8. PROGRAMARE ÎN MATHCAD

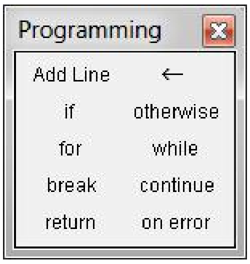
PROGRAMARE IN MATHCAD

Introducere

Programul Mathcad permite definirea de catre utilizator a unor functii sau subprograme ce pot contine instructiuni conditionale (**if/otherwise**), instructiuni repetitive cu un numar predefinit de iteratii (**for**) sau cu testarea initiala a unei conditii de continuare (**while**), precum si alte elemente specifice de programare.
O astfel de functie programata de utilizator poate returna in programul principal una sau mai multe valori numerice, matrice sau chiar mesaje text (de exemplu mesaj de eroare).

Pentru utilizarea programarii in Mathcad, trebuie deschisa bara **Programming**, prin clic pe pictograma corespunzatoare din bara **Math**:

Se afiseaza bara Programming:



Prezentam, in cele ce urmeaza, cateva exemple simple ce ilustreaza modul de utilizare al elementelor de programare in Mathcad.

PROGRAMARE IN MATHCAD

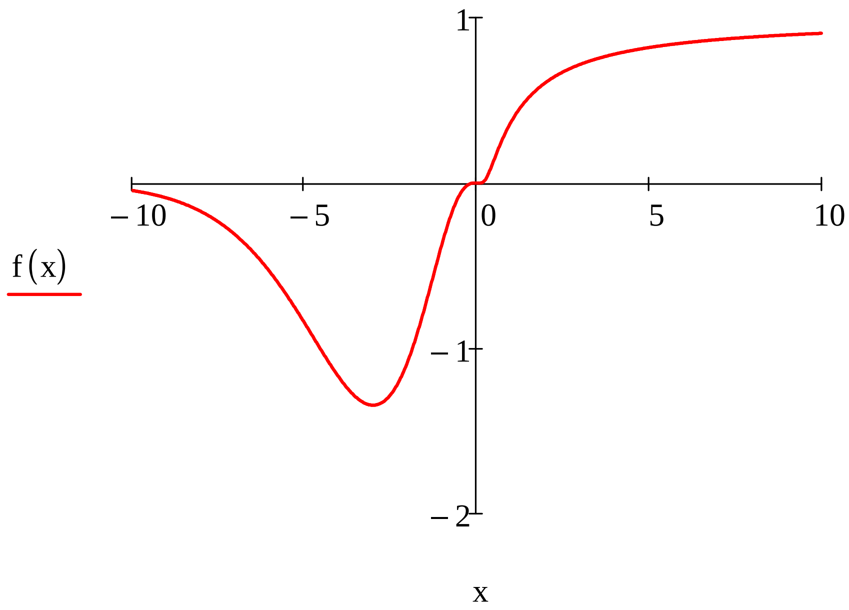
Instructiunea if

Definirea, evaluarea si reprezentarea grafica a unei functii definite prin mai multe ramuri

Exemplul 1

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{x}\right) & \text{if } x > 0 \\ x^3 \cdot \exp(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

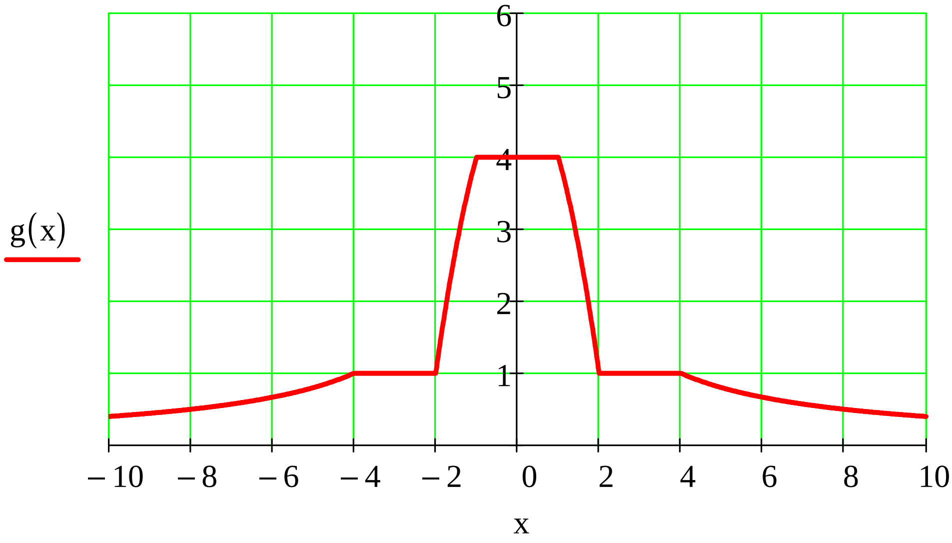
$f(2) = 0.607$ $\quad f(-1) = -0.368$



Exemplul 2

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{4}{|x|} & \text{if } (x < -4) \vee (x > 4) \\ 1 & \text{if } (-4 \le x \le -2) \vee (2 \le x \le 4) \\ -x^2 + 5 & \text{if } (-2 \le x \le -1) \vee (1 \le x \le 2) \\ 4 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Instructiunea **otherwise**, folosita dupa una sau mai multe instructiuni **if**, se executa numai daca toate conditiile sunt false.



PROGRAMARE IN MATHCAD

Instructiunea for

Instructiunea **for** se utilizeaza pentru programarea unei structuri repetitive cu un numar cunoscut de pasi (reluari).

Exemplul 1. Definirea matricei unitate de ordinul n

ORIGIN := 1

```
I(k) := | for  i ∈ 1 .. k
        |   for  j ∈ 1 .. k
        |     | a[i,j] ← 1  if  i = j
        |     | a[i,j] ← 0  otherwise
        | a
```

$$I(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplul 2. Rezolvarea unui sistem liniar avand matricea inferior triunghiulara.

O matrice patrata se numeste inferior triunghiulara daca are elementele de deasupra diagonalei principale nule.
Fie sistemul de ecuatii liniare ce se scrie matriceal Ly = b, unde:

$$L := \begin{pmatrix} 1.3 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 1.4 & 0 & 0 \\ 4.5 & 8.1 & -3.2 & 0 \\ 3.7 & -2.4 & 2.8 & 5.1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$LT(L,b) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow rows(L) \\ y_1 \leftarrow \dfrac{b_1}{L_{1,1}} \\ \text{for } i \in 2..n \\ \quad y_i \leftarrow \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \left(L_{i,j} \cdot y_j\right)}{L_{i,i}} \\ y \end{array} \right.$$

Solutia sistemului este:

$y := LT(L,b)$

$$y = \begin{pmatrix} 0.769 \\ -1.484 \\ -3.611 \\ 1.707 \end{pmatrix}$$

Verificare:

$$L \cdot y - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplul 3. Rezolvarea unui sistem liniar avand matricea superior triunghiulara.

O matrice patrata se numeste superior triunghiulara daca are elementele de sub diagonala principala nule.
Fie sistemul de ecuatii liniare ce se scrie matriceal Ux = y, unde:

$$U := \begin{pmatrix} 1.3 & 2.4 & -2.2 & 0.3 \\ 0 & -5.6 & 3.1 & 1.1 \\ 0 & 0 & 2.9 & -3.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} -2.2 \\ 1.4 \\ 0.9 \\ 1.3 \end{pmatrix}$$

$$UT(U,y) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow rows(U) \\ x_n \leftarrow \dfrac{y_n}{U_{n,n}} \\ \text{for } \; i \in n-1 .. 1 \\ \quad x_i \leftarrow \dfrac{y_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} \left(U_{i,j} \cdot x_j\right)}{U_{i,i}} \\ x \end{array} \right.$$

Solutia sistemului este:

$x := UT(U,y)$ $$x = \begin{pmatrix} -0.876 \\ 0.638 \\ 1.297 \\ 0.867 \end{pmatrix}$$

Verificare: $$U \cdot x - y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplul 4. **Calculul normelor unei matrice cu m linii si n coloane.**

Vom calcula norma Frobenius, norma 1 si norma infinit a unei matrice cu m linii si n coloane. Formulele de calcul ale acestor norme sunt:

Norma Frobenius: $$NF(a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{i,j}\right)^2}$$

Norma 1: N1(a) = maximul sumelor modulelor elementelor pe coloane

Norma infinit: Ninf(a) = maximul sumelor modulelor elementelor pe linii

$ORIGIN := 1$

Matricea $M := \begin{pmatrix} -12 & 11 & 9 \\ 2 & -3 & 21 \\ -18 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$

$$NF(a) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ m \leftarrow rows(a) \\ n \leftarrow cols(a) \\ \text{for } i \in 1..m \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \qquad s \leftarrow s + \left(a_{i,j}\right)^2 \\ \sqrt{s} \end{array} \right.$$

$NF(M) = 34.771$

$$N1(a) := \left| \begin{array}{l} S \leftarrow 0 \\ m \leftarrow rows(a) \\ n \leftarrow cols(a) \\ \text{for } j \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..m \\ \quad s \leftarrow s + \left|a_{i,j}\right| \\ S \leftarrow s \text{ if } s > S \end{array} \right. \\ S \end{array} \right.$$

$N1(M) = 42$

$$
\mathrm{Ninf}(a) := \left|
\begin{array}{l}
S \leftarrow 0 \\
m \leftarrow \mathrm{rows}(a) \\
n \leftarrow \mathrm{cols}(a) \\
\text{for } i \in 1..m \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
s \leftarrow 0 \\
\text{for } j \in 1..n \\
\quad s \leftarrow s + \left|a_{i,j}\right| \\
S \leftarrow s \quad \text{if } s > S
\end{array}
\right. \\
S
\end{array}
\right.
$$

$$\mathrm{Ninf}(M) = 32$$

Exemplul 5. Determinarea numarului de elemente pozitive, negative sau nule dintr-un vector.

ORIGIN := 1

Introducem vectorul:

$$x := (-10 \quad 2 \quad 0 \quad 7 \quad -9 \quad 14 \quad 0 \quad 8 \quad -21 \quad 6)^T$$

$$n := \mathrm{rows}(x) \qquad n = 10$$

$$
\mathrm{nrpnz}(x,n) := \left|
\begin{array}{l}
n\_poz \leftarrow 0 \\
n\_neg \leftarrow 0 \\
n\_zero \leftarrow 0 \\
\text{for } i \in 1..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
n\_poz \leftarrow n\_poz + 1 \quad \text{if } x_i > 0 \\
n\_neg \leftarrow n\_neg + 1 \quad \text{if } x_i < 0 \\
n\_zero \leftarrow n\_zero + 1 \quad \text{otherwise}
\end{array}
\right. \\
(n\_poz \quad n\_neg \quad n\_zero)
\end{array}
\right.
$$

$$\mathrm{nrpnz}(x,n) = (5 \quad 3 \quad 2)$$

Exemplul 6. Determinarea numarului de elemente pozitive, negative si nule dintr-un vector si a sumei valorilor componentelor pozitive, respectiv negative.

In programul ce urmeaza, variabilele np, nn si nz reprezinta numarul de elemente pozitive, negative, respectiv nule din vectorul x, in timp ce variabilele sp si sn reprezinta suma elementelor pozitive, respectiv negative din x.

$ORIGIN := 1$

$$
\mathrm{nrsumpnz}(x,n) := \left|\begin{array}{l}
np \leftarrow 0 \\
sp \leftarrow 0 \\
nn \leftarrow 0 \\
sn \leftarrow 0 \\
nz \leftarrow 0 \\
\text{for } i \in 1..n \\
\quad \left|\begin{array}{l}
\text{if } x_i > 0 \\
\quad \left|\begin{array}{l} np \leftarrow np + 1 \\ sp \leftarrow sp + x_i \end{array}\right. \\
\text{if } x_i < 0 \\
\quad \left|\begin{array}{l} nn \leftarrow nn + 1 \\ sn \leftarrow sn + x_i \end{array}\right. \\
nz \leftarrow nz + 1 \quad \text{otherwise}
\end{array}\right. \\
\begin{pmatrix} np & sp \\ nn & sn \\ nz & 0 \end{pmatrix}
\end{array}\right.
$$

$$
\mathrm{nrsumpnz}(x,n) = \begin{pmatrix} 5 & 37 \\ 3 & -40 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}
$$

PROGRAMARE IN MATHCAD

Instructiunea while

Instructiunea **while** se foloseste pentru programarea unei structuri repetitive fara a cunoaste dinainte numarul de reluari.

Exemplul 1 Calculul sumei primilor n termeni din seria armonica, pana cand suma depaseste un numar dat r

$$S(r) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ i \leftarrow 1 \\ n \leftarrow 0 \\ \text{while } s < r \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s + \frac{1}{i} \\ n \leftarrow n + 1 \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ \left(n - 1 \quad s - \frac{1}{i - 1} \right) \end{array} \right.$$

$$SS(r) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ i \leftarrow 1 \\ n \leftarrow 0 \\ \text{while } 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s + \frac{1}{i} \\ n \leftarrow n + 1 \\ i \leftarrow i + 1 \\ \text{break if } s \geq r \end{array} \right. \\ \left(n - 1 \quad s - \frac{1}{i - 1} \right) \end{array} \right.$$

$S(3) = (10 \quad 2.928968253968254)$ $SS(3) = (10 \quad 2.928968253968254)$

Observatie. Daca s-ar cunoaste apriori valoarea lui n, atunci s-ar putea folosi operatorul de sumare, dupa cum se vede mai jos.

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i} = 2.928968253968254 \qquad \sum_{i=1}^{11} \frac{1}{i} = 3.019877344877345$$

Exemplul 2. Calculul radacinii patrate dintr-un numar real a cu o precizie data e

$$\mathrm{rad2}(a,\varepsilon) := \left| \begin{array}{l} r \leftarrow 1 \\ \text{while } \left|r^2 - a\right| \geq \varepsilon \\ \quad r \leftarrow \frac{1}{2}\cdot\left(r + \frac{a}{r}\right) \\ \text{return } r \end{array} \right.$$

$$\mathrm{rad2}\left(37, 10^{-5}\right) = 6.082762537585202$$

$$\mathrm{Rad2}(a,\varepsilon) := \left| \begin{array}{l} r \leftarrow 1 \\ \text{while } 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} r \leftarrow \frac{1}{2}\cdot\left(r + \frac{a}{r}\right) \\ \text{break if } \left|r^2 - a\right| < \varepsilon \end{array} \right. \\ r \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Rad2}\left(37, 10^{-5}\right) = 6.082762537585202$$

Nota:

Programul de mai sus se bazeaza pe faptul ca sirul definit recurent prin

$$x_0 = 1\,,\quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),\quad a > 0\,,\quad \text{converge la } \sqrt{a}$$

PROGRAMARE IN MATHCAD

Instructiunea return

Implicit, un subprogram Mathcad intoarce in programul principal valoarea plasata pe ultima linie.

Folosind instructiunea **return** se poate intoarce in programul principal o valoare situata oriunde in subprogram.

$$ORIGIN := 1$$

$$\text{suma}(v,n,x) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s + v_i \\ \text{return} \begin{pmatrix} i \\ s \end{pmatrix} \text{ if } s \geq x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$v := (10 \;\; 12 \;\; 3 \;\; 21 \;\; 43 \;\; 8 \;\; 2 \;\; 16 \;\; 9 \;\; 4)^T$$

$$n := \text{rows}(v) \qquad n = 10$$

$$\text{suma}(v,n,24) = \begin{pmatrix} 3 \\ 25 \end{pmatrix}$$

9. PROBLEME PENTRU SEMINAR

1. Introducere in utilizarea programului Mathcad. Calcul matriceal şi vectorial in Mathcad

1. Se dau matricele

$$A = \begin{bmatrix} 1,25 & -2,44 & 7,32 \\ -5,21 & 4,22 & 2,32 \\ 6,89 & 7,45 & -8,33 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3,65 & 5,23 & 4,67 \\ -5,90 & 1,76 & -5,34 \\ 7,34 & 5,78 & 6,23 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2,23 & -4,32 \\ 3,21 & 4,37 \\ -5,22 & 5,75 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 6,77 & -5,66 & 7,88 \\ -3,44 & 5,44 & -2,55 \end{bmatrix}$$

Calculaţi:

a) $A+B$, $A-B$, $2A+3B$, $A \cdot B$, A^2+B^2, $\det(A)$, $\det(A)^2+\det(B)^2$.

b) Toate produsele posibile între matricele A, B şi C.

c) Suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A.

d) Suma modulelor tuturor elementelor matricei B.

2. Se consideră matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1,5 & 2,3 & -4,1 & 0,7 \\ -3,6 & 6,9 & 2,3 & 5,4 \\ -1,2 & 5,1 & -3,3 & 7,2 \\ 2,4 & 3,2 & -4,5 & 6,2 \end{bmatrix}$$

Calculaţi valorile minorilor principali ai matricei A.

3. Se consideră matricea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ şi vectorul $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

a) Calculaţi Ax şi $x^T Ax$.

b) În cazul în care matricea A este simetrică ($A = A^T$) aduceţi la forma cea mai simplă expresia obţinută pentru $x^T Ax$.

c) Refaceţi calculele de mai sus pentru matricea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

şi vectorul $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

4. Determinaţi soluţia sistemului de ecuaţii liniare de mai jos şi verificaţi soluţia obţinută.

$$\begin{cases} 2,3\,x_1 + 4,5\,x_2 - 7,4\,x_3 + 2,2\,x_4 = 21, \\ 6,5\,x_1 - 3,5\,x_2 + 5,5\,x_3 - 7,2\,x_4 = 19, \\ -4,2\,x_1 + 3,5\,x_2 - 7,3\,x_3 + 6,1\,x_4 = 22, \\ 4,7\,x_1 + 5,9\,x_2 - 3,6\,x_3 - 8,5\,x_4 = 17. \end{cases}$$

5. Determinaţi soluţiile sistemelor liniare şi omogene:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 2x + 6y - 11z = 0, \\ x - 2y + 7z = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y - 5z + 7t = 0, \\ 2x - 3y + 3z - 2t = 0, \\ 4x + 11y - 13z + 16t = 0, \\ 7x - 2y + z + 3t = 0. \end{cases}$

6. Se dau vectorii $\tilde{\mathbf{a}} = 3,44\,\tilde{\mathbf{i}} + 2,25\,\tilde{\mathbf{j}} - 4,87\,\tilde{\mathbf{k}}$, $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{i}} - 2,45\,\tilde{\mathbf{j}} + 5,32\,\tilde{\mathbf{k}}$ şi $\tilde{\mathbf{c}} = 4,52\,\tilde{\mathbf{i}} + 3,21\,\tilde{\mathbf{j}} - 5,89\,\tilde{\mathbf{k}}$.

Calculaţi:

a) Măsura (în grade sexazecimale) a unghiului dintre vectorii $\tilde{\mathbf{a}}$ şi $\tilde{\mathbf{b}}$.

b) Aria paralelogramului determinat de vectorii $\tilde{\mathbf{a}}$ şi $\tilde{\mathbf{b}}$.

c) Aria triunghiului determinat de vectorii $\tilde{\mathbf{a}}$ şi $\tilde{\mathbf{c}}$.

d) Volumul paralelipipedului determinat de cei trei vectori $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}$ şi $\tilde{\mathbf{c}}$.

2. Probleme de analiză matematică rezolvate cu Mathcad

1. Se consideră funcţia $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   a) Calculaţi derivatele $f^{(k)}(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$, unde $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

   b) Care este valoarea derivatei de ordinul şase în punctul $x = 2,576$.

   c) Calculaţi valorile acestei funcţii şi ale dervatei de ordinul întâi în punctele $1,67$; $3,52$; $4,25$; $6,87$.

2. Se consideră funcţia $g(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

   a) Determinaţi o primitivă a funcţiei $g(x)$.

   b) Valoarea integralei definite $\int\limits_1^7 g(x)dx$ este mai mică ca $\dfrac{1}{2}$?

3. Determinaţi valoarea sumei $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ şi aduceţi-o la forma cea mai simplă. Care este valoarea sa pentru $n = 20$?

4. Care este valoarea produsului $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 20$?

5. Variabila indexată x_i, unde $i = 1, 2, \ldots 10$, este definită prin relaţia $x_i = 2 + i \cdot 0,1$. Calculaţi valoarea sumei $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}$ şi valoarea produsului $x_1 x_2 \cdots x_{10}$.

6. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin relaţia

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right), & \text{dacă} \quad x > 0, \\ \\ x^3 \exp(x), & \text{dacă} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

   1) Este f o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$? Dar derivabilă?

   2) Este f o funcţie de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$? Dar de clasă C^2?

   Indicaţie. O funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este *continuă* într-un punct a, care aparţine domeniului de definiţie D, dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ şi valoarea acestei limite este egală cu $f(a)$. Cu alte cuvinte, dacă avem egalitatea

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

În cazul în care funcţia este definită în jurul punctului a prin două ramuri, existenţa limitei $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ se demonstrează arătând că există limitele laterale în punctul a şi aceste limite sunt egale. Atunci

$$\lim_{x\to a} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x).$$

Limita la dreapta $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ este notată în Mathcad cu $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ iar limita la stânga $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ cu $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

O funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte de *clasă* C^1 pe domeniul său de definiţie dacă este derivabilă pe D şi derivata sa $f'(x)$ este continuă oricare ar fi $x \in D$.

O funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte de *clasă* C^2 pe domeniul său de definiţie dacă are derivate de ordinul unu şi doi pe D şi aceste derivate $f'(x), f''(x)$ sunt funcţii continue pe D.

7. Se consideră funcţia

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \exp(\dfrac{1}{x-1}), & x \neq 1, \\ \\ 0 & x = 1. \end{cases}.$$

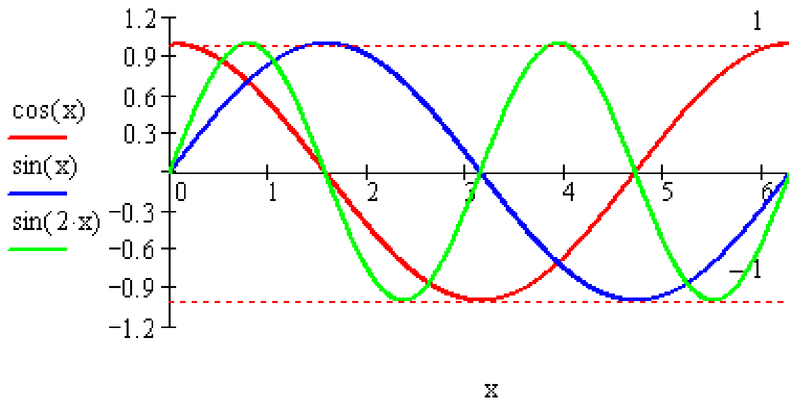
Este h o funcţie continuă în punctul $x = 1$? Justificaţi răspunsul folosind Mathcad.

3. Reprezentări grafice în Mathcad

1. Reprezentaţi grafic în acelaşi sistem de axe funcţiile:

   a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \sin 2x$, $x \in [0, 2\pi]$.

   Formataţi graficele astfel încât acestea să arate ca în figura de mai jos.

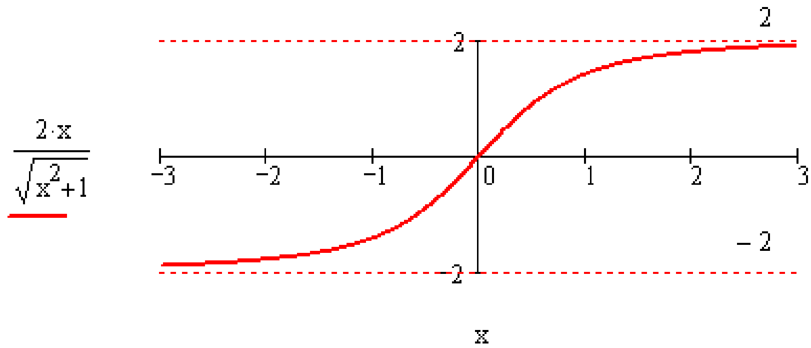


2. Se consideră funcţia $\quad f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

   Determinaţi domeniul de definiţie al funcţiei f şi cercetaţi dacă funcţia are asimptote orizontale.

   În caz afirmativ, trasaţi aceste asimptote în reprezentarea grafică a funcţiei.

   Indicaţie. Reprezentarea grafică trebuie să arate astfel.



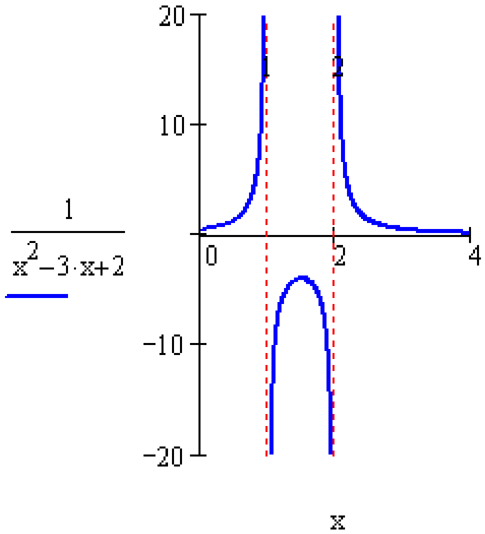
3. Fie funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

a) Care este domeniul de definiţie al funcţiei f ?

b) Are funcţia f asimptote verticale?

c) Reprezentaţi grafic funcţia f, punând în evidenţă şi asimptotele sale (în cazul în care acestea există).

Indicaţie. Graficul trebuie să fie asemănător cu cel din figura de mai jos.



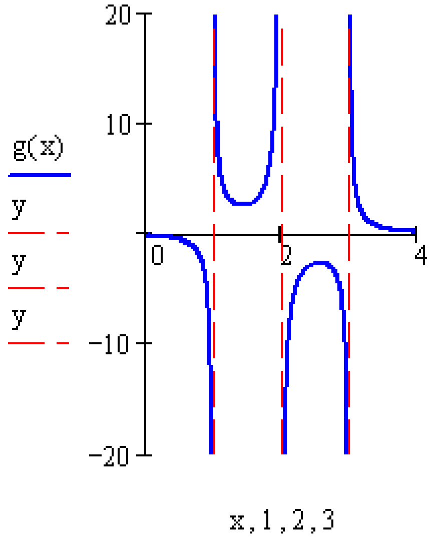
4. Fie funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$.

a) Care este domeniul de definiţie al funcţiei f ?

b) Are funcţia f asimptote verticale?

c) Reprezentaţi grafic funcţia f, punând în evidenţă şi asimptotele sale (în cazul în care acestea există).

Indicaţie. Având de trasat trei asimptote verticale cel puţin una dintre ele trebuie trasată prin puncte definite de utilizator. Graficul trebuie să fie asemănător cu cel din figura care urmează.



5. a) Reprezentaţi grafic în acelaşi sistem de axe funcţiile $f(t) = \cos(t)$ şi $g(t) = \frac{t}{8}$.

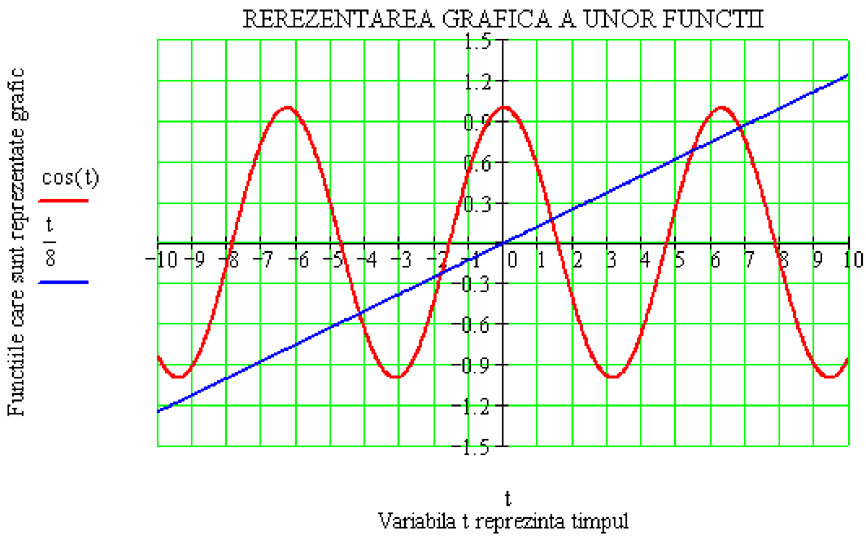
b) Formataţi graficul ca în figura care urmează punând în evidenţă reţelele de linii orizontale şi verticale.

c) Scrieţi titlul „REPREZENTAREA GRAFICA A UNOR FUNCTII”.

d) Pe axa absciselor scrieţi „Variabila t reprezintă timpul”, iar pe axa ordonatelor scrieţi „Funcţiile care sunt reprezentate grafic”.

e) Folosind funcţia „**Trace...**” determinaţi coordonatele aproximative ale punctelor de intersectie dintre cele două grafice. (Pentru apariţia funcţiei „**Trace...**” daţi clic cu butonul drept al mouse-lui pe reprezentarea grafică).

Indicaţie. Reprezentarea grafică trebuie să apară ca în figura de mai jos.



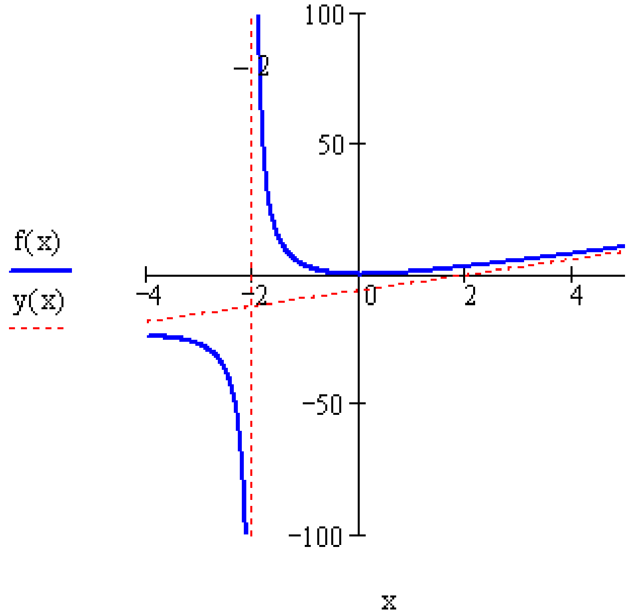
6. Fie funcţia definită prin relaţia $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+2}$.

a) Stabiliţi care este domeniul de definiţie al funcţiei $f(x)$.

b) Determinaţi asimptotele acestei funcţii.

c) Reprezentaţi grafic funcţia dată trasând şi asimptotele sale.

Indicaţie. Graficul trebuie să arate ca în figura de mai jos.



7. Reprezentaţi grafic funcţia de două variabile

$$f(x, y) = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$$

în următoarele cazuri:

a) Pe intervalul bidimensional $[-5, 5] \times [-5, 5]$, cu pasul de creştere a fiecărei variabile egal cu $0, 5$.

b) Pe intervalul bidimensional $[-10, 10] \times [-8, 8]$, cu pasul de creştere a fiecărei variabile egal cu $0, 4$.

Indicaţie. a) În condiţiile date reprezentarea grafică se face folosind opţiunea QuickPlot (Insert, Graph, Surface Plot).

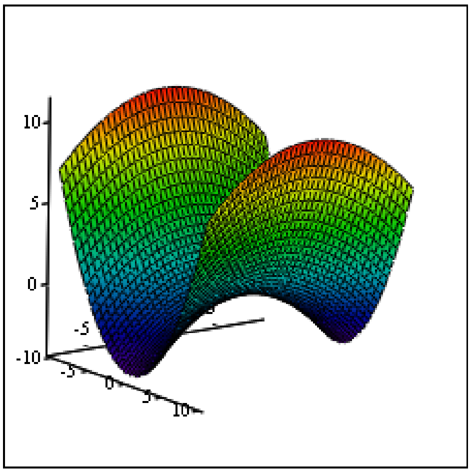
b) Se poate proceda în două moduri:

b1) Se reprezintă folosind QuickPlot, apoi se dă dublu clic pe grafic pentru apariţia ferestrei 3-D Plot Format pentru formatarea unui grafic tridimensional. În această fereastră se apasă butonul QuickPlot Data şi se modifică limitele de variaţie ale fiecărei variabile şi numărul de puncte din fiecare reţea.

b2) Se defineşte o matrice de puncte folosind funcţia CreateMesh.

M:=CreateMesh(f,x1,x2,y1,y2,xgrid,zgrid),

unde x1:= -10, x2:= 10, y1:= -8, y2:= 8, xgrid:= 50, ygrid:= 40.



M

8. Reprezentaţi grafic funcţia de două variabile

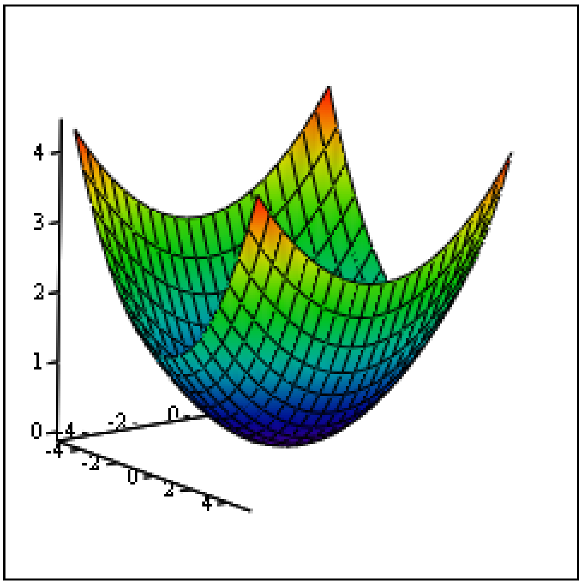
$$f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}$$

în următoarele cazuri:

a) Pe intervalul bidimensional $[-5, 5] \times [-5, 5]$, cu pasul de creştere a fiecărei variabile egal cu $0, 5$.

b) Pe intervalul bidimensional $[-8, 8] \times [-6, 6]$, cu pasul de creştere a fiecărei variabile egal cu $0, 4$.

Indicaţie. În cazul a) graficul funcţiei are aspectul din figura de mai jos.



f

4. Rezolvari de ecuaţii algebrice şi transcendente cu Mathcad. Calcul simbolic

1. Determinaţi soluţiile ecuaţiilor algebrice de mai jos folosind:

   a) comanda **Solve** din meniul **Symbolics** (Symbolics/Variable/Solve);

   b) cuvîntul cheie **solve** din bara **Symbolic**;

   c) funcţia **root**;

   d) funcţia **polyrooots**.

   După rezolvare apreciaţi care este cea mai bună metodă pentru determinarea soluţiilor unei ecuaţii algebrice folosind Mathcad.

   1.1) $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$.

   1.2) $x^3 + 9x^2 - 2x - 14 = 0$.

   1.3) $x^5 + 4x^4 - 9x^3 - 40x^2 - 4x + 48 = 0$.

   1.4) $x^6 - x^4 + 4x^2 - 10 = 0$.

2. Determinaţi soluţiile inecuaţiilor de mai jos. Scrieţi pe o foaie de hârtie soluţiile obţinute folosind scrierea în limbajul matematic uzual.

   2.1) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 \geq 0$.

   2.2) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$.

   2.3) $5x^3 - 21x^2 + 4 \geq 0$.

3. Determinaţi soluţiile ecuaţiilor transcendente:

   3.1) $\sin(x) = \dfrac{x}{7}$.

   3.2) $e^x = 10x^2$.

   3.2) $\ln(x) = -x^2$.

   3.4) $\sin(2x^2) = 0$, pentru $x \in [0, \pi]$.

   Indicaţie. Pentru a stabili care este numărul de soluţii reprezentaţi grafic în acelaşi sistem de axe funcţiile care apar în fiecare membrul al ecuaţiei sau diferenţa lor.

4. Efectuaţi ridicările la putere

   4.1) $(2x+3)^5$.

   4.2) $(2x-5)^6$.

   4.3) $(a+b+c)^2$.

   4.4) $(a+b+c)^3$

   Indicaţie. Folosiţi comanda **Expand** din meniul **Symbolics**.

5. Scrieţi sub formă de produs expresiile:

   5.1) $x^6+x^5+2x^4+5x^3+3x^2+6x+6$.

   5.2) $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$.

   Indicaţie. Folosiţi comanda **Factor** din meniul **Symbolics**.

6. Aduceti la forma cea mai simplă expresiile:

   6.1) $\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}+2x-5$.

   6.2) $\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}+2x+4$.

7. Descompuneţi în fracţii simple expresiile:

   7.1) $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+x^2+x+1}$.

   7.2) $\dfrac{2x^4-x^2+3}{x^3-x^2+x-1}$

   Indicaţie. Folosiţi comanda **Convert to Partial Fraction** din meniul **Symbolics/Varible**.

5. Rezolvarea sistemelor neliniare

1. Rezolvaţi sistemele neliniare de mai jos. Pentru a cunoaşte numărul de rădăcini pe care-l are fiecare sistem, reprezentaţi grafic curbele care-l compun.

   a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = 2x + 1. \end{cases}$

   b) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 16, \\ y = -2x + 6. \end{cases}$

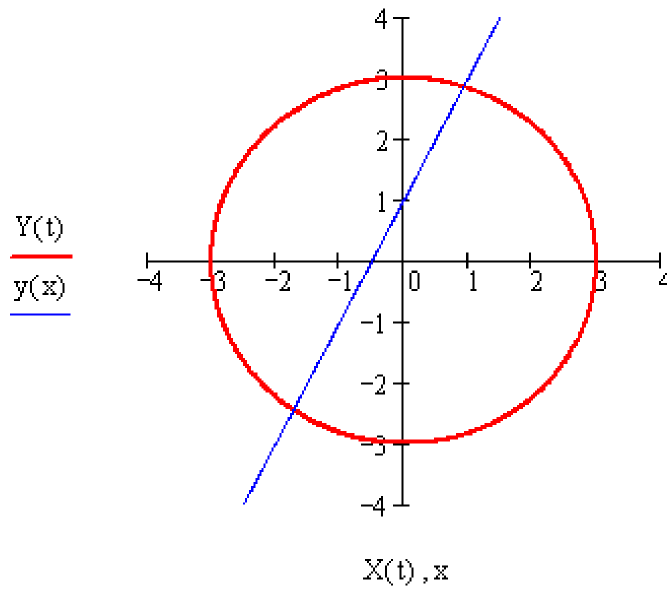
   c) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1, \\ y = 2x - 1. \end{cases}$

   d) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = 1, \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4. \end{cases}$

   Indicaţii şi răspunsuri.

   a) Ecuaţiile parametrice ale cercului cu centrul în origine şi rază R sunt: $X(t) = R\cos t$, $Y(t) = R\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

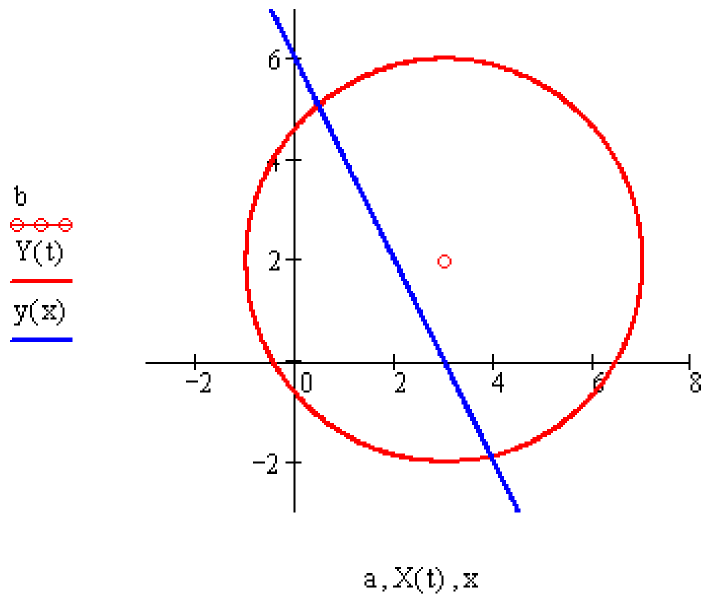
   Reprezentarea grafică de mai jos arată că sistemul are două soluţii.



   Soluţiile sistemului: $x_1 = 0,927$, $y_1 = 2,853$;
   $x_2 = -1,727$, $y_2 = -2,453$.

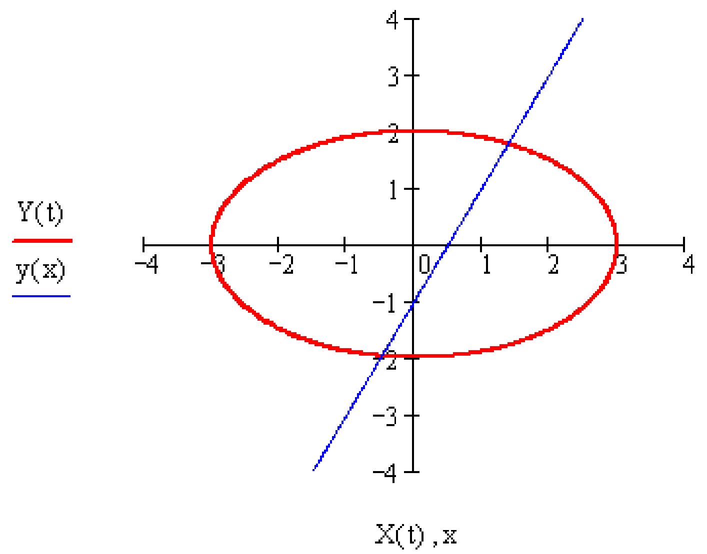
b) Ecuaţiile parametrice ale cercului cu centrul în punctul $C(a, b)$ şi rază R sunt: $X(t) = a + R \cos t$, $Y(t) = b + R \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Reprezentarea grafică arată că sistemul are două soluţii.



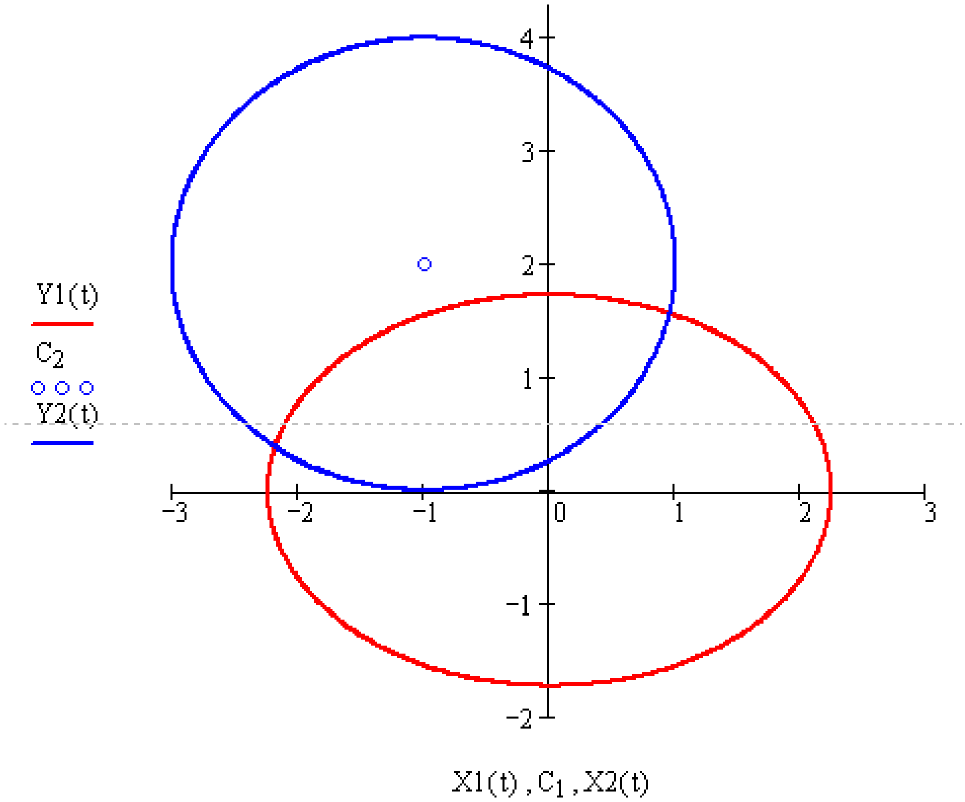
Soluţiile sistemului: $x_1 = 0,546$, $y_1 = 5,087$; $x_2 = 3,944$, $y_2 = -1,887$.

c) b) Ecuaţiile parametrice ale elipsei $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ sunt:
$X(t) = a \cos t$, $Y(t) = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Reprezentarea grafică:



Soluţiile sistemului: $x_1 = 1,387$, $y_1 = 1,773$;
$x_2 = -0,487$, $y_2 = -1,973$.

d) Reprezentarea grafică:



Soluţiile sistemului: $x_1 = 0,953$, $y_1 = 1,567$; $x_2 = -2,180$, $y_2 = 0,385$.

2. Determinaţi soluţiile sistemelor neliniare de mai jos:

a) $$\begin{cases} x^3 + x^2 y - xz + 6 = 0, \\ e^x + e^y - z = 0, \\ y^2 - 2yz = 4. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0, \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 6x - 2\cos(yz) = 1, \\ 9y + \sqrt{x^2 + \sin z + 1,06} + 0,9 = 0, \\ 60z + 3e^{-xy} + 10\pi = 3 \end{cases}$$

6. Algebră liniară cu Mathcad

Scrierea unui vector într-o bază

1) În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2$ se consideră vectorii

$$\mathbf{a}^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{\langle 2\rangle} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Demonstraţi că mulţimea $B = \{\mathbf{a}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{a}^{\langle 2\rangle}\}$ este o bază pentru $\mathbb{R}^2$.
b) Care este scrierea vectorului $\mathbf{v} = (10, 15)^T$ în baza B?

2) În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii

$$\mathbf{a}^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{\langle 2\rangle} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{\langle 3\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a) Demonstraţi că mulţimea $B = \{\mathbf{a}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{a}^{\langle 2\rangle}, \mathbf{a}^{\langle 3\rangle}\}$ este o bază pentru $\mathbb{R}^3$.
b) Care este scrierea vectorului $\mathbf{v} = (2, -3, 1)^T$ în baza B?

Matricea de trecere de la o bază la alta

3) În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2$ se consideră vectorii

$$\mathbf{a}^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{\langle 2\rangle} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{\langle 2\rangle} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

a) Demonstraţi că mulţimile $B_1 = \{\mathbf{a}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{a}^{\langle 2\rangle}\}$ şi $B_2 = \{\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 2\rangle}\}$ sunt baze ale spaţiului $\mathbb{R}^2$ şi determinaţi matricea de trecere de baza B_1 baza B_2.

b) Dacă vectorul $\mathbf{v}$ are în baza B_1 scrierea $\mathbf{v} = 2\mathbf{a}^{\langle 1\rangle} + 3\mathbf{a}^{\langle 2\rangle}$, care este scrierea acestui vector în baza B_2?

4) În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii

$$\mathbf{a}^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{\langle 2\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{\langle 3\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{\langle 2\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{\langle 3\rangle} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Demonstraţi că mulţimile $B_1 = \{\mathbf{a}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{a}^{\langle 2\rangle}, \mathbf{a}^{\langle 3\rangle}\}$ şi $B_2 = \{\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 2\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 3\rangle}\}$ sunt baze ale spaţiului $\mathbb{R}^3$ şi determinaţi matricea de trecere de baza B_1 baza la B_2.

b) Dacă vectorul $\mathbf{v}$ are în baza B_1 scrierea $\mathbf{v} = 3\mathbf{a}^{\langle 1\rangle} - 2\mathbf{a}^{\langle 2\rangle} + 3\mathbf{a}^{\langle 3\rangle}$, care este scrierea acestui vector în baza B_2?

5) În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideră vectorii

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a}^{\langle 1\rangle} = (1,1,1,1)^T & \mathbf{b}^{\langle 1\rangle} = (1,0,3,3)^T \\ \mathbf{a}^{\langle 2\rangle} = (1,2,1,1)^T & \mathbf{b}^{\langle 2\rangle} = (-2,-3,-5,-4)^T \\ \mathbf{a}^{\langle 3\rangle} = (1,1,2,1)^T & \mathbf{b}^{\langle 3\rangle} = (2,2,5,4)^T \\ \mathbf{a}^{\langle 4\rangle} = (1,3,2,3)^T & \mathbf{b}^{\langle 4\rangle} = (-2,-3.-4,-4)^T \end{array}$$

a) Demonstraţi că mulţimile $B = \{\mathbf{a}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{a}^{\langle 2\rangle}, \mathbf{a}^{\langle 3\rangle}, \mathbf{a}^{\langle 4\rangle}\}$ şi $B' = \{\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 2\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 3\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 4\rangle}\}$ sunt baze ale spaţiului $\mathbb{R}^4$ şi determinaţi matricea de trecere de baza B la baza B'.

b) Dacă vectorul $\mathbf{v}$ are în baza B scrierea $\mathbf{v} = 4\mathbf{a}^{\langle 1\rangle} + 3\mathbf{a}^{\langle 2\rangle} + 2\mathbf{a}^{\langle 3\rangle} - 4\mathbf{a}^{\langle 4\rangle}$, care este scrierea acestui vector în baza B'?

Baze ortonormate. Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt

6) În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^2$ se consideră vectorii

$$\mathbf{x}^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\langle 2\rangle} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Demonstraţi că mulţimea $B = \{\mathbf{x}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{x}^{\langle 2\rangle}\}$ este o bază pentru $\mathbb{R}^2$.

b) Construiţi o bază ortonormată B' pornind de la baza B.

c) Care este scrierea vectorului $\mathbf{x} = (10, -5)^T$ în noua bază ortonormată B'?

7) În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii

$$\mathbf{x}^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\langle 2\rangle} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\langle 3\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Demonstraţi că mulţimea $B = \{\mathbf{x}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{x}^{\langle 2\rangle}, \mathbf{x}^{\langle 3\rangle}\}$ este o bază pentru $\mathbb{R}^3$.

b) Construiţi o bază ortonormată B' pornind de la baza B.

c) Care este scrierea vectorului $\mathbf{x} = (2, 1, 3)^T$ în noua bază ortonormată B'?

8) Acelaşi enunţ ca mai sus pentru vectorii

$$\mathbf{x}^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\langle 2\rangle} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\langle 3\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determinarea valorilor şi vectorilor proprii

9) Fie matricele

$$a)\ \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}\ b)\ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}\ c)\ \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calculaţi valorile şi vectorii proprii ai acestor matrice.

b) Cercetaţi dacă aceste matrice pot fi diagonalizabile şi în caz afirmativ aduceţi-le la forma diagonală punând în evidenţă în fiecare caz matricea diagonalizatoare.

10) Fie matricele

$$a)\ \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}\ b)\ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\ c)\ \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calculaţi valorile şi vectorii proprii ai acestor matrice.

b) Aduceţi matricele respective la forma diagonală.

10. TESTE DE VERIFICARE

Test Mathcad - 1
Varianta 1
Număr de puncte: 24

1. (4p) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii liniare şi verificaţi soluţia găsită.

$$\begin{cases} 5,2x + 3,1y - 6,7z + 2,9t = 3,19, \\ -2,5x + 8,3y + 7,3z - 4,2t = 21,12, \\ 4,7x + y + 9,4z - 5,5t = 14,19, \\ 7,2x - 3,6y + 9,4z - t = 26,62. \end{cases}$$

2. (3p) Rezolvaţi sistemul liniar şi omogen şi verificaţi soluţia găsită.

$$\begin{cases} 4x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

3. (3p) Se dau vectorii $\tilde{\mathbf{a}} = -2,75\tilde{\mathbf{i}} + 3\tilde{\mathbf{j}} - 4\tilde{\mathbf{k}}$, $\tilde{\mathbf{b}} = 3\tilde{\mathbf{i}} - 1,25\tilde{\mathbf{j}} + 5\tilde{\mathbf{k}}$, $\tilde{\mathbf{c}} = 3\tilde{\mathbf{i}} - \tilde{\mathbf{j}} + 5,45\tilde{\mathbf{k}}$.
   Calculaţi:
   a) Măsura unghiului dintre vectorii $\tilde{\mathbf{a}}$ şi $\tilde{\mathbf{b}}$ exprimată în grade sexazecimale.
   b) Aria paralelogramului determinat de vectorii $\tilde{\mathbf{a}}$ şi $\tilde{\mathbf{b}}$.
   c) Volumul paralelipipedului determinat de vectorii $\tilde{\mathbf{a}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ şi $\tilde{\mathbf{c}}$.

4. (4p) Se consideră funcţia $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
   a) Calculaţi derivatele $f'(x)$, $f^{(6)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, şi aduceţi-le la forma cea mai simplă.
   b) Determinaţi valorile funcţiei şi ale acestor derivate în punctele 1; 2, 5; 5; 7, 5; 10. Afişaţi rezultatele cu cinci zecimale, inclusiv zerourile nesemnifictive.

5. (2p) Se consideră funcţia $g(x) = \dfrac{1}{1-x+x^2}$.
   a) Determianţi o primitivă a funcţiei $g(x)$.
   b) Valoarea integralei $\int_1^2 g(x)dx$ este mai mică ca $\dfrac{1}{2}$?

6. (2p) Reprezentaţi grafic, în acelaşi sistem de axe, funcţiile $\sin x$ şi $\cos 2x$, pentru $x \in [0, 2\pi]$. Puneţi în evidenţă banda orizontală cuprinsă între -1 şi $+1$ în care sunt situate graficele acestor funcţii.

7. (4p) Fie funcţia $h : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, $\quad h(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2+5}\,(x-2)}$.
   Reprezentaţi grafic funcţia punând în evidenţă toate asimptotele sale.

8. (2p) Calculaţi valoarea sumei $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

Test Mathcad - 1
Varianta 2
Număr de puncte: 24

1. (3p) Se dau vectorii $\tilde{\mathbf{a}} = -2\tilde{\mathbf{i}} + 3,55\tilde{\mathbf{j}} - 4\tilde{\mathbf{k}}$, $\tilde{\mathbf{b}} = 3\tilde{\mathbf{i}} - \tilde{\mathbf{j}} + 5,31\tilde{\mathbf{k}}$, $\tilde{\mathbf{c}} = 3,28\tilde{\mathbf{i}} - \tilde{\mathbf{j}} + 5\tilde{\mathbf{k}}$.
   Calculaţi:
   a) Măsura unghiului dintre vectorii $\tilde{\mathbf{a}}$ şi $\tilde{\mathbf{c}}$ exprimată în grade sexazecimale.
   b) Aria triunghiului determinat de vectorii $\tilde{\mathbf{a}}$ şi $\tilde{\mathbf{b}}$.
   c) Volumul paralelipipedului determinat de vectorii $\tilde{\mathbf{a}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ şi $\tilde{\mathbf{c}}$.

2. (3p) Rezolvaţi sistemul liniar şi omogen şi verificaţi soluţia găsită.
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ 4x - 3y + z = 0, \\ -x + 2y + 6z = 0. \end{cases}$$

3. (4p) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii liniare şi verificaţi soluţia găsită.
$$\begin{cases} 5,2x + 3,1y + 6,7z - 2,9t = 53,86, \\ 2,5x + 8,3y - 7,3z + 4,2t = 38,85, \\ 4,7x - y + 9,4z + 5,5t = 68,21, \\ -7,2x + 3,6y + 9,4z + t = 9,78. \end{cases}$$

4. (4p) Se consideră funcţia $f(x) = arctg\sqrt{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.
   a) Calculaţi derivatele $f'(x)$, $f^{(3)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, şi aduceţi-le la forma cea mai simplă.
   b) Determinaţi valorile funcţiei şi ale acestor derivate în punctele $1,25$; $2,35$; $5,44$; $7,55$; $9,81$. Afişaţi rezultatele cu cinci zecimale, inclusiv zerourile nesemnifictive.

5. (2p) Se consideră funcţia $g(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$.
   a) Determianţi o primitivă a funcţiei $g(x)$.
   b) Valoarea integralei $\int_1^2 g(x)dx$ este mai mică ca $\dfrac{1}{3}$?

6. (2p) Reprezentaţi grafic, în acelaşi sistem de axe, funcţiile $\cos x$ şi $\sin 3x$, pentru $x \in [0, 2\pi]$. Puneţi în evidenţă banda orizontală cuprinsă între -1 şi $+1$ în care sunt situate graficele acestor funcţii.

7. (4p) Fie funcţia $h : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $\quad h(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$.
   Reprezentaţi grafic funcţia punând în evidenţă toate asimptotele sale.

8. (2p) Determinaţi valoarea sumei $1^4 + 2^2 + \cdots + n^4$.

Test Mathcad - 2
Varianta 1
Număr de puncte: 24

1. (4p) Fie ecuaţia $x^6 - x^4 + 4x^2 - 8 = 0$.

   a) Determinaţi soluţiile ecuaţiei date.

   b) Afişaţi soluţiile găsite cu cinci zecimale, inclusiv zerourile nesemnificative.

   c) Verificaţi soluţiile găsite.

2. (3p) Fie inecuaţia $x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30 \leq 0$.

   a) Determinaţi soluţiile inecuaţiei date.

   b) Scrieţi pe o foaie de hârtie soluţia obţinută.

3. (4p) Fie ecuaţia $\sin 2x = \cos 2x$.

   a) Pentru stabilirea numărului de soluţii şi alegerea valorilor iniţiale necesare algoritmului de rezolvare, reprezentaţi grafic în acelaşi sistem de axe funcţiile care apar în fiecare membrul al ecuaţiei sau diferenţa lor.

   b) Determinaţi soluţiile din intervalul $[0, \pi]$ ale ecuaţiei date.

   c) Verificaţi soluţiile găsite.

4. (5p) Fie sistemul de ecuaţii neliniare

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{4} = 1, \\ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

   a) Pentru stabilirea numărului de soluţii şi alegerea valorilor iniţiale necesare algoritmului de rezolvare, reprezentaţi grafic curbele date de ecuaţiile sistemului.

   b) Determinaţi soluţiile sistemului dat.

   c) Verificaţi soluţiile găsite.

5. (4p) Fie matricea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

   a) Calculaţi valorile şi vectorii proprii ai matricei $\mathbf{A}$.

   b) Verificaţi valorile şi vectorii proprii determinaţi la punctul a).

   c) Cercetaţi dacă matricea $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă şi în caz afirmativ aduceţi-o la forma diagonală punând în evidenţă matricea diagonalizatoare.

6. (4p) În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii

$$\mathbf{a}^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{\langle 2\rangle} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{\langle 3\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{\langle 2\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{\langle 3\rangle} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Demonstraţi că mulţimile $B = \{\mathbf{a}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{a}^{\langle 2\rangle}, \mathbf{a}^{\langle 3\rangle}\}$ şi $B' = \{\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 2\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 3\rangle}\}$ sunt baze ale spaţiului $\mathbb{R}^3$ şi determinaţi matricea de trecere de baza B baza B'.

b) Dacă vectorul $\mathbf{v}$ are în baza B scrierea $\mathbf{v} = 4\mathbf{a}^{\langle 1\rangle} - 2\mathbf{a}^{\langle 2\rangle} + 3\mathbf{a}^{\langle 3\rangle}$, care este scrierea acestui vector în baza B'?

Test Mathcad - 2
Varianta 2
Număr de puncte: 24

1. (4p) Fie ecuaţia $x^5 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$.

   a) Determinaţi soluţiile ecuaţiei date.

   b) Afişaţi soluţiile găsite cu cinci zecimale, inclusiv zerourile nesemnificative.

   c) Verificaţi soluţiile găsite.

2. (3p) Fie inecuaţia $x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x - 6 \geq 0$.

   a) Determinaţi soluţiile inecuaţiei date.

   b) Scrieţi pe o foaie de hârtie soluţia obţinută.

3. (4p) Fie ecuaţia $\sin x = \cos 2x$.

   a) Pentru stabilirea numărului de soluţii şi alegerea valorilor iniţiale necesare algoritmului de rezolvare, reprezentaţi grafic în acelaşi sistem de axe funcţiile care apar în fiecare membrul al ecuaţiei sau diferenţa lor.

   b) Determinaţi soluţiile din intervalul $[0, \pi]$ ale ecuaţiei date.

   c) Verificaţi soluţiile găsite.

4. (5p) Fie sistemul de ecuaţii neliniare

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

   a) Pentru stabilirea numărului de soluţii şi alegerea valorilor iniţiale necesare algoritmului de rezolvare, reprezentaţi grafic curbele date de ecuaţiile sistemului.

   b) Determinaţi soluţiile sistemului dat.

   c) Verificaţi soluţiile găsite.

5. (4p) Fie matricea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Calculaţi valorile şi vectorii proprii ai matricei $\mathbf{A}$.

   b) Verificaţi valorile şi vectorii proprii determinaţi la punctul a).

   c) Cercetaţi dacă matricea $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă şi în caz afirmativ aduceţi-o la forma diagonală punând în evidenţă matricea diagonalizatoare.

6. (4p) În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii

$$\mathbf{a}^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{\langle 2\rangle} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{\langle 3\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{\langle 2\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{\langle 3\rangle} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a) Demonstraţi că mulţimile $B = \{\mathbf{a}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{a}^{\langle 2\rangle}, \mathbf{a}^{\langle 3\rangle}\}$ şi $B' = \{\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 2\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 3\rangle}\}$ sunt baze ale spaţiului $\mathbb{R}^3$ şi determinaţi matricea de trecere de baza B baza B'.

b) Dacă vectorul $\mathbf{v}$ are în baza B scrierea $\mathbf{v} = 4\mathbf{a}^{\langle 1\rangle} - 2\mathbf{a}^{\langle 2\rangle} + 3\mathbf{a}^{\langle 3\rangle}$, care este scrierea acestui vector în baza B'?

Cititorului interesat în rezolvarea pe calculator a problemelor de matematică folosind Mathcad îi recomandăm următoarea bibliografie.

Bibliografie

1. O.Cira, *Lecţii de Mathcad 2001 Professional*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2003.
2. S.Curteanu, *Calcul numeric şi simbolic în Mathcad*, MatixRom, Bucureşti, 2001.
3. N.Dăneţ, *Utilizarea calculatoarelor*, *O introducere în Microsoft Office şi Mathcad*, Ed. MatrixRom, Bucureşti, 2002.
4. N.Dăneţ, *Crearea şi utilizarea cărţilor electronice în Mathcad*, Tehnologii educaţionale pe platforme electronice în învăţământul ingineresc, Universitatea Tehnică de Construcţii Bucureşti, 9-10 mai 2003, Editura Conspress, Bucureşti, 2003, 301-312.
5. N.Dăneţ, *Metode numerice cu Mathcad*, Lucrările Conferinţei Naţionale de Învăţământ Virtual-2003, Ed. Univ. Bucureşti, 2003, 197-204.
6. N.Dăneţ, *Teaching spline functions with Mathcad*, Proceedings of the 3rd Conference on the „History of Mathematics & Teaching of Mathematics", University of Miskolc (Hungary), 21-23 May 2004, Editor: Péter Körtesi, Fulgur Publisher, 11-23.
7. N.Dăneţ, *Metode de construcţie a curbelor plane. O introducere folosind Mathcad*, Lucrările Conferinţei Naţionale de Învăţământ Virtual, Ediţia a II-a, 29-31 oct. 2004, Ed. Univ. Bucureşti, 2004, 309-316.
8. N.Dăneţ, M.Zamfir, *Conice cu Mathcad*, Lucrările sesiunii ştiinţifice a Catedrei de Matematică şi Informatică din Universitatea Tehnică de Construcţii Bucureşti, Ediţia a 8-a, 21 mai 2005, Editura MatrixRom, Bucureşti, 2006, 31-34
9. N.Dăneţ, *Differential geometry of space curves with Mathcad*, Proceedings of the 3rd International Conference on Virtual Learning (ICVL 2008) Constanţa, Romania, Oct. 31-Nov.2, 2008, Ed. Univ. Bucureşti, 2008, 255-264.
10. N.Dăneţ, *Cubic spline interpolation using Mathcad*, Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics, ICTAMI 2009, Acta Universitatis Apulensis, Special issue, 2009, 615-633.
11. N.Dăneţ, *Differential Geometry of Surfaces with Mathcad: A Virtual Learning Approach*, Proceedings of the 4rd International Conference on Virtual Learning 2009 (ICVL 2009): „Gh. Asachi" Technical University, Iaşi, Romania, Oct. 30-Nov.1, 2009, Ed. Univ. Bucureşti, 2009, 276-283.
12. N.Dăneţ, *Linear differential equations with Mathcad*, Proceedings of the Symposium „Educational Technologies on Electronic Platforms in Higher Engineering Education" (TEPE 2009), 8-9 May, 2009, Technical University of Civil Engineering of Bucharest, Editura Conspress, Bucureşti, 2009, 77-94.
13. Mathcad 2001, *User's Guide with Reference Manual*, MathSoft, Inc., Cambridge, USA, 2000.
14. Mathcad 14, *Help*, PTC Software, 2007.
15. E. Scheiber, M. Lupu, *Matematici speciale, Rezolvarea problemelor asistată de calculator cu exemplificări in Derive, Mathcad, Maple, Mathematica*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1998.
16. E. Scheiber, M. Lupu, *Rezolvarea asistată de calculator a problemelor de matematică*, Ed. MatixRom, Bucureşti, 2003.