# 6. REZOLVAREA ECUAŢIILOR ŞI INECUAŢIILOR ÎN MATHCAD

# MATHCAD

# Rezolvarea ecuatiilor si a inecuatiilor

## Folosirea calculului simbolic pentru rezolvarea ecuatiilor si inecuatiilor

### Rezolvarea simbolica a ecuatiilor de o variabila

Pentru rezolvarea unei ecuatii de o variabila:

- Se scrie ecuatia. In editarea ecuatiei semnul egal se obtine tastand **Ctrl + =**, adica este egalul boolean aflat pe bara **Boolean**.
- Se selecteaza variabila in raport cu care se doreste rezolvarea ecuatiei dand clic pe aceasta.
- Se deschide meniul **Symbolics**, se selecteaza optiunea **Variable** si se da comanda **Solve**.

*Exemplul 1. Rezolvarea ecuatiei de gradul doi*

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0 \quad \text{has solution(s)} \quad \begin{pmatrix} -\dfrac{b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ -\dfrac{b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{pmatrix}$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \text{has solution(s)} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3} \\ \dfrac{-1}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Daca coeficientii ecuatiei sunt scrisi ca numere reale (cu punctul zecimal), atunci solutiile ecuatiei sunt scrise in acelasi format numeric.

$$126.74\cdot x^2 - 276.98\cdot x + 345.21 = 0 \quad \text{has solution(s)}$$

$$\begin{pmatrix} 1.0927094839829572353 - 1.2368311009142415768\cdot i \\ 1.0927094839829572353 + 1.2368311009142415768\cdot i \end{pmatrix}$$

Pentru rezolvarea ecuatiei se poate folosi si cuvantul cheie **solve** de pe bara **Symbolic**.

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot i \\ -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i \end{bmatrix}$$

### *Exemplul 2. Rezolvari de ecuatii algebrice de grad superior*

Nu se recomanda folosirea calculului simbolic pentru rezolvarea ecuatiilor algebrice de grad superior. Rezultatele obtinute sunt de cele mai multe ori fara nicio utilitate practica.
Pentru a vedea cateva astfel de rezultate completati cu x (numele variabilei) locurile marcate din exemplele de mai jos si rezolvati ecuatiile simbolic.

$$x^3 + 3\cdot x^2 + 2 = 0 \text{ solve}, \blacksquare \rightarrow$$

$$x^3 + 3\cdot x^2 + 2. = 0 \text{ solve}, \blacksquare \rightarrow$$

$$a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d = 0 \text{ solve}, \blacksquare \rightarrow$$

### *Exemplul 3. Rezolvarea unor ecuatii trigonometrice*

Ne propunem sa rezolvam simbolic ecuatia sin(x) = 0.

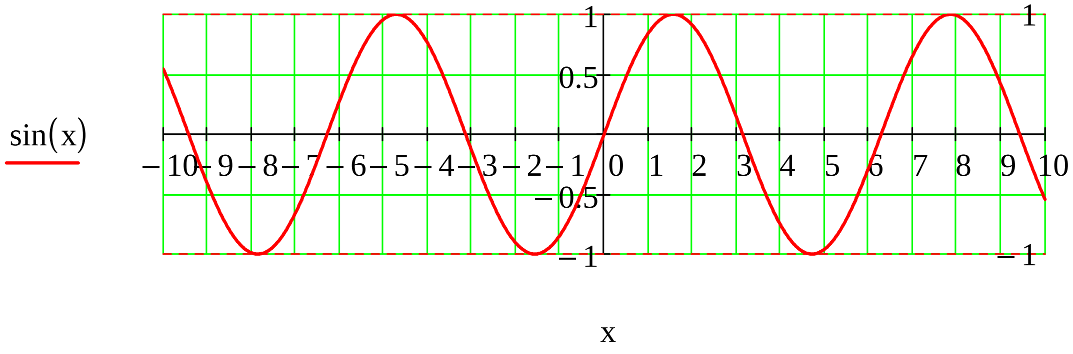
$\sin(x) = 0$ has solution(s) $\quad 0$

$$\sin(x) \text{ solve}, x \rightarrow 0$$

Dupa cum se stie ecuatia sin(x) = 0 are o infinitate de solutii

$$x_k = k\cdot\pi$$

unde k este un numar intreg, asa cum se vede din graficul de de mai jos.



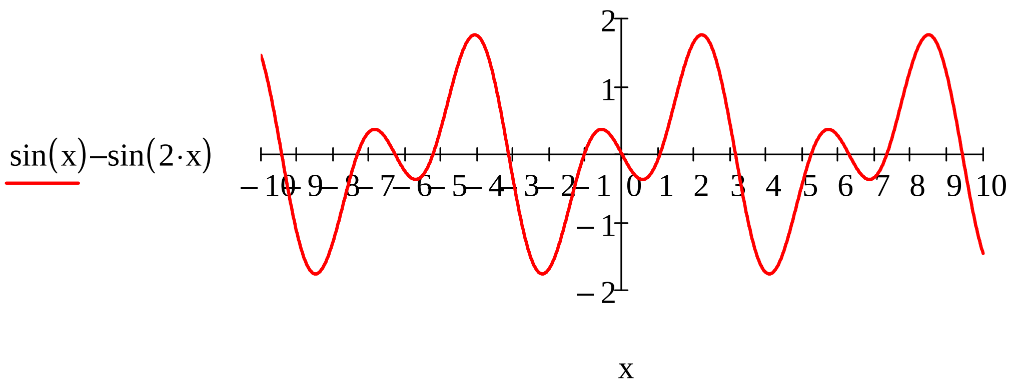

Cum se determina celelalte solutii?

Sa luam un alt exemplu.

$\sin(x) = \sin(2\cdot x)$ has solution(s) $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$

$$\sin(x) = \sin(2\cdot x) \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.047 \end{pmatrix}$$

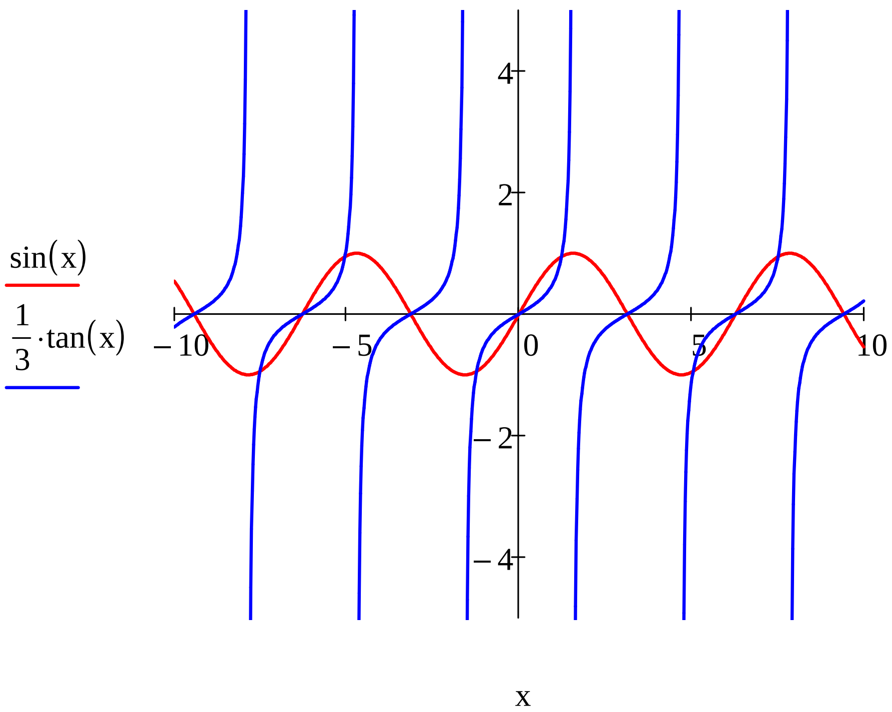
Reprezentarea grafica a functiei f(x) = sin(x) - sin(2x) ne arata ca acesta ecuatie are mult mai multe solutii.

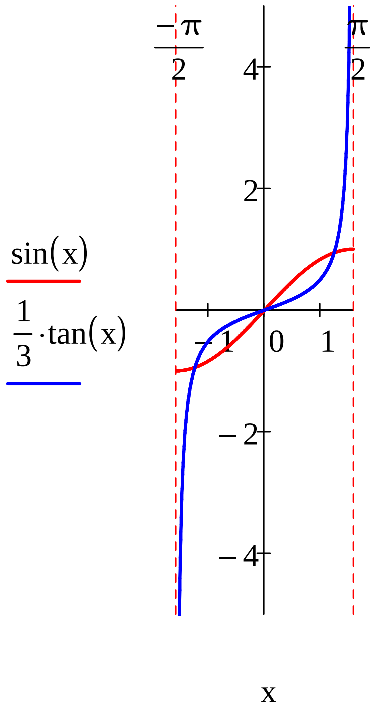


$\sin(x) = \frac{1}{3}\cdot\tan(x)$ has solution(s) $\begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{acos}\left(\frac{1}{3}\right) \\ \mathrm{acos}\left(\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix}$

$$\sin(x) = \frac{1}{3}\cdot\tan(x) \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{acos}\left(\frac{1}{3}\right) \\ \mathrm{acos}\left(\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.231 \\ 1.231 \end{pmatrix}$$

Dupa cum se stie ecuatiile trigonometrice au o infinitate de solutii.
Reprezentarea grafica de mai jos confirma acest lucru.






In acest exemplu solutiile determinate sunt cele din intervalul de lungime egala cu perioada (-π/2, π/2).

## MATHCAD

## Rezolvarea ecuatiilor si a inecuatiilor

### Rezolvarea ecuatiilor algebrice folosind functia polyroots

Pentru rezolvarea ecuatiei algebrice

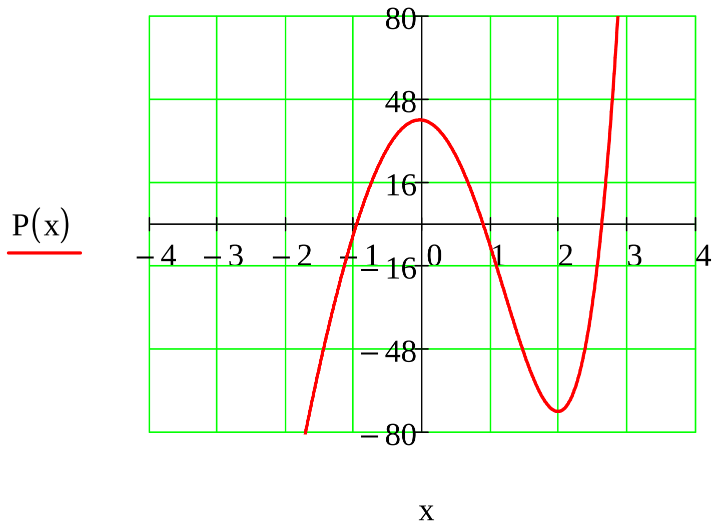
$$x^5 + 4\cdot x^4 - 40\cdot x^2 - 4\cdot x + 48 = 0$$

se determina mai intai vectorul coeficientilor polinomului din membrul stang folosind cuvantul cheie simbolic **coeffs**.

$$P(x) := x^5 + 4\cdot x^4 - 50\cdot x^2 - 4\cdot x + 40 \qquad v := P(x)\ \text{coeffs}, x \ \rightarrow \begin{pmatrix} 40 \\ -4 \\ -50 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vectorul v contine toti coeficientii polinomului, inclusiv cei care sunt zero, incepand cu termenul liber.

Pentru a determina numarul de solutii reale, respectiv complexe, ale ecuatiei date se reprezinta grafic polinomul P(x).




Dand clic cu butonul drept al mouse-ului pe cuvantul **polyroots** se poate alege una dintre cele doua metode, **La Guerre** sau **Companion Matrix**, utilizate de aceasta functie pentru determinarea solutiilor ecuatiei.

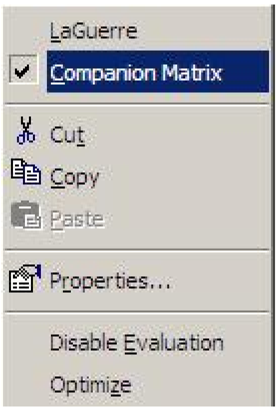
**Cazul 1**. Determinarea solutiei folosind metoda La Guerre.


$$s := \text{polyroots}(v) \qquad s = \begin{pmatrix} -3.276 + 2.653i \\ -3.276 - 2.653i \\ -0.964 \\ 0.889 \\ 2.627 \end{pmatrix}$$

Verificarea solutiei

$$P(s) = \begin{pmatrix} 2.383 \times 10^{-7} - 5.061i \times 10^{-12} \\ 2.383 \times 10^{-7} + 4.491i \times 10^{-12} \\ 2.383 \times 10^{-7} \\ 2.383 \times 10^{-7} \\ 2.383 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

**Cazul 2**. Determinarea solutiei folosind metoda Companion Matrix.




$$s := \text{polyroots}(v) \qquad s = \begin{pmatrix} -3.276 - 2.653i \\ -3.276 + 2.653i \\ -0.964 \\ 0.889 \\ 2.627 \end{pmatrix}$$

Verificarea solutiei

$$P(s) = \begin{pmatrix} -6.892 \times 10^{-13} + 1.37i \times 10^{-12} \\ -6.892 \times 10^{-13} - 1.37i \times 10^{-12} \\ -1.421 \times 10^{-14} \\ -2.842 \times 10^{-14} \\ 5.045 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

Pentru acesta ecuatie a doua metoda calculeaza solutiile ecuatiei cu o precizie mai buna decat prima metoda.

---

## MATHCAD

## Rezolvarea ecuatiilor si a inecuatiilor

### Rezolvarea numerica a ecuatiilor folosind functia root

Ne propunem sa rezolvam ecuatia $\sin(x) = \frac{x}{5}$

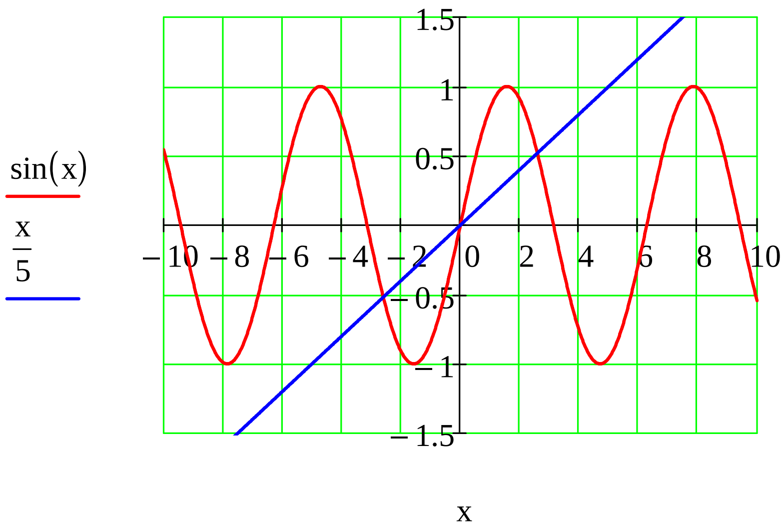
Folosind meniul **Symbolics**, comanda **Variable/Solve,** sau cuvantul cheie simbolic **solve** obtinem:

$\sin(x) = \frac{x}{5}$ has solution(s) $0$

$\sin(x) = \frac{x}{5}$ solve, x $\rightarrow 0$

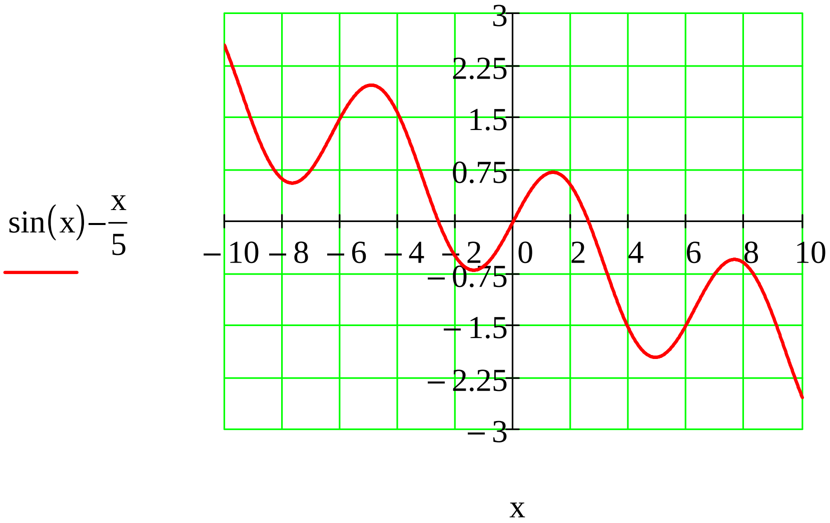
Dupa cum se poate observa pe reprezentarea grafica de mai jos, mai exista si alte doua solutii a acestei ecuatii pe care **Solve** nu le determina.

Pentru a stabili cate solutii are acesta ecuatie si in ce intervale sunt acestea se reprezinta grafic cele doua functii in acelasi sistem de axe.




Abscisele puntelor de intersectie ale celor doua grafice sunt solutiile ecuatiei date.

O alta posibilitate de a stabili numarul solutiilor ecuatiei si intervalele in care se gasesc acestea este de a reprezenta grafic diferenta dintre cele doua functii. Punctele in care graficul diferentei taie axa Ox sunt solutiile ecuatiei date.




Pentru determinarea acestor solutii se foloseste functia **root** din Mathcad.

O ecuatie de forma

$$f(x) = g(x)$$

este echivalenta cu

$$f(x) - g(x) = 0$$

Solutia ecuatiei se obtine folosind **root** in una din urmatoarele forme:

**Varianta 1**

$x := a$ Se da lui x o **valoare initiala** de la care functia **root** incepe cautarea solutiei.

$\mathrm{root}(f(x) - g(x), x)$

**Varianta 2**

$\text{root}(f(x) - g(x), x, a, b)$

unde a si b sunt capetele intervalului in care functia **root** va cauta solutia.

**Observatie.** De regula, se recomanda folosirea functiei **root** in varianta 2, deoarece aceasta forma conduce la determinarea solutiei cu o mai buna precizie.
In punctele a si b, functia ale carei radacini dorim sa le aflam (in scrierea de mai sus, f(x)-g(x)) trebuie sa aiba semne opuse, aceasta garantand existenta cel putin a unei solutii in intervalul [a, b], in ipoteza ca avem o functie continua. Daca aceasta conditie nu este indeplinita, functia **root** returneaza mesaj de eroare.
Trebuie retinut ca functia **root** nu verifica numarul radacinilor din intervalul considerat, ramanand in sarcina utilizatorului sa se asigure de ***existenta doar a unei solutii*** in intervalul [a, b]. Astfel, daca avem spre exemplu 3 radacini in intervalul [a, b] si semne opuse la capete, **root** va determina doar o solutie din cele 3, fara a semnala vreo eroare. Este in schimb posibil sa existe un numar par de solutii in intervalul [a, b] si, avand acelasi semn in capete, sa nu le putem afla, primind mesaj de eroare.
Reprezentarea grafica a expresiei ale carei radacini le cautam ne poate ajuta in general sa evitam astfel de dificultati, permitandu-ne sa stabilim intervale ce contin cate o singura solutie. Totusi in cazul radacinilor duble (sau, mai general, de ordin par), problema nu poate fi evitata, functia avand acelasi semn de ambele parti ale radacinii respective. In aceste situatii, ne ramane doar posibilitatea utilizarii functiei **root** in varianta 1 sau, daca este o ecuatie de tip polinomial, a functiei **polyroots**, determinand astfel in plus si ordinul radacinii respective.

## Exemplul 1

Notam $f(x) := \sin(x) - \frac{x}{5}$

$x := 4$ $\quad s1 := \text{root}(f(x), x)$ $\quad s1 = 2.595739$ $\quad f(s1) = -8.71 \times 10^{-12}$

Deoarece f(s1) nu este practic zero, trebuie sa micsoram valoarea implicita a variabilei de sistem TOL, care este 0.001.

$TOL := 10^{-6}$

$x := 4 \qquad s1 := root(f(x), x) \quad s1 = 2.595739 \qquad f(s1) = -8.71 \times 10^{-12}$

$TOL := 10^{-10}$

$x := 4 \qquad s1 := root(f(x), x) \quad s1 = 2.595739 \qquad f(s1) = 0$

$TOL := 10^{-12}$

$x := 4 \qquad s1 := root(f(x), x) \quad s1 = 2.595739 \qquad f(s1) = 0$

Pentru o alta valoare initiala a lui x se poate obtine o alta solutie a ecuatiei.

$TOL := 10^{-12}$

$x := -4 \qquad s2 := root(f(x), x) \quad s2 = -2.595739$

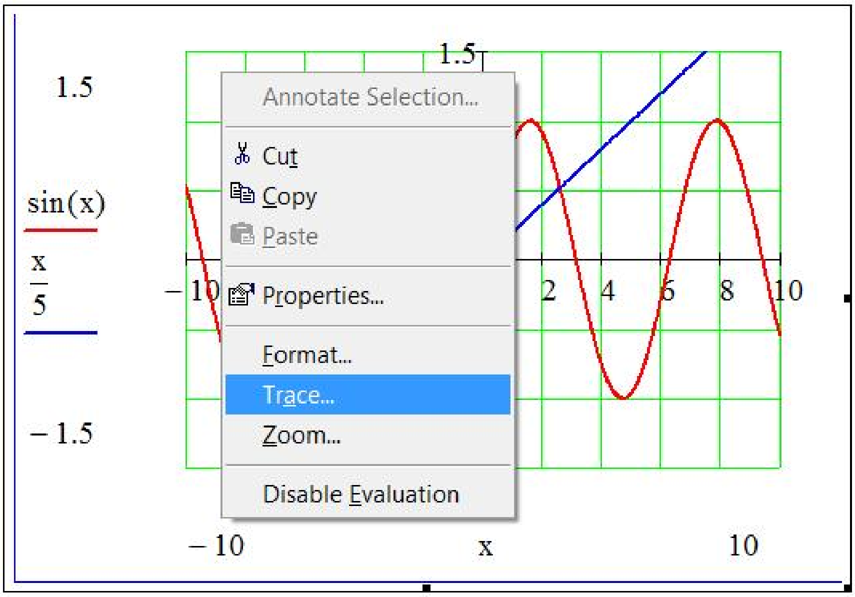
$f(s1) = 0.000000000000000$

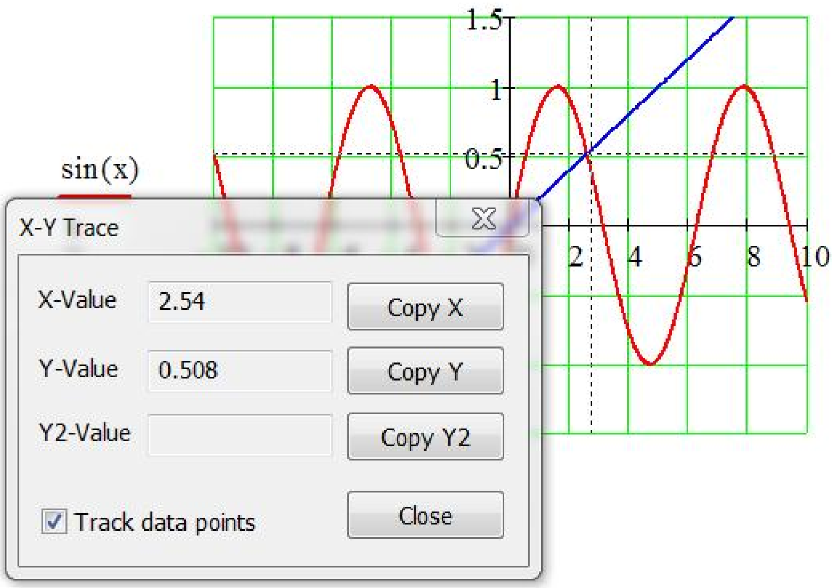
$TOL := 10^{-12}$

$x := 1 \qquad s3 := root(f(x), x) \quad s3 = 0$

$f(s1) = 0.000000000000000$

Pentru determinarea cate unei valori initiale a lui x in apropierea fiecarei solutii a ecuatiei, putem folosi reprezentarea grafica si optiunea **Trace...** din meniul contextual ce apare la clic dreapta pe grafic. Efectuand clic pe un punct de pe grafic, in fereastra Trace putem vedea coordonatele punctului respectiv.




In cele ce urmeaza vom folosi functia **root** in varianta 2, adica indicand intervalul in care trebuie cautata solutia. Dupa cum se observa, chiar pentru valoarea implicita a tolerantei solutiile sunt determinate cu o mare precizie.

$TOL := 10^{-3}$

$s4 := root(f(x), x, 2, 4)$ $s4 = 2.595739$ $f(s4) = 0.000000000000000$

$s5 := root(f(x), x, -4, -2)$ $s5 = -2.595739$ $f(s5) = 0.000000000000000$

$s6 := root(f(x), x, -1, 1)$ $s6 = 0$ $f(s6) = 0.000000000000000$

## MATHCAD

## Rezolvarea ecuatiilor si a inecuatiilor

---

### Folosirea calculului simbolic pentru rezolvarea ecuatiilor si inecuatiilor

### Rezolvarea simbolica a inecuatiilor de o variabila

Mathcad-ul se poate utiliza pentru rezolvarea inecuatiilor. In acest scop se folosesc operatorii logici aflati pe bara **Boolean**.

▮ > ▮ ▮ < ▮ ▮ ≥ ▮ Tastati **Ctrl+9** ▮ ≤ ▮ Tastati **Ctrl+0**


Primii doi operatori se pot introduc direct folosind tastatura.

Pentru rezolarea unei inecuatii se parcurg etapele:

1. Se scrie inecuatia $x^3 - 2\cdot x^2 - 2\cdot x - 3 > 0$

2. Se selecteaza variabila x in una din pozitiile sale.

$$x^3 - 2\cdot x^2 - 2\cdot x - 3 > 0$$

3. Se deschide meniul **Symbolics**, se selecteaza optiunea **Variable** si din lista derulanta care apare se da comanda **Solve**.

Pentru inecuatia de mai sus se obtine:

$$x^3 - 2\cdot x^2 - 2\cdot x - 3 > 0 \quad \text{has solution(s)} \quad 3 < x$$

Asadar, inegalitatea are solutia (3, ∞).

Daca inecuatia are o solutie formata din reuniunea sau intersectia a doua sau mai multe conditii, rezultatul este scris sub forma unei insiruiri a conditiilor respective, conectate prin operatorii logici de disjunctie, respectiv de conjunctie (care se pot citi ca "sau", respectiv "si"). De exemplu:

1. $x^3 - 5\cdot x^2 - 4\cdot x + 20 > 0$ has solution(s) $5 < x \vee -2 < x < 2$

Solutia este asadar reuniunea (-2, 2) U (5, $\infty$)

2. $x^4 - x^2 - 3\cdot x^3 + 9\cdot x - 6 > 0$ has solution(s)

$$1 < x < \sqrt{3} \vee x < -\sqrt{3} \vee 2 < x$$

Inecuatia are ca solutie reuniunea (-$\infty$, -$\sqrt{3}$) U (1, $\sqrt{3}$) U (2, $\infty$).

In locul comenzii **Solve** din meniul simbolic se poate folosi cuvantul cheie **solve** din bara **Symbolic**.

$$\blacksquare \text{ solve}, \blacksquare \rightarrow$$

In primul loc marcat se scrie inecuatia, iar in al doilea se precizeaza variabile in raport cu care se cere rezolvarea inecuatiei.

$$x^4 - x^2 - 3\cdot x^3 + 9\cdot x - 6 \le 0 \text{ solve}, x \rightarrow \sqrt{3} \le x \le 2 \vee -\sqrt{3} \le x \le 1$$

$$x^3 - 2\cdot x^2 + 1 > 0 \text{ solve}, x \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < x < 1 \vee \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} < x$$

Pentru inecuatia $x^3 - 5\cdot x^2 + x - 5 \ge 0$ se obtine:

$x^3 - 5\cdot x^2 + x - 5 \ge 0$ has solution(s) _c1

Raspunsul obtinut este, in mod surprinzator, neutilizabil in acest caz. Daca insa incercam sa rezolvam inegalitatea stricta, vom obtine:

$$x^3 - 5\cdot x^2 + x - 5 > 0 \quad \text{has solution(s)} \quad 5 < x$$

Aceasta inseamna ca solutia inegalitatii stricte este intervalul (5, ∞).

Rezolvam separat ecuatia: $x^3 - 5\cdot x^2 + x - 5 = 0$ has solution(s) $\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 5 \end{pmatrix}$

Asadar, inegalitatea $x^3 - 5\cdot x^2 + x - 5 \geq 0$ are ca solutie intervalul [5,∞)

Un alt exemplu foarte simplu confirma dificultatea acestei versiuni a programului Mathcad de a rezolva inegalitati nestricte:

$$x^2 - 3\cdot x + 2 \geq 0 \quad \text{has solution(s)} \quad \begin{pmatrix} \_c1 \\ \_c2 \end{pmatrix}$$

sau, folosind cuvantul cheie **solve** din bara **Symbolic**:

$$x^2 - 3\cdot x + 2 \geq 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \_c1 \\ \_c2 \end{pmatrix}$$

Aceeasi inegalitate, dar stricta, este rezolvata fara probleme:

$$x^2 - 3\cdot x + 2 > 0 \quad \text{has solution(s)} \quad x < 1 \vee 2 < x$$

Asadar, solutia inecuatiei stricte este reuniunea (-∞, 1) U (2, ∞).

Rezolvand si ecuatia $x^2 - 3\cdot x + 2 = 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, deducem

ca inegalitatea $x^2 - 3\cdot x + 2 \geq 0$ are solutia (-∞, 1] U [2, ∞)

Concluzia ce se desprinde din aceste exemple este ca, in Mathcad 14, este *preferabil sa rezolvam inegalitati stricte*. Cazul de egalitate se poate trata separat, ca o ecuatie, reunindu-se in final solutiile, dupa cum am ilustrat mai sus.

In afara de dificultatile de rezolvare a inegalitatilor nestricte, rezolvarea inegalitatilor in modul aratat mai sus este supusa si limitarilor pe care am vazut ca utilizarea comenzii sau a cuvantului cheie **solve** le presupune si in cazul ecuatiilor.
Pentru rezolvarea ecuatiilor mai complicate, am vazut ca este necesar sa apelam la functia **polyroots**, in cazul ecuatiilor polinomiale, sau la **root**, in cazul altor tipuri de ecuatii, pentru aflarea radacinilor *reale* ale acestora. Aflarea radacinilor reale ale unei expresii *E(x)*, impreuna cu reprezentarea ei grafica, ne permite sa determinam apoi cu usurinta semnul acesteia, rezolvand astfel o eventuala inecuatie de tipul *E(x)* > 0 sau *E(x)* < 0.
Exemplificam in continuare rezolvarea unei astfel de inecuatii.

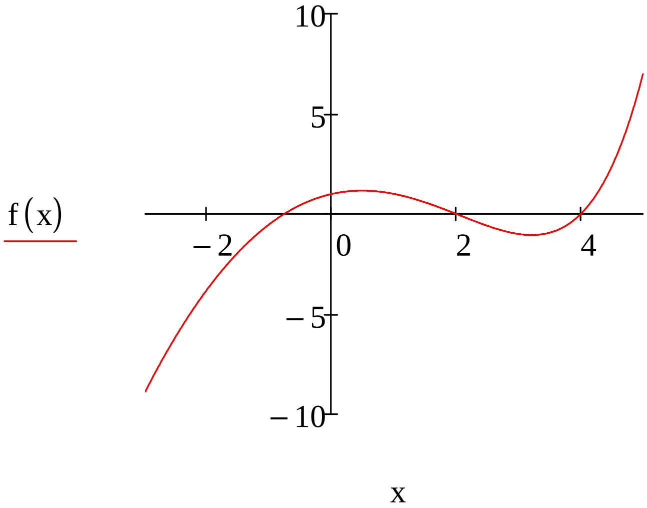
Consideram ecuatia: $2^x < x^2$

Tentativa de a folosi cuvantul cheie **solve** conduce la urmatorul rezultat:

$2^x < x^2$ solve, x $\rightarrow$

No symbolic result was found.

Reprezentam grafic functia $f(x) := 2^x - x^2$




Determinam radacinile cu ajutorul functiei **root**.

$TOL := 10^{-10}$ $\quad s1 := root(f(x), x, -2, 0)$ $\quad s1 = -0.7666647$

Verificare: $\quad f(s1) = 0$

A doua radacina: $s2 := \mathrm{root}(f(x), x, 0, 3)$ $s2 = 2$

Verificare: $f(s2) = 0$

A treia radacina: $s3 := \mathrm{root}(f(x), x, 3, 5)$ $s3 = 4$

Verificare: $f(s3) = 0$

Pe baza reprezentarii grafice, concluzionam ca $f(x) < 0$ pe multimea (-∞, s1)U(s2, s3). Solutia inecuatiei date este asadar: (-∞, -0.7666647)U(2, 4)

# 7. REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAŢII NELINIARE ÎN MATHCAD

# MATHCAD

## Rezolvarea sistemelor de ecuatii neliniare

---

### Determinarea unei solutii

Pentru rezolvarea unui sistem de ecuatii neliniare in Mathcad se procedeaza astfel:

1. Se definesc **valori initiale** pentru variabilele sistemului.
Aceste valori sunt folosite de algoritmul de rezolvare ca puncte de plecare pentru determinarea unei solutii. De regula, se va determina solutia din apropierea valorilor initiale date.

$x := 1 \qquad y := 1$

2. Se scrie cuvantul cheie "Given" urmat de ecuatiile sistemului.
Egalul din scrierea ecuatiilor este **egalul boolean**.

Given

$x^2 + x \cdot y + 4 \cdot y^2 = 10$

$x^2 + y^2 = 5$

3. Se determina solutia sistemului folosind functia "Find".

$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dupa cum se observa solutia sistemului este data sub forma unui vector. Pentru ca solutia sa poata fi folosita in continuare este de preferat ca vectorul solutiilor sa primeasca un nume. De exemplu

Given

$x^2 + x \cdot y + 4 \cdot y^2 = 10$

$x^2 + y^2 = 5.$

$s := \mathrm{Find}(x, y) \qquad s = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1 \qquad s_1 = 2 \qquad s_2 = 1$

Pentru a vedea precizia cu care a fost determinata solutia sistemului este bine a aceasta sa fie afisata cu cat mai multe zecimale, eventual cu toate cele 15 disponibile atunci cand se foloseste modul de calcul numeric.

$$s = \begin{pmatrix} 2.000000000000000 \\ 1.000000000000000 \end{pmatrix}$$

## Precizia determinarii solutiei

Pentru a putea verifica cu usurinta cat de bine a fost determinata solutia sistemului este de preferat aranjarea calculelor asa cum se vede mai jos.

**1. Se definesc functiile care constituie ecuatiile sistemului:**

$$f1(x,y) := x^2 + x\cdot y + 4\cdot y^2 - 10$$

$$f2(x,y) := x^2 + y^2 - 5$$

**2. Se dau valori initiale variabilelor:**

$x := 1$ $\qquad$ $y := 2$

**3. Se scrie blocul Given:**

Given

$f1(x,y) = 0$

$f2(x,y) = 0$

**4. Se determina solutia:**

$s := \mathrm{Find}(x,y)$ $\qquad$ $s = \begin{pmatrix} 2.000000000000000 \\ 1.000000000000000 \end{pmatrix}$

**5. Se face verificarea solutiei obtinute:**

$ORIGIN \equiv 1$

$f1(s_1, s_2) = 0$ $\qquad$ $f2(s_1, s_2) = 0$

## Imbunatatirea preciziei solutiei determinate

**Metoda 1.** Pentru obtinerea solutiei cu o precizie mai buna se modifica valorile intiale date variabilelor dandu-le acestora valorile (exacte sau aproximative) ce au fost determinate de Find.

$f1(x,y) := x^2 + x \cdot y + 4 \cdot y^2 - 10$

$f2(x,y) := x^2 + y^2 - 5$

Se schimba datele initiale din $x = 1$ $y = 2$ in

$x := 1.9$ $y := 0.9$

Given

$f1(x,y) = 0$

$f2(x,y) = 0$

$s := \mathrm{Find}(x,y)$ $s = \begin{pmatrix} 2.000000000000000 \\ 1.000000000000000 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei

$f1(s_1, s_2) = 0.000000000000000$ $f2(s_1, s_2) = 0.000000000000000$

**Metoda 2.** Se micsoreaza valorile variabilei CTOL (Constraint Tolerance). Valoare implicita a acestei variabile este 0.001.

$f1(x,y) := x^2 + x \cdot y + 4 \cdot y^2 - 10$

$f2(x,y) := x^2 + y^2 - 5$

$x := 1$ $y := 2$ $CTOL := 10^{-10}$

Given

$f1(x,y) = 0$

$f2(x,y) = 0$

$s := \mathrm{Find}(x,y)$ $s = \begin{pmatrix} 2.000000000000000 \\ 1.000000000000000 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei

$f1(s_1, s_2) = 0.000000000000000$ $f2(s_1, s_2) = 0.000000000000000$

## Determinarea altor solutii ale sistemului

Schimbarea valorilor initiale poate duce la determinarea altei solutii (daca aceasta exista).

$x := -1$ $y := -2$

Given

$f1(x, y) = 0$

$f2(x, y) = 0$

$s := Find(x, y)$ $s = \begin{pmatrix} -2.000000000000000 \\ -1.000000000000000 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei

$f1(s_1, s_2) = 0.000000000000000$ $f2(s_1, s_2) = 0.000000000000000$

$x := -1$ $y := 2$

Given

$f1(x, y) = 0$

$f2(x, y) = 0$

$s := Find(x, y)$ $s = \begin{pmatrix} -1.581138830084190 \\ 1.581138830084190 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei

$f1(s_1, s_2) = -1.776356839400250 \times 10^{-15}$ $f2(s_1, s_2) = 0.000000000000000$

$x := 1 \qquad y := -2$

Given

$f1(x,y) = 0$

$f2(x,y) = 0$

$s := \mathrm{Find}(x,y) \qquad s = \begin{pmatrix} 1.581138830084190 \\ -1.581138830084190 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei

$f1(s_1, s_2) = -1.776356839400250 \times 10^{-15} \quad f2(s_1, s_2) = 0.000000000000000$

In mod natural apar intrebarile:
a) Au fost determinate toate solutiile sistemului?
b) Cate solutii are acest sistem?

In cazul bidimensional raspunsurile la aceste intrebari se pot obtine reprezentand grafic curbele date de ecuatiile sistemului.

## MATHCAD

## Rezolvarea sistemelor de ecuatii neliniare

### Exemplu

Determinati intersectia dintre cercul cu centrul in origine si de raza egala cu 3 si dreapta y = 2x + 1

### *Reprezentarea grafica*

Cercul cu centru in origine si de raza R are ecuatia carteziana implicita

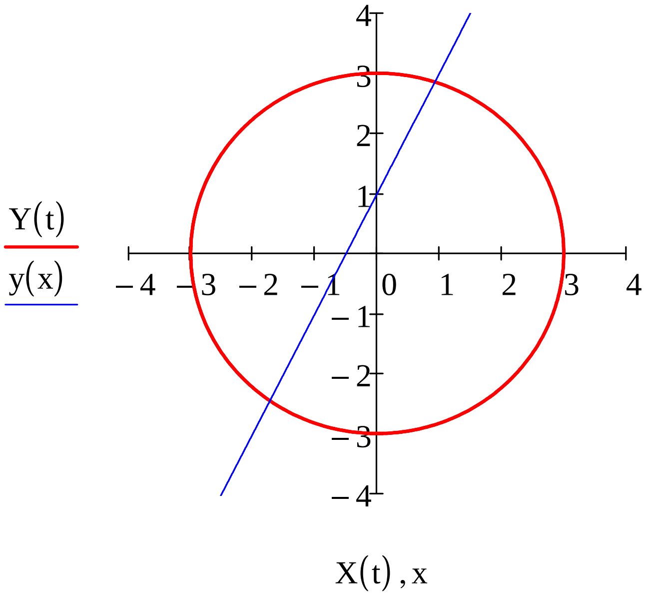
$$x^2 + y^2 = R^2$$

Definim raza cercului dat $R := 3$

Ecuatiile parametrice ale cercului cu centrul in origine si de raza R sunt

$$X(t) := R \cdot \cos(t) \quad Y(t) := R \cdot \sin(t)$$

Dreapta data $y(x) := 2 \cdot x + 1$



### *Rezolvarea sistemului neliniar*

Se definesc functiile care definesc ecuatiile sistemului

$f1(x,y) := x^2 + y^2 - 9$

$f2(x,y) := 2 \cdot x - y + 1$

Se dau valori initiale variabilelor. In functie de acestea se va determina o solutie.

$x := 1 \qquad y := 3$

Se scrie cuvantul cheie **Given** si apoi ecuatiile sistemului. Semnul de egalitate este cel boolean.

Given

$f1(x,y) = 0$

$f2(x,y) = 0$

Se determina solutia folosind functia **Find**.

$s := \mathrm{Find}(x,y) \qquad s = \begin{pmatrix} 0.927 \\ 2.853 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei obtinute:

$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1 \qquad s_1 = 0.927 \qquad s_2 = 2.853$

$f1(s_1, s_2) = 0 \qquad f2(s_1, s_2) = 0$

Pentru imbunatatirea solutiei sistemului se micsoreaza valoarea variabilei CTOL (constraint tolerance for solve blocks). Valoarea predefinita pentru CTOL este 0.001.

$\mathrm{CTOL} := 10^{-10}$

Given

$f1(x,y) = 0$

$f2(x,y) = 0$

Se determina solutia folosind functia **Find**.

$s := \mathrm{Find}(x, y)$ $\quad s = \begin{pmatrix} 0.927 \\ 2.853 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei obtinute. $\quad s_1 = 0.927 \quad s_2 = 2.853$

$f1(s_1, s_2) = 0$

$f2(s_1, s_2) = 0$

Pentru determinarea altei solutii se repeta calculele dand valori initiale diferite.

$x := -1 \quad y := -1$

Given

$f1(x, y) = 0$

$f2(x, y) = 0$

$s := \mathrm{Find}(x, y)$ $\quad s = \begin{pmatrix} -1.727 \\ -2.453 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei obtinute. $\quad s_1 = -1.727 \quad s_2 = -2.453$

$f1(s_1, s_2) = 0$

$f2(s_1, s_2) = 0$

Alte solutii nu mai sunt conform reprezentarii grafice de mai sus.

## MATHCAD

## Rezolvarea sistemelor de ecuatii neliniare

### Exemplu

Determinati intersectia dintre cercul cu centrul in punctul C(2, -3) si de raza R = 4 cu dreapta y = -2x + 6.

### *Reprezentarea grafica*

Ecuatia implicita a cercului cu centrul in punctul C(a,b) si raza R este:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

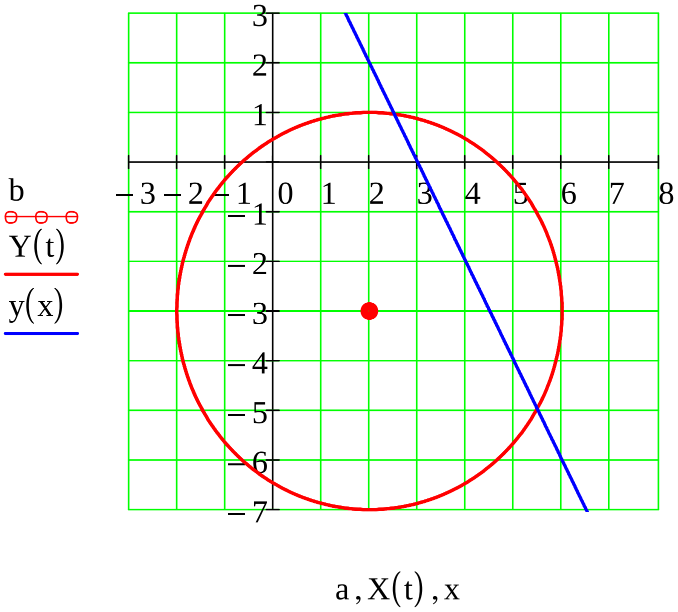
Introducem coordonatele centrului si raza cercului

$$a := 2 \qquad b := -3 \qquad R := 4$$

Pentru reprezentarea grafica consideram ecuatiile parametrice ale cercului

$$X(t) := a + R \cdot \cos(t) \qquad Y(t) := b + R \cdot \sin(t)$$

Dreapta data $\qquad y(x) := -2 \cdot x + 6$



***Rezolvarea sistemului neliniar***

Se definesc functiile care definesc ecuatiile sistemului.

$f1(x,y) := (x-2)^2 + (y+3)^2 - 16$

$f2(x,y) := 2 \cdot x + y - 6$

Se dau valori initiale variabilelor. In functie de acestea se determina o solutie.

$x := 3 \quad y := 1$

Se scrie cuvantul cheiei **Given** si apoi ecuatiile sistemului. Semnul de egalitate este cel boolean.

$CTOL := 10^{-10}$

Given

$f1(x,y) = 0$

$f2(x,y) = 0$

Se determina solutia folosind functia **Find**.

$s := Find(x,y) \qquad s = \begin{pmatrix} 2.516760302580868 \\ 0.966479394838265 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei obtinute.

$ORIGIN \equiv 1 \qquad s_1 = 2.517 \qquad s_2 = 0.966$

$f1(s_1, s_2) = 0$

$f2(s_1, s_2) = 0$

Pentru determinarea altei solutii se repeta calculele cu valoti initiale diferite.

$x := 5 \quad y := -5 \quad CTOL := 10^{-10}$

Given

$f1(x,y) = 0$

$f2(x,y) = 0$

Se determina solutia folosind functia **Find**.

$s := \mathrm{Find}(x, y)$

$$s = \begin{pmatrix} 5.483239697419132 \\ -4.966479394838266 \end{pmatrix}$$

Verificarea solutiei obtinute.

$ORIGIN \equiv 1$ $\quad s_1 = 5.483$ $\quad s_2 = -4.966$

$f1(s_1, s_2) = 0$

$f2(s_1, s_2) = 0$

Alte solutii nu mai sunt conform reprezentarii grafice
de mai sus.

# MATHCAD

## Rezolvarea sistemelor de ecuatii neliniare

### Exemplu

Determinati intersectia dintre elipsa de semiaxe a = 3 si b = 2 si dreapta y = 2x - 1

### *Reprezentarea grafica*

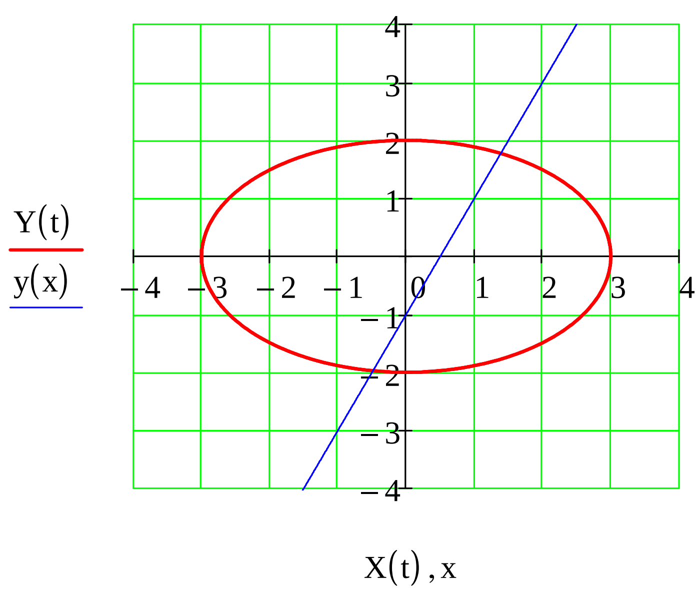
Ecuatia implicita a elipsei care are semiaxele a si b este: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Definim semiaxele elipsei date $a := 3$ $b := 2$

Pentru reprezentarea grafica consideram ecuatiile parametrice ale elipsei:

$$X(t) := a \cdot \cos(t) \qquad Y(t) := b \cdot \sin(t)$$

Dreapta data: $y(x) := 2 \cdot x - 1$



## *Rezolvarea sistemului neliniar*

Se definesc functiile care constituie ecuatiile sistemului.

$$f1(x,y) := \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1$$

$$f2(x,y) := 2x - y - 1$$

Se dau variabilelor valori initiale. In functie de acestea se determina o solutie.

$x := 1$ $y := 1$

Se scrie cuvantul cheie **Given** si apoi ecuatiile sistemului. Semnul de egalitate este cel boolean.

$$CTOL := 10^{-10}$$

Given

$$f1(x,y) = 0$$

$$f2(x,y) = 0$$

Se determina solutia folosind functia **Find**.

$s := Find(x,y)$ $s = \begin{pmatrix} 1.386749699759760 \\ 1.773499399519519 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei obtinute.

$$ORIGIN \equiv 1$$

$s_1 = 1.387$ $s_2 = 1.773$

$$f1(s_1, s_2) = 0$$

$$f2(s_1, s_2) = 0$$

Pentru determinarea altei solutii se repeta calculele cu valori initiale diferite.

$x := -1 \qquad y := -1$

$CTOL := 10^{-10}$

Given

$f1(x, y) = 0$

$f2(x, y) = 0$

Se determina solutia folosind functia **Find**.

$s := \text{Find}(x, y) \qquad s = \begin{pmatrix} -0.486749699759760 \\ -1.973499399519519 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei obtinute.

$ORIGIN \equiv 1 \qquad s_1 = -0.487 \qquad s_2 = -1.973$

$f1(s_1, s_2) = 0$

$f2(s_1, s_2) = 0$

Alte solutii nu mai sunt conform reprezentarii grafice.

## MATHCAD

## Rezolvarea sistemelor de ecuatii neliniare

---

### Exemplu

Determinati solutia sistemului de ecuatii

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

### Solutie.

Sistemul de ecuatii este format din ecuatia unei elipse si a unui cerc.

Semiaxele elipsei: $a := \sqrt{5}$ $\quad b := \sqrt{3}$

Ecuatiile parametrice ale elipsei

$$X1(t) := a \cdot \cos(t)$$

$$Y1(t) := b \cdot \sin(t)$$

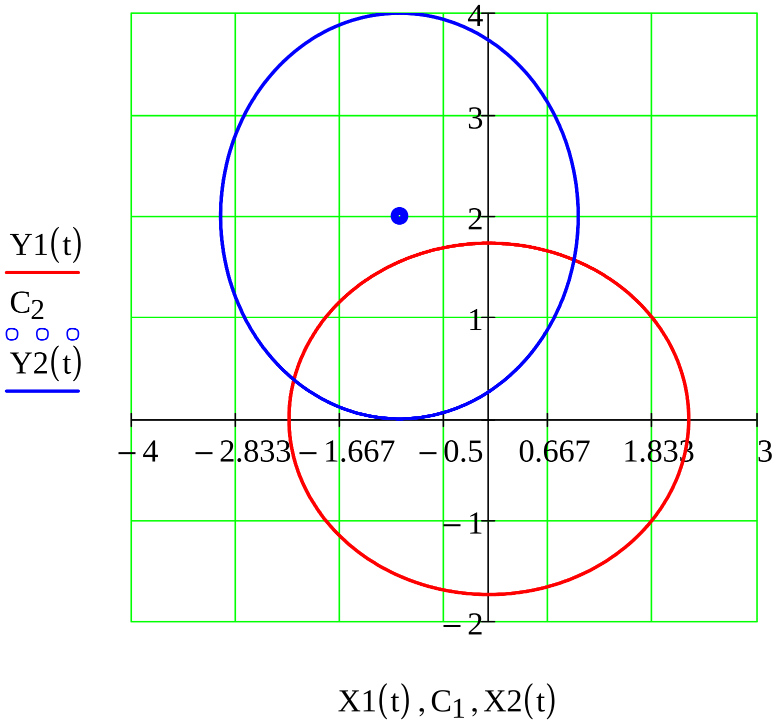
Centrul cercului $C := \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}^T$ $\quad$ ORIGIN := 1

Raza cercului $R := 2$

Ecuatiile parametrice ale cercului:

$$X2(t) := C_1 + R \cdot \cos(t)$$

$$Y2(t) := C_2 + R \cdot \sin(t)$$




***Determinarea solutiei din cadranul unu:***

$$f1(x,y) := \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} - 1$$

$$f2(x,y) := (x+1)^2 + (y-2)^2 - 4$$

$x := 1 \qquad y := 1$

$CTOL := 10^{-10}$

Given

$f1(x,y) = 0$

$f2(x,y) = 0$

$s := \text{Find}(x,y) \qquad s = \begin{pmatrix} 0.953 \\ 1.567 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei obtinute.

$ORIGIN \equiv 1$ $s_1 = 0.953$ $s_2 = 1.567$

$f1(s_1, s_2) = 0$

$f2(s_1, s_2) = 0$

***Determinarea solutiei din cadranul doi:***

$x := -2$ $y := 1$

$CTOL := 10^{-10}$

Given

$f1(x, y) = 0$

$f2(x, y) = 0$

$s := Find(x, y)$ $s = \begin{pmatrix} -2.18 \\ 0.385 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei obtinute.

$ORIGIN \equiv 1$ $s_1 = -2.18$ $s_2 = 0.385$

$f1(s_1, s_2) = 0$

$f2(s_1, s_2) = 0$

Conform reprezentarii grafice de mai sus au fost
determinate toate solutiile.

# MATHCAD

## Rezolvarea sistemelor de ecuatii neliniare

### Exemplu

Determinati solutia sistemului de ecuatii

$$5\cdot x^2 - y^2 = 0$$

$$y + 0.25\cdot(\sin(x) + \cos(y)) = 0$$

***Solutie.***

$$5\cdot x^2 - y^2 = 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}\cdot y}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}\cdot y}{5} \end{pmatrix}$$

Definim: $g1(y) := \frac{\sqrt{5}\cdot y}{5}$ $\quad g2(y) := -\frac{\sqrt{5}\cdot y}{5}$

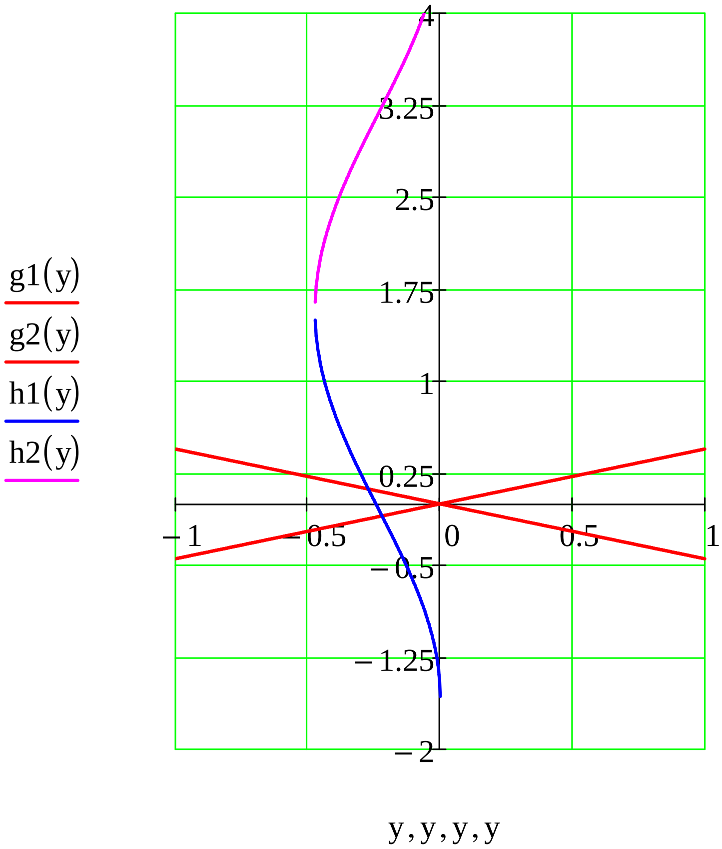
$$y + \frac{(\sin(x) + \cos(y))}{4} = 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \operatorname{asin}(-4\cdot y - \cos(y)) \\ \pi - \operatorname{asin}(-4\cdot y - \cos(y)) \end{pmatrix}$$

Definim functiile corespunzatoare:

$$h1(y) := \operatorname{asin}(-4.\cdot y - 1.\cdot\cos(y))$$

$$h2(y) := \pi - \operatorname{asin}(-4\cdot y - \cos(y))$$

Pentru determinarea valorilor initiale ale solutiilor, precum si a numarului acestora, folosim reprezentarea grafica de mai jos. Pentru o determinare mai precisa a valorilor initiale se poate folosi comanda **Trace** din meniul contextual ce apare la clic dreapta pe grafic.




$f1(x, y) := 5 \cdot x^2 - y^2$

$f2(x, y) := y + 0.25 \cdot (\sin(x) + \cos(y))$

**Determinarea unei solutii**

$x := -0.5 \quad y := -0.5$

$CTOL := 10^{-10}$

Given

$f1(x, y) = 0$

$f2(x, y) = 0$

$s := \text{Find}(x, y) \qquad s = \begin{pmatrix} -0.098 \\ -0.22 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei obtinute.

$ORIGIN \equiv 1 \qquad s_1 = -0.098 \qquad s_2 = -0.22$

$f1(s_1, s_2) = 0 \qquad f2(s_1, s_2) = 0$

**Determinarea unei alte solutii**

$x := -0.5 \quad y := 0.25$

$CTOL := 10^{-10}$

Given

$f1(x, y) = 0$

$f2(x, y) = 0$

$s := \mathrm{Find}(x, y) \qquad s = \begin{pmatrix} -0.098 \\ -0.220 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei obtinute.

$s_1 = -0.098 \qquad s_2 = -0.22$

$f1(s_1, s_2) = 0$

$f2(s_1, s_2) = 0$

Conform reprezentarii grafice de mai sus au fost determinate toate solutiile.

## MATHCAD

## Rezolvarea sistemelor de ecuatii neliniare

### Determinarea numarului de solutii ale unui sistem neliniar bidimensional prin metoda grafica

Consideram sistemul neliniar:

$$x^2 + x \cdot y + 4 \cdot y^2 = 10$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

Pentru a determina care este numarul de solutii ale acestui sistem reprezentam grafic curbele plane definite implicit

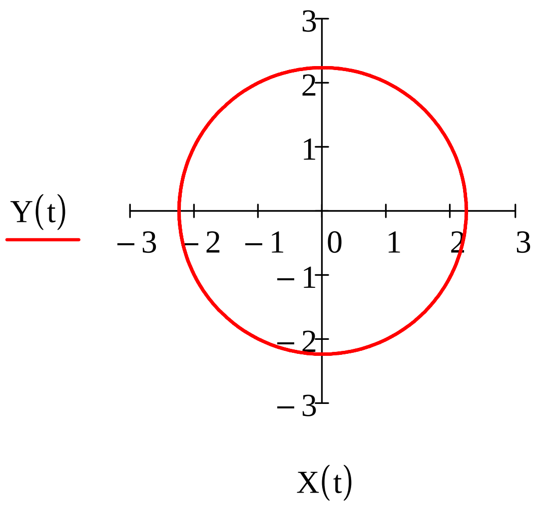
$$x^2 + x \cdot y + 4 \cdot y^2 - 10 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 5 = 0$$

Incepem cu a doua curba care este un cerc cu centrul in origine si raza $\sqrt{5}$ care are ecuatiile parametice:

$$X(t) := \sqrt{5} \cdot \cos(t)$$

$$Y(t) := \sqrt{5} \cdot \sin(t)$$



Pentru a doua curba, explicitam ecuatia scotand valoarea lui y:

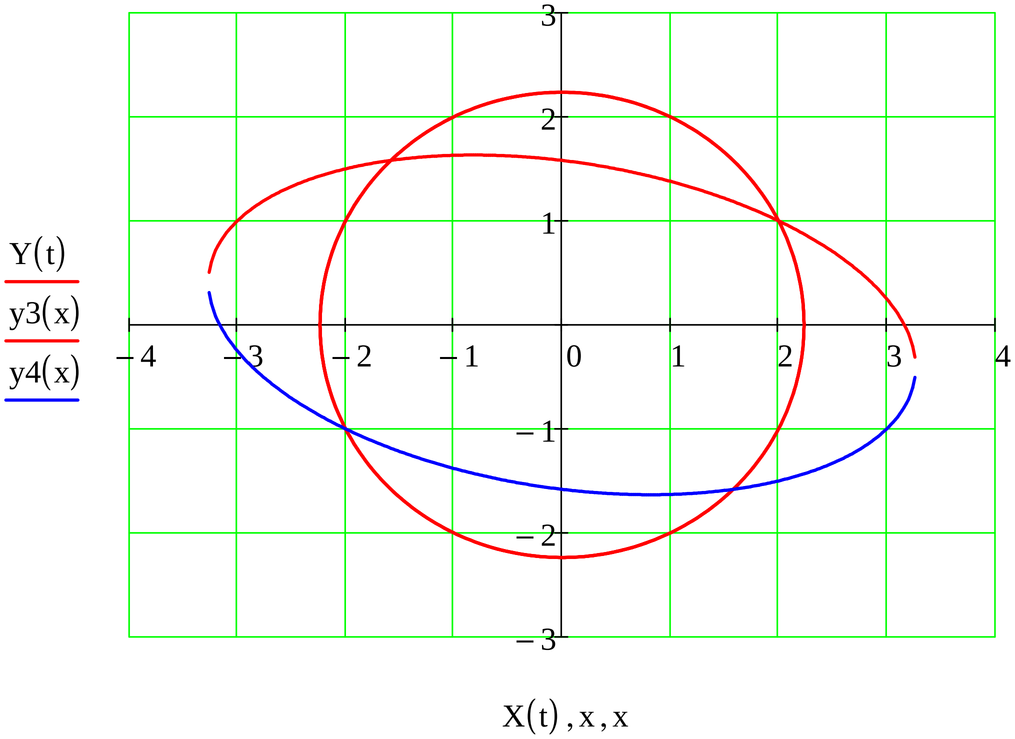
$$x^2 + x\cdot y + 4\cdot y^2 - 10 = 0 \text{ solve}, y \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{32 - 3\cdot x^2}}{8} - \dfrac{x}{8} \\ -\dfrac{x}{8} - \dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{32 - 3\cdot x^2}}{8} \end{pmatrix}$$

Definim curbele corespunzatoare

$$y3(x) := \frac{-1}{8}\cdot x + \frac{1}{8}\cdot\left(-15\cdot x^2 + 160\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y4(x) := \frac{-1}{8}\cdot x - \frac{1}{8}\cdot\left(-15\cdot x^2 + 160\right)^{\frac{1}{2}}$$

Reprezentam apoi ambele curbe in acelasi sistem de axe.



***Determinarea solutiei din cadranul doi*:**

$f1(x,y) := x^2 + x \cdot y + 4 \cdot y^2 - 10$

$f2(x,y) := x^2 + y^2 - 5$

$x := -1 \qquad y := 1$

$CTOL := 10^{-10}$

Given

$f1(x,y) = 0$

$f2(x,y) = 0$

$s := Find(x,y) \qquad s = \begin{pmatrix} -1.581 \\ 1.581 \end{pmatrix}$

Verificarea solutiei obtinute.

$ORIGIN \equiv 1 \qquad s_1 = -1.581 \qquad s_2 = 1.581$

$f1(s_1, s_2) = -1.77635683940025 \times 10^{-15}$

$f2(s_1, s_2) = 0$

Folosind reprezentarea grafica de mai sus determinati solutiile si din celelalte cadrane.

## MATHCAD

## Rezolvarea sistemelor de ecuatii neliniare

**Exemplu** $ORIGIN \equiv 1$

Determinati solutia sistemului de ecuatii

$f1(x,y,z) = 0$
$f2(x,y,z) = 0,$
$f3(x,y,z) = 0,$

unde

$$f1(x,y,z) := x^3 + x^2\cdot y - x\cdot z + 6$$

$$f2(x,y,z) := e^x + e^y - z$$

$$f3(x,y,z) := y^2 - 2\cdot x\cdot z - 4$$

Dam valori initiale variabilelor x, y, z.

$x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

Scriem blocul Given si determinam solutia folosind Find.

Given

$f1(x,y,z) = 0$

$f2(x,y,z) = 0$

$f3(x,y,z) = 0$

$s := Find(x,y,z) \qquad s = \begin{pmatrix} -1.956295206333563 \\ -0.131795995299646 \\ 1.017901031175943 \end{pmatrix}$

Verificam solutia obtinuta

$f1(s_1, s_2, s_3) = 0.000000000000000$

$f2(s_1, s_2, s_3) = 0.000000000000000$

$f3(s_1, s_2, s_3) = 0.000000000000000$

Functia **Find** poate determina solutia folosind trei metode de calcul diferite:
1) Metoda gradientului conjugat (Conjugate Gradient)
2) Metoda Levenberg - Marquard (Levenberg - Marquardt)
3) Metoda Quasi - Newton (Quasi - Newton)

Pentru a selecta una dintre aceste metode se da clic cu dreapta pe cuvantul Find si, in meniul contextual care apare, se selcteaza optiunea Nonlinear si se alege una dintre metodele de mai sus. Implicit, programul foloseste prima metoda.

Pentru o buna precizie a solutiei determinate se recomanda utilizarea metodei Levenberg - Marquard. Acesta metoda a fost folosita pentru rezolvarea acestui exemplu.

Dand alte valori initiale variabilelor putem obtine alta solutie.

$x := -1 \quad y := -1 \qquad z := -1$

Scriem blocul **Given** si determinam solutia folosind **Find**.

Given

$f1(x, y, z) = 0$

$f2(x, y, z) = 0$

$f3(x, y, z) = 0$

$s := \mathrm{Find}(x, y, z) \qquad s = \begin{pmatrix} -1.456042795955336 \\ -1.664230466081535 \\ 0.422493404446532 \end{pmatrix}$

Verificam solutia obtinuta

$f1(s_1, s_2, s_3) = 0.000000000000000$

$f2(s_1, s_2, s_3) = 0.000000000000000$

$f3(s_1, s_2, s_3) = 0.000000000000000$