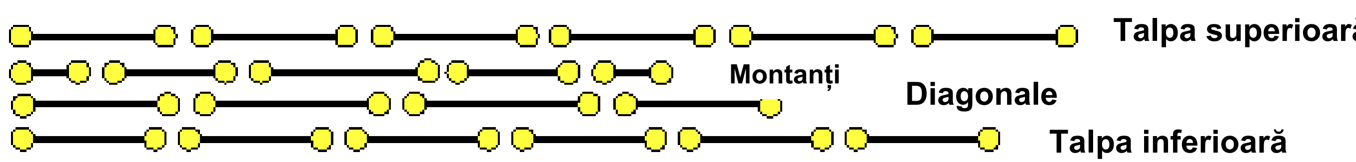
Structura fără încărcări şi rezeme



Decompune în elemente finite simple

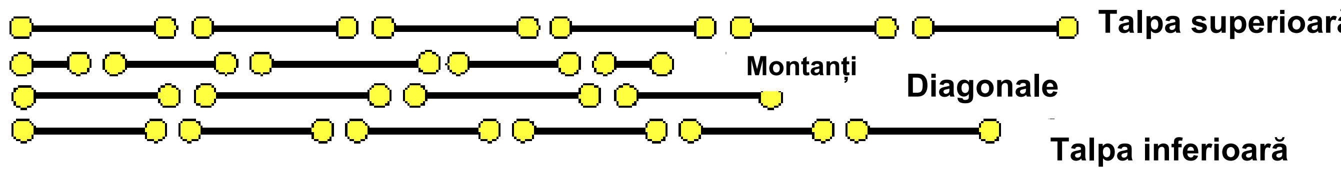


Localizarea EF

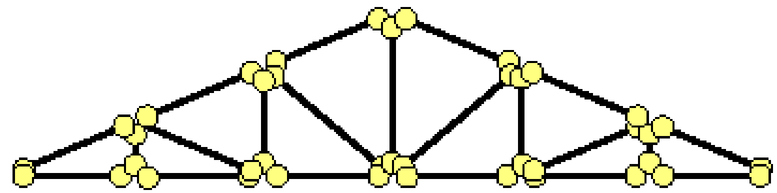


Asamblare & Soluție

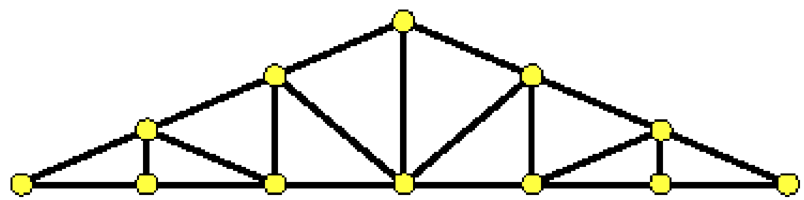
Matrici caracteristice EF



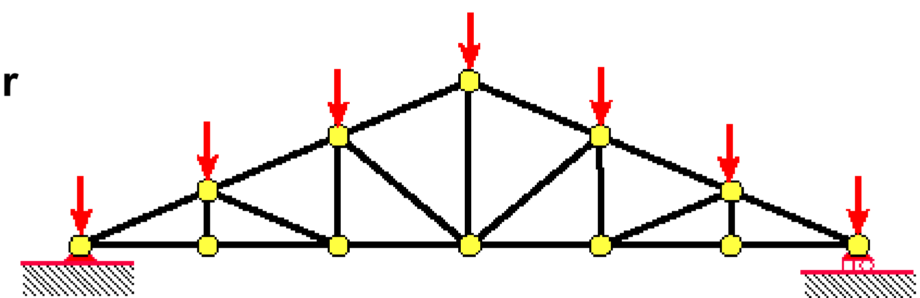
Transformarea matricilor caracteristice în sistemul global de axe



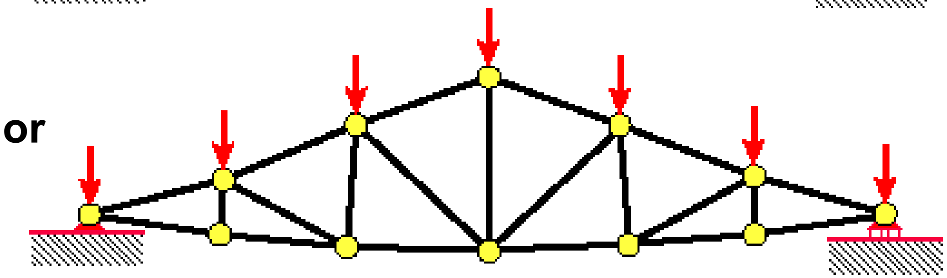
Asamblarea ecuațiilor de condiție



Aplicarea condițiilor de încărcare şi rezemare



Determinarea deplasărilor nodurilor



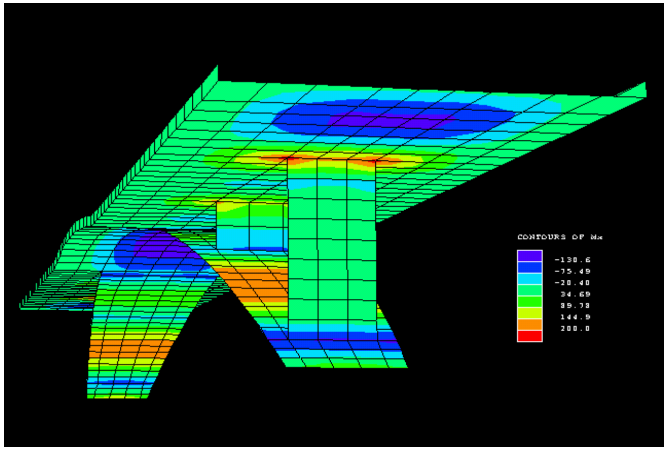
Interpretări ale Metodei Elementelor Finite

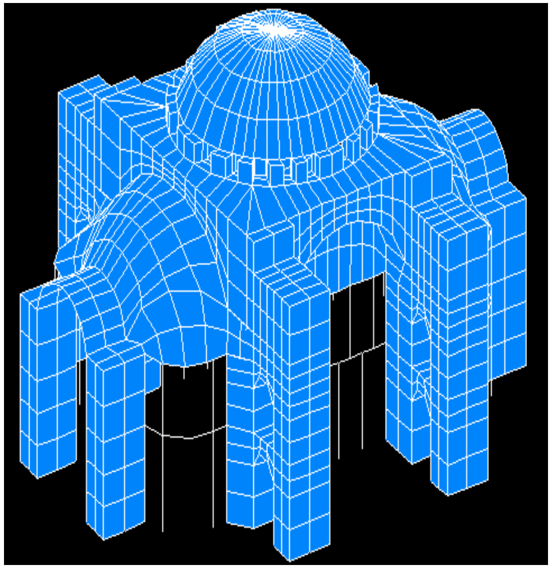
a) Interpretare Fizică

Conceptul de bază al MEF constă în descompunerea (partiționarea) unui sistem mecanic complex în sisteme simple numite elemente finite, interconectate între ele în puncte discrete numite noduri la care se definesc parametrii necunoscuți (deplasări, temperaturi etc.)

Răspunsul fiecărui element finit este caracterizat în funcție de parametrii definiți la noduri şi sunt numiți grade de libertate. Acest răspuns este definit prin relații algebrie simple de tipul relației de rigiditate.

Răspunsul sistemului mecanic original este aproximat de modelul discret asociat obținut prin asamblarea (reconecatarea) acestuia din elementele sale componente simple (elementele finite).





b) Interpretarea matematică

Din punct de vedere matematic MEF poate fi tratată ca un procedeu de obținere a unei soluții numerice aproximative pentru rezolvarea unui sitem de ecuatii diferențiale definite pe un domeniu finit (D) cu condiții limită (de margine) date.

Domeniul (D) este descompus într-un număr finit de subdomenii simple (elemente finite), conectate între ele pe frontierele de separație într-un număr finit de puncte numite noduri. În general geometria domeniului (D) este aproximată de reuniunea subdomeniilor simple.

Funcția necunoscută (deplasare, temperatură etc.) este aproximată local pe fiecare element finit prin funcții de interpolare definite în raport cu valorile acesteia în punctele nodale situate pe marginile elementelor finite. Aceste funcții poartă numele de funcții de formă.

Reunuiunea funcțiilor de interpolare pentru întreg domeniul (D) reprezintă un set de funcții test de aproximare, iar valorile nodale ale acestora reprezintă coordonate generalizate. Funcțiile test sunt introduse în sistemul ecuațiilor diferențiale, iar valorile nodale se determină prin procedee încadrate în domeniul calculului variațional (metoda Ritz, Galerkin, metoda rezidurilor ponderate etc.)