3. ANALIZĂ MATEMATICĂ CU MATHCAD

ANALIZA MATEMATICA CU MATHCAD

Calculul limitelor unei functii de o variabila

Pentru calculul limitelor unei functii de o variabila se foloseste **calculul simbolic**. In Mathcad exista trei operatori pentru a calcula limite. Acestia se afla in bara **Calculus.** Fiecarui operator ii corespunde si o comanda de la tastatura, asa cum se vede mai jos.

Ctrl + L pentru limita in jurul unui punct

Ctrl + Shift + A pentru limita la dreapta

Ctrl + Shift + B pentru limita la stanga

Exemplul 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \to 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \to \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \left(x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \to 1 \qquad \lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 5}{x^4 - 3 \cdot x^2 + 1} \to 1$$

Exemplul 2

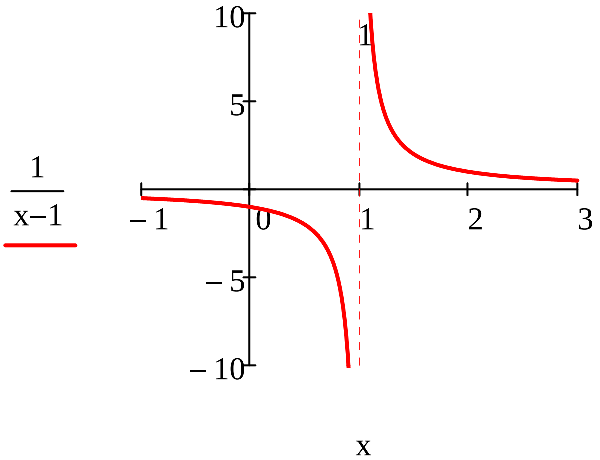
In cazul in care limita nu se poate calcula Mathcad afiseaza mesajul "undefined", dupa cum se vede mai jos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \to \text{undefined}$$

In acest caz se incearca dereminarea limitele laterale

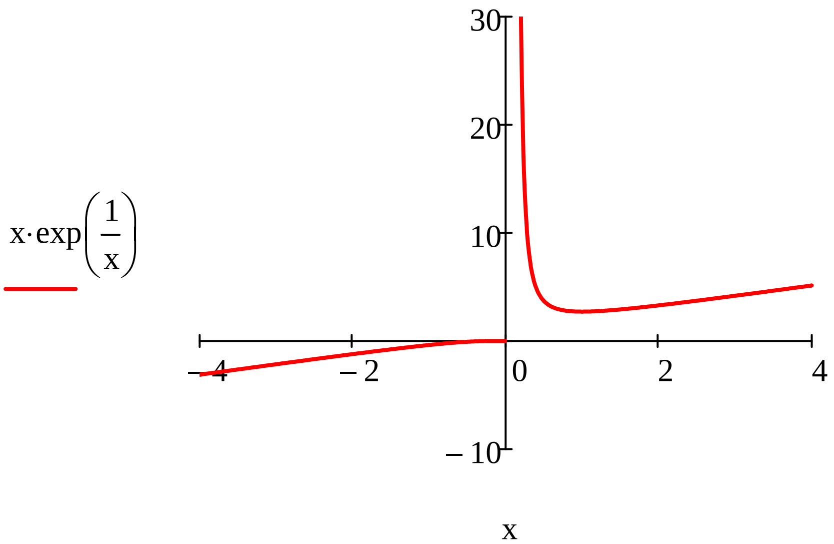
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} \to \infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} \to -\infty$$

Reprezenatrea grafica a functiei $f(x) := \frac{1}{x-1}$ ilustreaza cel mai bine fenomemul care are loc.



Exemplul 3

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) \to \infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) \to 0 \qquad \lim_{x \to 0} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) \to \text{undefined}$$



ANALIZA MATEMATICA CU MATHCAD

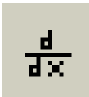
Calculul derivatelor

Calculul simbolic al derivatei unei functii intr-un punct

1. Se scrie definitia functiei.

$$f(x) := \sqrt{x^2+1}\cdot \ln\left(x^2+1\right) + x\cdot \operatorname{atan}(x)$$

2. Se tasteaza **Shift + /** sau se da clic cu mouse-ul pe simbolul operatorului de derivare aflat pe bara **Calculus**.



Pe ecran apare operatorul de derivare cu pozitiile marcate necompletate.

$$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$$

3. Se completeaza pozitiile marcate cu numele functiei de derivat si variabila in raport cu care se face derivata.

$$\frac{d}{dx}f(x)$$

5. Se da comanda de calcul simbolic **Ctrl + .** (**Ctrl + punct**) sau se apasa butonul corespunzator aflat pe bara **Evaluation**. La terminare se apasa **Enter** sau se da clic in afara zonei de editare. Se obtine

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \operatorname{atan}(x) + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2\cdot x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x\cdot \ln\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$

Pentru calculul derivatelor de ordin superior se procedeaza la fel ca mai sus cu deosebirea ca in locul operatorului de derivare de ordinul unu se foloseste operatorul de derivare de ordin superior. Pentru aparitia acestui se tasteaza **Ctrl + Shift + /** sau se apasa butonul corespunzator aflat pe bara **Calculus**. Trecerea de la o pozitie marcata la alta se face apasand tasta **Tab**.
De exemplu

$$g(x) := x\cdot \operatorname{atan}(x) \qquad \frac{d^2}{dx^2}g(x) \rightarrow \frac{2}{x^2+1} - \frac{2\cdot x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\frac{d^6}{dx^6}g(x) \rightarrow \frac{144}{\left(x^2+1\right)^3} - \frac{2448\cdot x^2}{\left(x^2+1\right)^4} + \frac{6144\cdot x^4}{\left(x^2+1\right)^5} - \frac{3840\cdot x^6}{\left(x^2+1\right)^6}$$

Calculul numeric al derivatei unei functii intr-un punct

1. Se scrie definitia functiei.

$$f(x) := \sqrt{x^2+1}\cdot\ln\left(x^2+1\right) + x\cdot\operatorname{atan}(x)$$

2. Se atribuie variabilei valoarea in care se doreste calcularea derivatei.

$$x := 7$$

3. Se tasteaza **Shift + /** sau se da clic cu mouse-ul pe simbolul operatorului de derivare aflat pe bara **Calculus**. Pe ecran apare operatorul de derivare cu pozitiile marcate necompletae.

$$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$$

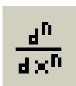
4. Se completeaza pozitiile marcate cu numele functiei de derivat si variabila in raport cu care se face derivata.

$$\frac{d}{dx}f(x)$$

5. Se da comanda de calcul numeric apasand tasta pe care se afla semnul egal.

$$\frac{d}{dx}f(x) = 7.422$$

Pentru calculul derivatelor de ordin superior se procedeaza la fel ca mai sus cu deosebirea ca in locul operatorului de derivare de ordinul unu se foloseste operatorul de derivare de ordin superior. Pentru aparitia acestui se tasteaza **Ctrl + Shift + /** sau se apasa butonul corespunzator aflat pe bara **Calculus**.



Pentru a calcula derivate de ordin mai mare ca 5 se scriu mai multi operatori de derivare de ordin superior inclusi unul in altul. Exemple

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 0.29471 \qquad \frac{d^3}{dx^3}f(x) = -0.04390 \qquad \frac{d^4}{dx^4}f(x) = 0.01310$$

$$\frac{d^5}{dx^5}f(x) = -0.00585 \qquad \frac{d^5}{dx^5}\frac{d^1}{dx^1}f(x) = 0.00346 \qquad \frac{d^5}{dx^5}\frac{d^2}{dx^2}f(x) = -0.00254$$

Calculul numeric al derivatei unei functii in mai multe puncte

Pentru a calcula derivata unei functii in mai multe puncte se defineste variabila in raport cu care se calculeaza derivata ca o variabila domeniu care are ca valori acele puncte sau ca un vector care are drept componente punctele date.

Ne propunem sa calculam derivata de ordinul trei al functiei

$$h(x) := x \cdot \ln\left(x^2 + 1\right)$$

in punctele 2, 3, 7, 15. Pentru aceasta definim varibila domeniu x_k.

$$k := 1..4 \qquad x_k :=$$

2
3
7
15

Pentru obtinerea formei de mai sus dupa scrierea fiecarei valori 2, 3, 7 se tasteaza virgula.
Se defineste apoi functia derivata

$$Dh3(x) := \frac{d^3}{dx^3}h(x)$$

Pentru a obtine valorile functiei si ale derivatei de ordinul trei in punctele 2, 3, 7, 13 se scrie

$h(x_k) =$

3.21888
6.90776
27.38416
81.30802

$Dh3(x_k) =$

-0.59200
-0.26400
-0.04307
-0.00900

O alta posibilitate de introducere a punctelor in care se calculeaza derivata este aceea de a considera un vector care are drept componente punctele respective. In acest caz trebuie sa se tina sema ca, implicit, intr-un vector sau matrice originea indicilor este 0. Aceasta se poate schimba in 1 folosind instructiunea ORIGIN.

$ORIGIN := 1$ $\qquad v := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$ $\qquad Dh3(x) := \frac{d^3}{dx^3}h(x)$

$n := rows(v)$ $\qquad n = 4$ $\qquad k := 1..n$

$h(v_k) =$

3.21888
6.90776
27.38416
81.30802

$Dh3(v_k) =$

-0.59200
-0.26400
-0.04307
-0.00900

Calculul simbolic al derivatelor partiale ale unei functii de mai multe variabile

Daca functia de derivat este o functie de mai multe variabile operatorul de derivare din Mathcad efectueaza derivata in raport cu variabila indicata, celelalte variabile fiind considerate constante. Cu alte cuvinte operatorul calculeaza derivata partiala. Pentru ca forma grafica a operatorului sa fie cea cunoscuta de la cursul de "Analiza matematica" se da clic cu dreapta pe operatorul de derivare respectiv, din meniul derulant care apare se selecteaza comanda **View Derivative As** si apoi se bifeaza optiunea **Partial Deriative**.

Ca exemplu calculam derivatele partiale de ordinul unu si doi ale functiei

$$F(s,t) := \sqrt{s^2 + t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}F(s,t) \rightarrow \frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}} \qquad \frac{\partial}{\partial t}F(s,t) \rightarrow \frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}F(s,t) \rightarrow \left(s^2+t^2\right)^{\frac{-1}{2}} - \frac{s^2}{\left(s^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}F(s,t) \rightarrow \left(s^2+t^2\right)^{\frac{-1}{2}} - \frac{t^2}{\left(s^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) \rightarrow -\frac{s\cdot t}{\left(s^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Daca se indica valorile numerice ale variabilelor in care se face calculul derivatei atunci, folosind procedeul de calcul simbolic, se determina valorile numerice ale drivatelor asa cum se vede in exemplul de mai jos.

Ca exemplu calculam derivatele partiale de ordinul unu si doi ale functiei de mai sus in punctul P(3,4).

$$F(s,t) := \sqrt{s^2 + t^2}$$

$s := 3 \qquad t := 4$

$\frac{\partial}{\partial s}F(s,t) \rightarrow \frac{3}{5} \qquad \frac{\partial}{\partial t}F(s,t) \rightarrow \frac{4}{5}$

$\frac{\partial^2}{\partial s^2}F(s,t) \rightarrow \frac{16}{125} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}F(s,t) \rightarrow \frac{9}{125} \qquad \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) \rightarrow -\frac{12}{125}$

Calculul numeric ale derivatelor partiale ale unei functii de mai multe variabile

Se procedeaza ca mai sus indicand valorile numerice ale variabilelor in care se face calculul derivatei, dar se da comanda de calcul numeric nu de calcul simbolic.

$$F(s,t) := \sqrt{s^2 + t^2}$$

$s := 3 \qquad t := 4$

$\frac{\partial}{\partial s}F(s,t) = 0.6 \qquad \frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = 0.8$

$\frac{\partial^2}{\partial s^2}F(s,t) = 0.128 \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}F(s,t) = 0.072 \qquad \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = -0.096$

ANALIZA MATEMATICA CU MATHCAD

Calculul integralelor pentru functii reale de o variabila reala

Mathcad dispune de operatori cu ajutorul carora se pot calcula:

a) **Integrale nedefinte** $\int f(x)\,dx$

b) **Integrale definte** $\int_a^b f(x)\,dx$

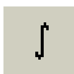
Calculul integralelor nedefinite

Dupa cum se stie simbolul $\int f(x)\,dx$ desemneaza multimea tuturor primitivelor functiei $f(x)$. Mathcad determina numai o **<u>primitiva</u>** a functiei $f(x)$, celelalte obtinandu-se din aceasta prin adaugarea unei constante oarecare. Determinarea primitivei se face folosind calculul simbolic.

Calculul integralei nedefinite $\int f(x)\,dx$, (ceea ce inseamna determinarea unei primitive a functiei $f(x)$) se face folosind operatorul de integrare nedefinita

$$\int \blacksquare \, d\blacksquare$$

Pentru aparitia acestuia se tasteaza **Ctrl + I** sau se apasa butonul cu simbolul integralei nedefinite aflat pe bara **Calculus**.



Se completeaza locurile marcate cu expresia functiei de integrat si variabila in raport cu care se face integrala. Functia poate fi de una sau mai multe variabile.

De exemplu, pentru a determina o primitia a functiei $f(x) := x^3$ se procedeaza astfel:

1. Se stabileste locul unde se calculeaza integrala si se introduce operatorul pentru calculul integralei nedefinite

$$\int \blacksquare \, d\blacksquare$$

2. Se completeaza locurile marcate cu expresia functiei si a variabilei de integrat

$$\int x^3 \, dx$$

3. Pentru aparitia semnului de egalitate simbolica se tasteaza **Ctrl + .** . calculul simbolic este executat daca se tasteaza **Enter** sau se da clic in afara zonei matematice in care se scris operatorul de integrare nedefinita.

$$\int x^3 \, dx \rightarrow \frac{x^4}{4}$$

Alte exemple

$$\int \sin(x)\cdot\exp(x) \, dx \rightarrow -\frac{e^x\cdot(\cos(x) - \sin(x))}{2}$$

$$\int \operatorname{atan}(\sqrt{x}) \, dx \rightarrow \operatorname{atan}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + x\cdot\operatorname{atan}(\sqrt{x})$$

$$\int \frac{1}{1 + x^3} \, dx \rightarrow \frac{\ln(x + 1)}{3} - \frac{\ln\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}{6} + \frac{\sqrt{3}\cdot\operatorname{atan}\left[\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)}{3}\right]}{3}$$

Daca functia de integrat este de mai multe variabile atunci integrarea se face in raport cu variabila indicata, cealalta fiind considerata o constanta.

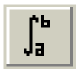
$$\int x^2 \cdot y^3 \, dy \rightarrow \frac{x^2 \cdot y^4}{4}$$

Calculul integralelor definite

Calculul aproximativ al integralelor definite pentru functii de o variabila se face folosind operatorul de integrare

$$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare$$

Pentru aparitia acestuia se tasteaza **Shift+7** sau se apasa butonul cu simbolul integralei definite aflat pe bara **Calculus**



Valoarea integralei definite $\int_a^b f(x)\,dx$ este un numar care se obtine folosind calculul numeric sau simbolic.

Folosirea operatorului de integrare pentru functii de o variabila este extrem de simplu. Se completaeza locurile marcate cu limitele de integrare, functia de integrat si variabila in raport cu care se face integrarea. Pentru realizarea **calculului numeric** se tasteaza semnul = . De exemplu

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\,dx = 1.148 \qquad \int_0^{\pi} \sin(x)^2\,dx = 1.571 \qquad \int_1^2 x \cdot \mathrm{atan}(x)\,dx = 1.482$$

Pentru realizarea **calculului simbolic** se foloseste egalul simbolic in locul celui numeric.

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\,dx \rightarrow \frac{\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)^2\,dx \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{1}^{2} x \cdot \operatorname{atan}(x)\, dx \rightarrow \frac{5 \cdot \operatorname{atan}(2)}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Din punct de vedere practic rezultatele sub aceasta forma sunt mai putin utilizabile deoarece pentru folosirea lor in calcule ulterioare necesita aducerea acestora la forma numerica. Aceasta se poate face selectand rezultatul obtinut simbolic si tastand apoi = .

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x^2 + 1}\, dx \rightarrow \frac{\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.148$$

ANALIZA MATEMATICA CU MATHCAD

Serii cu termeni pozitivi - Exemple

I. Sa se studieze, folosind criteriile de convergenta invatate, convergenta sau divergenta urmatoarelor serii numerice cu temeni pozitivi.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Se noteaza cu $a(n) := \frac{(n!)^2}{(2\cdot n)!}$ si se aplica criteriul raportului.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} \to \frac{1}{4}$$

Deoarece limita raportului a doi termeni consecutivi ai sirului a(n) este mai mica decat 1, conform criteriului raportului, seria data este convergenta.

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\cdot n)!}{4^n\cdot(n!)^2}$$

Se noteaza cu $a(n) := \frac{(2\cdot n)!}{4^n\cdot(n!)^2}$ si se incearca din nou aplicarea criteriului raportului:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} \to 1$$

Conform criteriului raportului, daca limita raportului a doi termeni consecutivi ai sirului a(n) este egala cu 1, nu se poate decide asupra naturii seriei date. Se incearca aplicarea criteriului Raabe-Duhamel.

$$\lim_{n \to \infty} \left[n\cdot\left(\frac{a(n)}{a(n+1)} - 1\right)\right] \to \frac{1}{2}$$

Cum limita aflata anterior este mai mica strict decat 1, seria data este divergenta conform criteriului Raabe-Duhamel.

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5\cdot n+1}{n^2+3}\right)^{n^2}$$

Se noteaza cu $a(n) := \left(\frac{n^2+5\cdot n+1}{n^2+3}\right)^{n^2}$ si se aplica criteriul radacinii.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a(n)} \to e^5$$

Deoarece limita aflata anterior este strict mai mare decat 1, seria este divergenta conform criteriului radacinii.

4. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Pentru studiul convergentei acestei serii se foloseste criteriul de comparatie prin raport.

Se ia, ca serie de comparatie, seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Notand $u(n) := \frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ si $v(n) := \frac{1}{n^3}$, se evalueaza limita raportului sirurilor u(n) si v(n):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u(n)}{v(n)} \to \frac{1}{6}\ .$$

Deoarece limita raportului sirurilor u(n) si v(n) este in intevalul deschis (0,∞), conform criteriului de comparatie prin raport, seriile avand termeni generali sirurile u(n) si v(n) au aceeasi natura.

Dar $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ este un caz particular al seriei armonice generalizate

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ cu $\alpha > 1$, deci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3}}$ este convergenta. Asadar si

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ este convergenta.

ANALIZA MATEMATICA CU MATHCAD

Serii de puteri

Studiul convergentei seriilor de puteri in Mathcad

Exemplul 1

Sa se determine intervalul de convergenta al urmatoarei serii de puteri:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n \cdot \frac{(n!)^2}{(2\cdot n)!}\cdot x^n\right]$$

Se noteaza sirul coeficientilor seriei de puteri cu $a(n) := (-1)^n \cdot \frac{(n!)^2}{(2\cdot n)!}$

Se determina raza de convergenta a seriei de puteri ca fiind limita din modulul raportului a doi termeni consecutivi ai sirului a(n)

$$R := \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a(n)}{a(n+1)}\right| \to 4$$

Cum valoarea razei de convergenta este 4, seria de puteri este absolut convergenta pe (-4,4) si este uniform si absolut convergenta pe orice subinterval [a,b] al intervalului (-4; 4). Se analizeaza in mod separat convergenta seriei numerice obtinute pentru valorile lui x in capetele intervalului (-4,4).

Astfel pentru x=-4, seria devine: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(n!)^2}{(2\cdot n)!}\cdot 4^n\right]$. Seria numerica astfel obtinuta are termenul general $b(n) := \frac{(n!)^2}{(2\cdot n)!}\cdot 4^n$ pozitiv.

Cum $\frac{b(n+1)}{b(n)}$ simplify $\to \frac{1}{2\cdot n+1}+1$ >1, deducem ca sirul b(n) este crescator. In plus, $b(1) = 2$ si deci sirul b(n) nu tinde la zero. Asadar nu este indeplinita conditia necesara de convergenta a unei serii numerice. Se concluzioneaza ca pentru valoarea x=-4, seria este divergenta.

Pentru x=4, seria de puteri devine: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n \cdot \frac{(n!)^2}{(2\cdot n)!}\cdot 4^n\right]$

Seria astfel obtinuta este o serie alternata si, pastrand notatiile anterioare, de forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n} \cdot b(n)\right]$$

Cum s-a aratat ca b(n) nu tinde la 0, rezulta ca si in cazul in care x este 4, seria numerica obtinuta este divergenta.
In concluzie, intervalul de convergenta al seriei de puteri date va fi intervalul deschis (-4, 4).

ANALIZA MATEMATICA CU MATHCAD

Puncte de extrem local

Exemplul 1

Sa se afle punctele de extrem local ale functiei: $f(x,y) := x^3 + y^3 - 3\cdot x\cdot y$

Aflarea punctelor stationare:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \rightarrow 3\cdot x^2 - 3\cdot y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \rightarrow 3\cdot y^2 - 3\cdot x$$

Egalarea derivatelor partiale de mai sus cu 0, conduce la un sistem neliniar, corespunzator intersectiei urmatoarelor curbe:

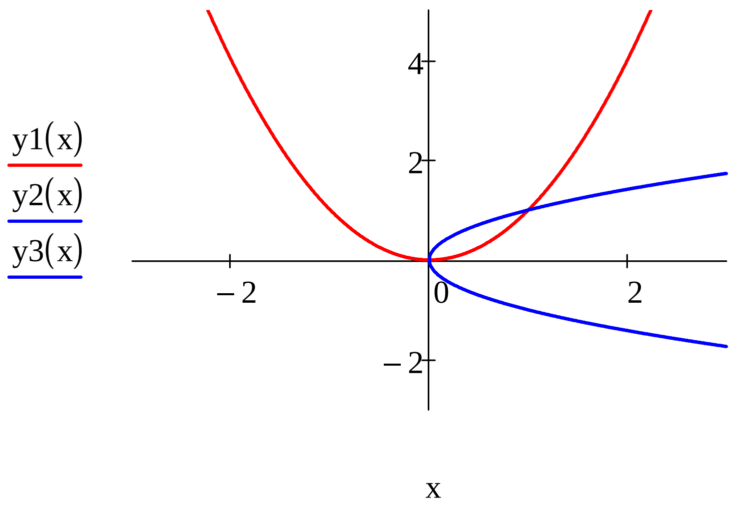
$$3\cdot x^2 - 3\cdot y = 0$$

$$3\cdot y^2 - 3\cdot x = 0$$

Aplicand metodele folosite la rezolvarea sistemelor neliniare, determinam pentru inceput numarul si valoarea aproximativa a solutiilor sistemului dat folosind metoda grafica. Se poate observa cu usurinta ca cele doua ecuatii ale sistemului sunt ecuatiile unor parabole si ele se pot exprima in forma explicita in felul urmator:

Prima ecuatie $y1(x) := x^2$

A doua ecuatie $y2(x) := \sqrt{x}$ sau $y3(x) := -\sqrt{x}$



Graficele celor doua functii au doua puncte comune din care in mod evident unul este originea sistemului de axe.

Aflarea punctelor de intersectie se face cu blocul Given- Find

$x := 0 \quad y := 0$

Given

$3\cdot x^2 - 3\cdot y = 0$

$3\cdot y^2 - 3\cdot x = 0$

$M1 := \mathrm{Find}(x, y)$

$$M1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x := 1 \quad y := 1$

Given

$3\cdot x^2 - 3\cdot y = 0$

$3\cdot y^2 - 3\cdot x = 0$

$M2 := \mathrm{Find}(x, y)$

$$M2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

M1 si M2 astfel obtinute reprezinta punctele stationare ale functiei f.
Pentru verificarea faptului ca M1 sau M2 sunt sau nu puncte de extrem se scrie expresia matricei hessiene asociate diferentialei de ordin 2 a functiei f.

$$Hf(u,v) := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} f(u,v) & \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial}{\partial v} f(u,v)\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial}{\partial v} f(u,v)\right) & \dfrac{\partial^2}{\partial v^2} f(u,v) \end{bmatrix} \qquad Hf(u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} 6\cdot u & -3 \\ -3 & 6\cdot v \end{pmatrix}$$

Trebuie verificat daca matricea hessiana calculata in M1 si M2 este pozitiv definita, negativ definita sau nedefinita ca semn. Pentru aceasta se calculeaza semnul minorilor principali.

$$\mathrm{Hf}(0,0) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Cum $\left|\mathrm{Hf}(0,0)\right| = -9$, rezulta ca matricea Hf calculata in M1 este nedefinita ca semn, deci M1(0,0) nu este punct de extrem.

$$\mathrm{Hf}(1,1) \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ORIGIN} \equiv 1$$

$$\mathrm{Hf1} := \mathrm{submatrix}(\mathrm{Hf}(1,1),1,1,1,1)$$

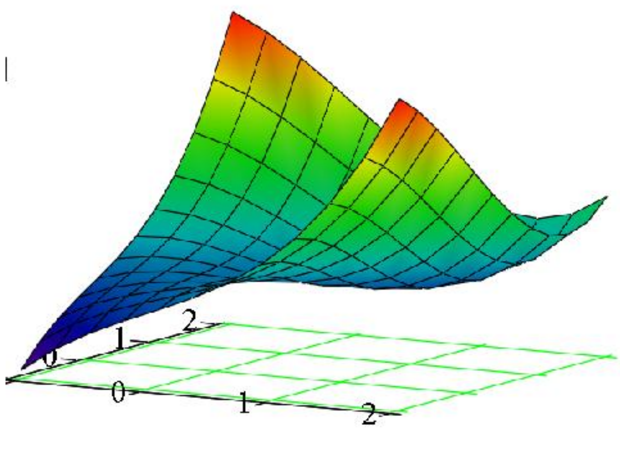
$$\left|\mathrm{Hf1}\right| = 6$$

$$\mathrm{Hf2} := \left|\mathrm{Hf}(1,1)\right| = 27$$

Cum ambii minori sunt pozitivi rezulta ca Hf(1,1) este pozitiv definita, asadar M2(1,1) este punct de minim local.

Reprezentarea grafica de mai jos confirma rezultatul obtinut:

$$M := \mathrm{CreateMesh}(f,-1,2,-1,2,12,12)$$



M

ANALIZA MATEMATICA CU MATHCAD

Puncte de extrem local

Exemplul 2

Sa se afle punctele de extrem local ale functiei:

$$f(x,y) := x^3 + 3\cdot x\cdot y^2 - 30\cdot x - 18\cdot y + 5$$

Aflarea punctelor stationare:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \rightarrow 3\cdot x^2 + 3\cdot y^2 - 30$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \rightarrow 6\cdot x\cdot y - 18$$

Egalarea derivatelor partiale de mai sus cu 0, conduce la un sistem neliniar, corespunzator intersectiei urmatoarelor curbe:

$$3\cdot x^2 + 3\cdot y^2 - 30 = 0$$

$$6\cdot x\cdot y - 18 = 0$$

Prin simplificarea celor doua ecuatii cu 3, respectiv 6, se obtine urmatorul sistem echivalent

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$x\cdot y = 3$$

Prima ecuatie reprezinta ecuatia unui cerc cu centrul in origine si raza $\sqrt{10}$ iar cea de a doua este ecuatia unei hiperbole. Punctele de intersectie ale celor doua curbe reprezinta numarul de solutii ale sistemului obtinut.

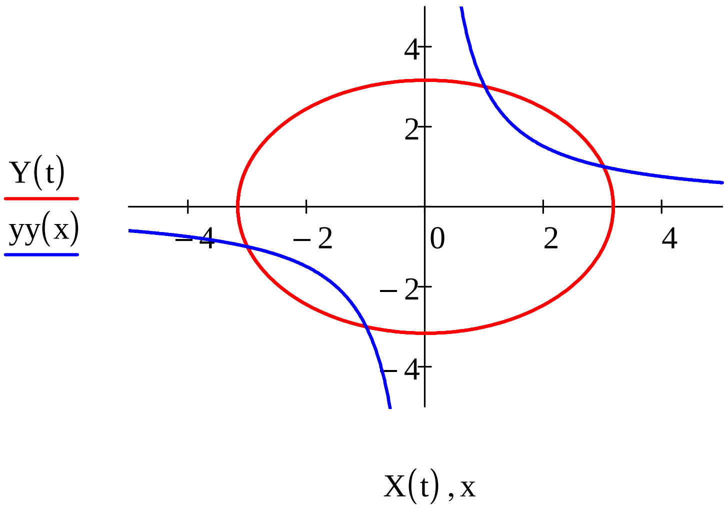
Parametrizarea cercului este:

$$X(t) := \sqrt{10}\cdot\cos(t)$$

$$Y(t) := \sqrt{10}\cdot\sin(t)$$

Pentru a reprezenta grafic hiperbola, folosim scrierea in forma explicita a lui y ca functie de x.

$$yy(x) := \frac{3}{x}$$



Se observa ca cele doua grafice este se intersecteaza in 4 puncte, iar pentru determinarea lor se foloseste blocul **Given-Find**. Pentru determinarea valorilor initiale ale solutiilor, folosim optiunea **Trace** din meniul contextual ce apare la clic dreapta pe grafic

$x := 0.98 \quad y := 3.06$

Given

$x^2 + y^2 = 10$

$x \cdot y = 3$

$M1 := \mathrm{Find}(x, y) \qquad M1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x := 3.06 \quad y := 0.98$

Given

$x^2 + y^2 = 10$

$x \cdot y = 3$

$M2 := \mathrm{Find}(x, y) \qquad M2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x := -0.98 \quad y := -3.06$

Given

$x^2 + y^2 = 10$

$x \cdot y = 3$

$M3 := \mathrm{Find}(x, y) \qquad M3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$x := -3.06 \quad y := -0.98$

Given

$x^2 + y^2 = 10$

$x \cdot y = 3$

$M4 := \mathrm{Find}(x, y) \qquad M4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

M1, M2, M3, M4 aflate reprezinta punctele stationare ale functiei f. Pentru a verifica care dintre aceste puncte sunt puncte de extrem, scriem expresia matricii hessiene in fiecare din cele patru puncte si verificam daca matricea este pozitiv definita, negativ definita, sau nedefinita ca semn. Deoarece pe parcursul acestui exercitiu variabilelor x si y le-au fost atribuite diferite valori numerice, se renoteaza in expresia hessienei variabila x cu a si y cu b.

$$Hf(a, b) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(a, b) & \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial b} f(a, b)\right) \\ \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial b} f(a, b)\right) & \frac{\partial^2}{\partial b^2} f(a, b) \end{bmatrix}$$

$$Hf(a, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \cdot a & 6 \cdot b \\ 6 \cdot b & 6 \cdot a \end{pmatrix}$$

Pentru M1(1,3):

$$\mathrm{Hf}(1,3) \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left|\mathrm{Hf}(1,3)\right| = -288$$

Cum minorul principal de ordin unu este 6, iar minorul principal de ordin 2 este negativ, rezulta ca M1 nu este punct de extrem.

Pentru M2(3,1):

$$\mathrm{Hf}(3,1) \rightarrow \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\left|\mathrm{Hf}(3,1)\right| = 288$$

Minorul principal de ordin unu este 18 (pozitiv), iar minorul principal de ordin 2 este 288 (pozitiv), deci Hf(3,1) este pozitiv definita, de unde rezulta ca M2 este punct de minim local.

Pentru M3(-1,-3):

$$\mathrm{Hf}(-1,-3) \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & -18 \\ -18 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left|\mathrm{Hf}(-1,-3)\right| = -288$$

Ambii minori fiind negativi rezulta ca Hf(-1,-3) este nedefinita ca semn, deci M3 nu este punct de extrem.

Pentru M4(-3,-1):

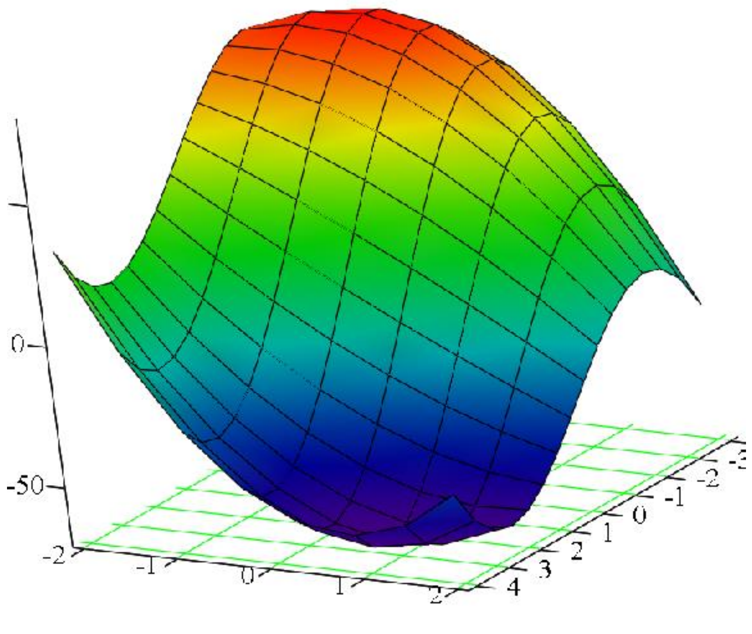
$$\mathrm{Hf}(-3,-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ -6 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\left|\mathrm{Hf}(-3,-1)\right| = 288$$

Minorul principal de ordin unu este -18, negativ, iar minorul de ordin doi este pozitiv, atunci Hf(-3,-1) este negativ definita, deci M4(-3,-1) este punct de maxim local.

Rezultatul obtinut poate fi observat si pe reprezentarea grafica de mai jos:

$$M := \mathrm{CreateMesh}(f, -4, 4, -2, 2, 16, 8)$$



M

ANALIZA MATEMATICA CU MATHCAD

Puncte de extrem local

Exemplul 3

Sa se afle punctele de extrem local ale functiei:

$$f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - x\cdot y + x - 2\cdot z$$

Aflarea punctelor stationare:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \rightarrow 2\cdot x - y + 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) \rightarrow 2\cdot y - x$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \rightarrow 2\cdot z - 2$$

Se observa ca, prin egalarea cu 0 a fiecarei derivate partiale a functiei f, se obtine un sistem liniar de trei ecuatii cu trei necunoscute.

Matricea coeficientilor sistemului este:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinantul sistemului este nenul: $|A| = 6$

Vectorul termenilor liberi este:

$$b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solutia unica a acestui sistem va fi punct stationar pentru functia data.

$$M := \mathrm{lsolve}(A, b) \qquad M \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ramane de verificat daca punctul M este punct de extrem. Pentru aceasta scriem matricea hessiana asociata diferentialei de ordin 2 a functiei f.

$$Hf(x, y, z) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z)\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z)\right) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)\right) & \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, y, z) \end{bmatrix}$$

$$Hf(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Valoarea hessienei in M este: $Hf\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Trebuie verificat daca matricea hessiana calculata in M este pozitiv definita, negativ definita sau nedefinita ca semn. Pentru aceasta se calculeaza semnul minorilor principali.

$$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1$$

$$\mathrm{Hf1} := \mathrm{submatrix}\left(\mathrm{Hf}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right), 1, 1, 1, 1\right)$$

$$\mathrm{Hf2} := \mathrm{submatrix}\left(\mathrm{Hf}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right), 1, 2, 1, 2\right)$$

$$\mathrm{Hf3} := \mathrm{submatrix}\left(\mathrm{Hf}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right), 1, 3, 1, 3\right)$$

$$|\mathrm{Hf1}| = 2$$

$$|\mathrm{Hf2}| = 3$$

$$|\mathrm{Hf3}| = 6$$

Cum toti minorii principali sunt pozitivi, matricea hessiana calculata in M este pozitiv definita, punctul M fiind astfel punct de minim local. Valoarea minima a functiei f se obtine calculand valoarea acesteia in punctul M.

$$f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \rightarrow -\frac{4}{3}$$

ANALIZA MATEMATICA CU MATHCAD

Puncte de extrem conditionat

Studiul punctelor de extrem conditionat in Mathcad

Exemplul 1

Sa se determine extremele functiei $f(x,y) := x^2 + y^2 - x - y$, variabilele fiind legate prin conditia:

$$x + y - 1 = 0.$$

Se formeaza functia lui Lagrange $F(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda\cdot(x + y - 1)$

si se afla punctele stationare ale functiei F.

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,\lambda) \rightarrow \lambda + 2\cdot x - 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,\lambda) \rightarrow \lambda + 2\cdot y - 1$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}F(x,y,\lambda) \rightarrow x + y - 1$$

Se obtine sistemul liniar:

$$2\cdot x + \lambda = 1$$

$$2\cdot y + \lambda = 1$$

$$x + y = 1$$

Matricea sistemului este: $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = -4$

Vectorul termenilor liberi este $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solutia acestui sistem este $M := \text{lsolve}(A,b)$ $\quad M \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Punctul $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ este punct stationar al functiei F(x,y,λ).

Trebuie vazut daca $M1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ este punct de extrem al functiei

$$g(x,y) := F(x,y,0)$$

Pentru aceasta scriem expresia diferentialei de ordin 2 a functiei g in M1, aplicata unei perechi (h1, h2). Calculam initial derivatele partiale de ordin 2 ale functiei g.

$$g2x(x,y) := \frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,y)$$

$$g2y(x,y) := \frac{\partial^2}{\partial y^2}g(x,y)$$

$$g2xy(x,y) := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}g(x,y)\right)$$

Diferentiala de ordin 2 a functiei g calculata in M1, aplicata unei perechi (h1, h2) va fi:

$$d2gM1(h1,h2) := g2x\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)h1^2 + 2\cdot g2xy\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot h1\cdot h2 + g2y\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)h2^2$$

$$d2gM1(h1,h2) \rightarrow 2\cdot h1^2 + 2\cdot h2^2$$

Cum diferentiala de ordin 2 a functiei g calculata in M1 este pozitiv definita (suma unor patrate perfecte), rezulta ca punctul M1 este punct de minim conditionat al functiei initiale f.