UNIVERSITATEA TEHNICĂ DE CONSTRUCȚII
BUCUREȘTI

PARABOLA CUBICĂ ÎMBUNĂTĂȚITĂ

Prof.dr.ing.C-tin Radu

CUPRINS

PARABOLA CUBICĂ ÎMBUNĂTĂŢITĂ

I. DEDUCEREA ECUAŢIEI.

Dacă, pornind de la ecuaţia **clotoidei** se consideră că: **a)** pentru intervalul închis [0 , L] se acceptă $x = s$; **b)** se are în vedere numai primul termen din ecuaţia de definiţie a clotoidei, atunci, se obţine curba progresivă având ecuaţia:

$$y = x^3 / (6.x_0.R) \quad , \qquad (1)$$

în care (**fig.1**): R reprezintă raza cercului de pe traseul definitiv ,iar,

x_0 reprezintă proiecţia curbei progresive pe aliniamentul iniţial.

Sistemul rectangular de axe de coordonate are originea în punctul principal **AR**.

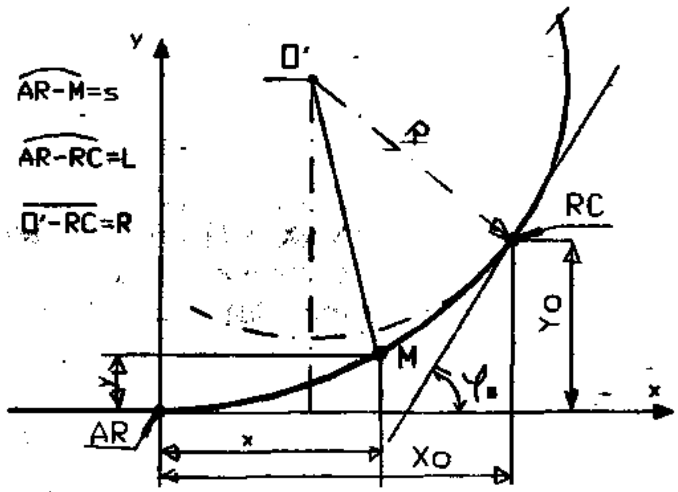

Fig.1. Parabola cubică.

Pentru această curbă progresivă: - în punctul **AR**, ordonata $(y(x))_{x=0}$, derivata $(y'(x))_{x=0}$ şi curbura $(y''(x)/[1+(y'(x))^2]^{3/2})_{x=0}$ sunt nule. Cu alte cuvinte: curba progresivă în discuţie porneşte de pe aliniamentul iniţial din punctul **AR**, este tangentă la acest aliniament, iar, raza de curbură în acest punct este infinită;

- în punctul principal **RC** - **ca punct aparţinând curbei progresive** -ordonata (y_0), derivata$(tg(\varphi_0))$ şi curbura$(1/(R_{RC}))$ se determină cu relaţiile:

$$(y(x) \text{, pentru } x = x_0) = y_0 = (x_0)^2 / (6R) \; ; \qquad (2)$$

$$(y'(x) \text{, pentru } x = x_0) = tg(\varphi_0) = x_0 / (2R) \qquad (3)$$

$$(y''(x)/[1+(y'(x))^2]^{3/2} \text{, pentru } x = x_0) = 1/(R_{RC}) = \\ = (1/R) / [1+(tg(\varphi_0))^2]^{3/2} \qquad (4)$$

Se poate constata că: în punctul principal RC - ca punct aparţinând curbei progresive - curbura obţinută cu relaţia **(4)** este diferită de curbura **(1/ R)** ,aferentă arcului de cerc (situat în continuarea curbei progresive). Raportul curburilor **(1/ R)** şi **(1/ (R$_{RC}$)** rezultă egal cu:

$$(1/R_{RC})/(1/R) = [1 + (tg(\varphi_0))^2]^{-3/2} \quad (5)$$

sau, prin înlocuirea lui $tg(\varphi_0)$, egal cu:

$$(1/R_{RC})/(1/R) = [1 + (x_0/(2R))^2]^{-3/2}, \quad (6)$$

Pentru eliminarea acestei variaţii de curbură s-a ales ecuaţia curbei progresive îmbunătăţite de forma:

$$y = A.x^3/(6.x_0.R), \quad (7)$$

în care **A** este o constantă, care urmează a fi determinată din condiţia ca, la sfârşitul curbei progresive respective, să nu mai existe variaţie de curbură. Succesiv, rezultă:

$$y'(x) = A.x^2/(2.x_0.R) \quad \text{şi} \quad \underline{y'(x_0) = A.x_0/(2.R)} \quad (8)$$

$$y''(x) = A.x/(x_0.R) \quad \text{şi} \quad y''(x_0) = A/R$$

Punând condiţia de egalitate a curburilor rezultă:

$$(A/R)/[1 + (A.x_0/(2.R))^2]^{3/2} = 1/R, \text{ sau,}$$

$$A = [1 + (A.x_0/(2.R))^2]^{3/2}, \quad (9)$$

Din rezolvarea ecuaţiei (9) se poate obţine valoarea constantei **A**, pentru valori x_0 şi R cunoscute. O soluţie aproximativă se obţine atunci când, în membrul al doilea al relaţiei (9), se ia A = 1; soluţia aproximativă este - în acest caz - următoarea: $A = [1 + (x_0/(2.R))^2]^{3/2}$.

Folosind interpretarea geometrică a derivatei, respectiv $y'(x_0) = tg(\varphi_0)$, ecuaţia (9) se poate pune sub forma:

$$A = [1 + (tg(\varphi_0))^2]^{3/2},$$

în care, dacă se are în vedere că: $(1+(tg(\varphi_0))^2) = 1/(cos(\varphi_0))^2$, se obţine:

$$\underline{A = 1/(cos(\varphi_0))^3}, \quad (10)$$

care, nu reprezintă altceva decât exprimarea necunoscutei **A** în funcţie de o altă necunoscută (mărimea φ_0). Necunoscuta φ_0 reprezintă unghiul făcut de tangenta în punctul **RC** - de la sfârşitul curbei $y = x^3/(6.x_0.R.(cos\varphi_0)^3)$ - cu aliniamentul iniţial. Drept urmare se poate scrie (cuplând (8) şi (10)):

$$tg(\varphi_0) = x_0/(2.R.(cos(\varphi_0))^3), \quad (11)$$

care este ecuaţia <u>prin a cărei rezolvare se obţine necunoscuta φ_0</u>. Deci, ecuaţia **parabolei cubice îmbuinătăţite** este:

$$y = x^3/(6.R.x_0.(cos(\varphi_0))^3), \quad (12)$$

Această formă a ecuaţiei parabolei cubice îmbunătăţite (denumită trigonometrică) poate fi aplicată numai după determinarea unghiului φ_0.

II.RELAŢIA DE LEGĂTURĂ ÎNTRE x_0 şi L.

În cazul curbelor progresive de cale ferată este respectată condiţia:

$$|y'(x)| < 1$$

Drept urmare, la stabilirea relației care face legătura între x_0 şi L, poate fi utilizată dezvoltarea Mac-Laurin a funcției : $[1+(y'(x))^2]^{1/2}$, funcție care intervine în relația cunoscută **$ds = [1+(y'(x))^2]^{1/2}dx$**.

Ținând seama de (12), rezultă :

$$y'(x) = x^2/[2.R.x_0.(\cos(\varphi_0))^3]\text{, şi, apoi :}$$

$$ds = \{1+(1/2).\{x^2/[2.R.x_0.(\cos(\varphi_0))^3]\}^2-(1/8).\{x^2/[2.R.x_0.(\cos(\varphi_0))^3]\}^4 + (3/48).\{x^2/[2.R.x_0.(\cos(\varphi_0))^3]\}^6 - \ldots\}.dx\text{, iar,}$$

prin integrarea ei, :

$$s = x + (1/40).x^5/[R.x_0.(\cos(\varphi_0))^3]^2 - (1/1152).x^9/[R.x_0.(\cos(\varphi_0))^3]^4 + (1/13312)/[R.x_0.(\cos(\varphi_0))^3]^6 - \ldots \qquad (13)$$

În punctul RC (sfârşitul curbei progresive), $x = x_0$ şi $s = L$; ca urmare, având în vedere egalitatea (11), pentru acest punct, rezultă :

$$L = x_0.[1+(1/10).(tg(\varphi_0))^2 - (1/72).(tg(\varphi_0))^4 + (1/208).(tg(\varphi_0))^6 - \ldots]\text{,} \qquad (14)$$

care constituie relația de legătură dintre lungimea curbei progresive (L) şi proiecția acesteia pe aliniament (x_0).

În problemele practice, se pot întâlni situațiile :

- se cunoaşte raza R şi lungimea L;
- se cunoaşte raza R şi lungimea x_0.

Cele două situații sunt cuplate între ele prin relația (14).

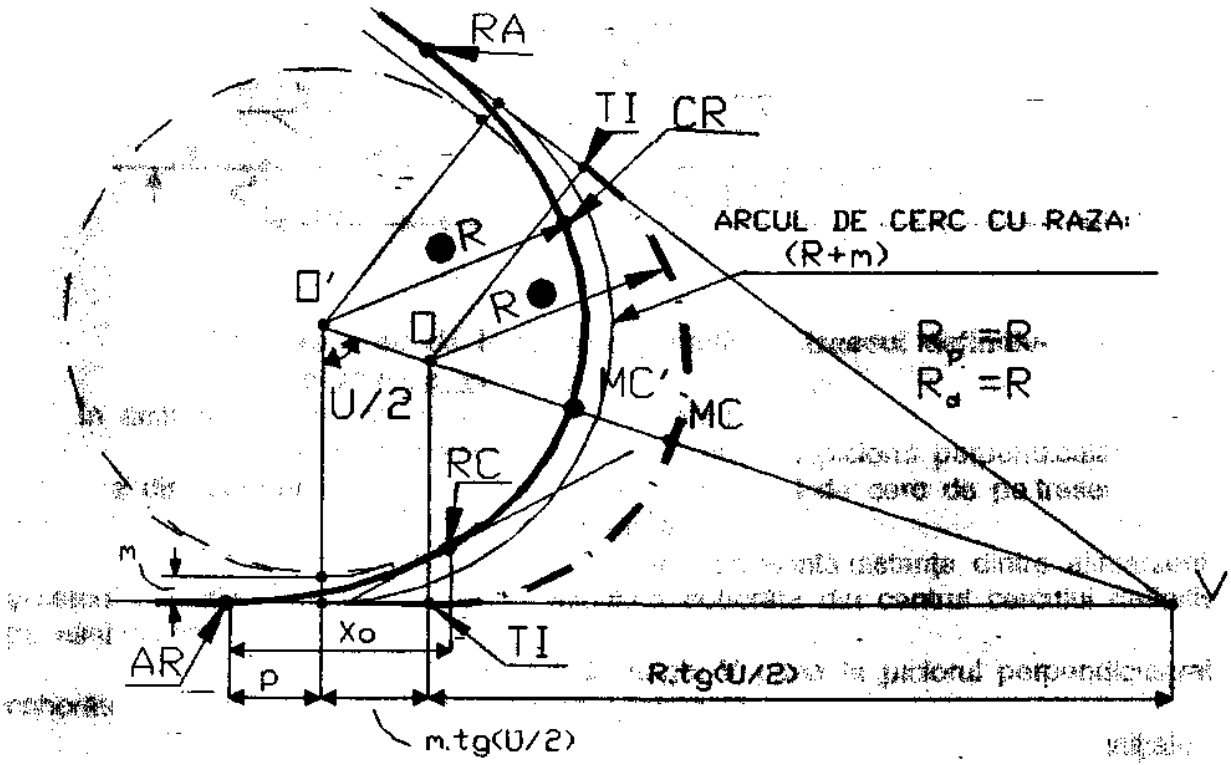

Fig. 2.Trecerea de la traseul primitiv la traseul definitiv- păstrarea razei.

III. ELEMENTE NECESARE TRASĂRII PARABOLEI CUBICE ÎMBUNĂTĂŢITE.

În continuare se tratează situaţiile care pot interveni la trecerea de la traseul primitiv la traseul definitiv:

- **păstrarea razei** (fig. 2);
- **păstrarea centrului** (fig. 3).

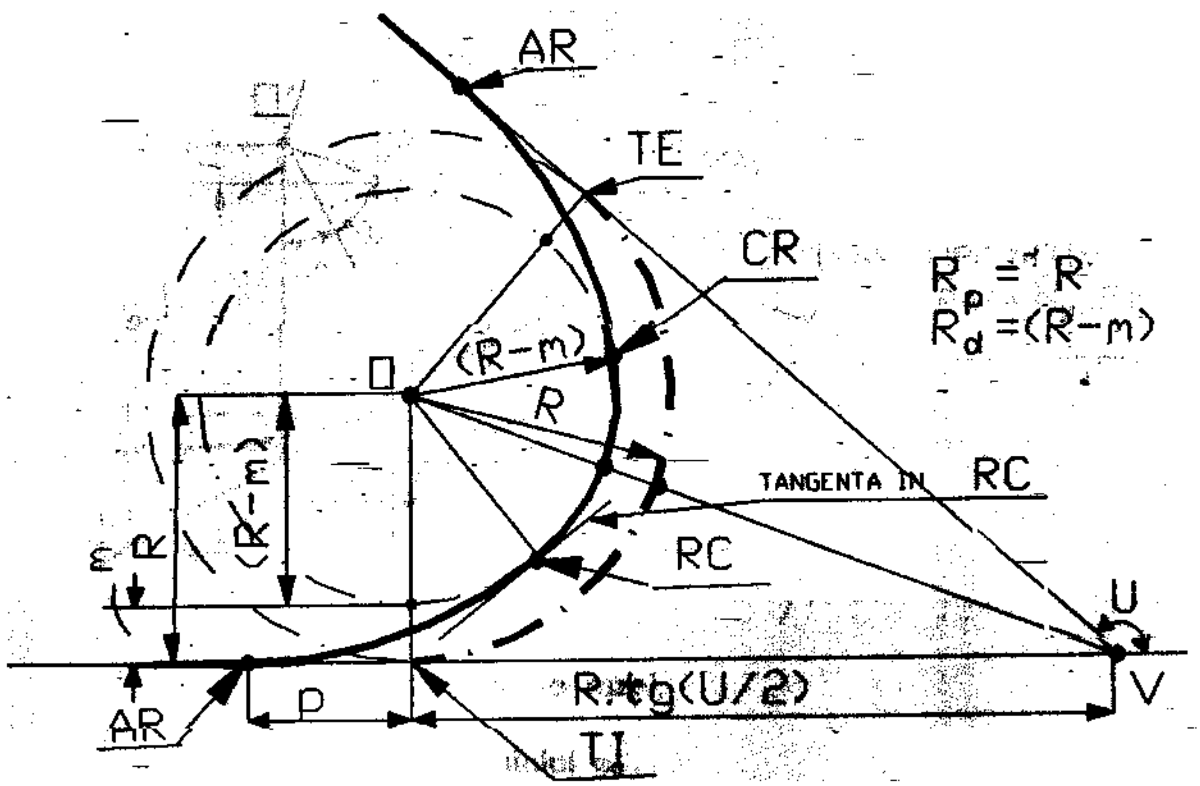

Fig. 3.Trecerea de la traseul primitiv la traseul definitiv- păstrarea centrului.

În ambele situaţii trebuie să fie determinate:

- poziţia punctului principal **AR** faţă de piciorul perpendicularei coborâte din centrul cercului pe care este situat arcul de cerc de pe traseul definitiv (cercul definitiv) - mărime notată cu **p**;
- retragerea -notată cu **m** - care reprezintă distanţa dintre aliniament şi cercul definitiv, măsurată pe perpendiculara coborâtă din centrul cercului definitiv pe aliniament;
- distanţa de la vârful de unghi **V** până la piciorul perpendicularei coborâte din centrul cercului definitiv pe aliniament;
- lungimea L a curbei progresive (atunci când între datele iniţiale se află mărimea x_0), sau, lungimea x_0 (atunci când între datele iniţiale se află mărimea **L** (**fig. 1**)).

În ambele situaţii se consideră cunoscută mărimea unghiului de abatere **U** dintre aliniamente şi - de asemenea - se consideră cunoscută metodologia de stabilire a lungimii **L** a curbei progresive [10]. Odată cunoscute aceste elemente, se pot efectua calculele de trasare referitoare la poziţionarea punctelor aparţinând curbei progresive (de exemplu : în sistemul de axe de coordonate având originea în **AR**, se pot determina ordonatele **y(x)** , pentru punctele de pe axa absciselor, obţinute prin împărţirea lungimii x_0 într-un număr de părţi egale) .De asemenea, în ambele metode , este necesară determinarea unghiului φ_0.

III.1.Păstrarea razei .

In acest caz (fig. 2), raza cercului definitiv (R_d) este egală cu raza cercului primitiv , notată cu R_P; deci , $R_p = R_d = R$.

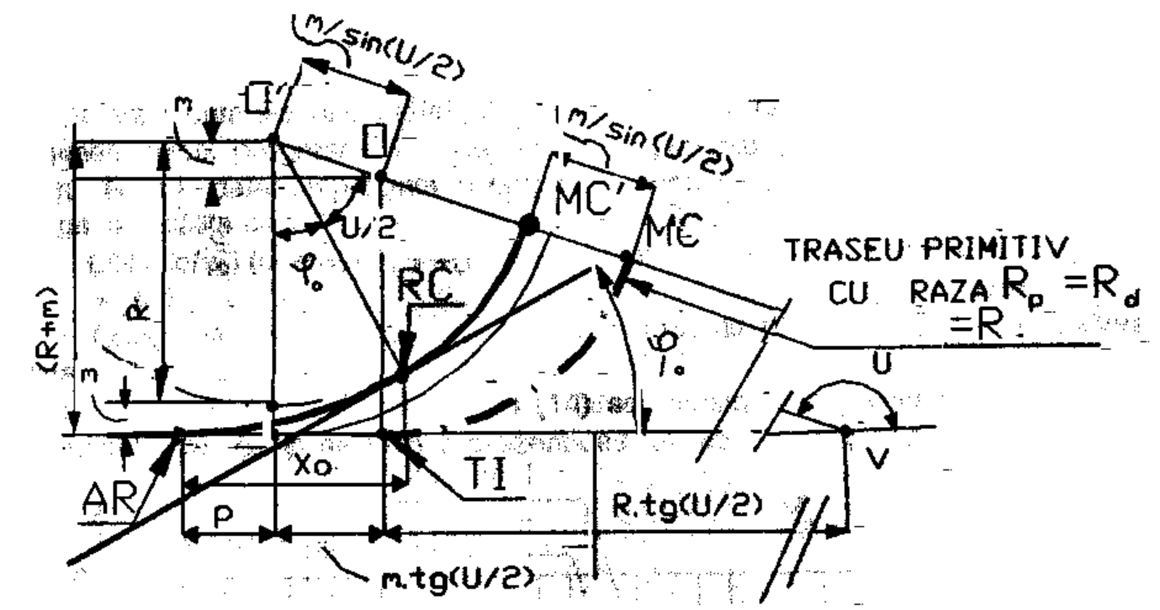

Fig. 4.Păstrarea razei.

III.1.1.Determinarea unghiului φ_0 .

Se consideră ca date iniţiale raza **R** şi lungimea **L**

Se procedează astfel :

- se aduce , mai întâi ,relaţia **(11)** sub forma :

$$\sin(2.\varphi_0).(\cos(\varphi_0))^2 = x_0/R ; \qquad (11.a)$$

- pentru găsirea unei prime valori aproximative a unghiului (φ_{01} ,în cadrul primei încercări), în relaţia de mai sus , $\cos(\varphi_0)$ se ia egal cu unitatea (deoarece unghiul φ_0 este mic) , iar , x_0 se consideră egal cu L (deoarece diferenţa $(L - x_0)$ este redusă) , obţinându-se :

$$\sin(2.\varphi_{01}) = L / R$$, şi , mai departe :

$$\underline{\varphi_{01} = (1/2).\arcsin(L/R)} \qquad (15)$$

- cu relaţia **(11)** se calculează valoarea aproximativă x_{01} ,egală cu

$$x_{01} = 2.R.\sin(\varphi_{01}).(\cos(\varphi_{01}))^2 ,$$

iar , cu relaţia **(14)** se calculează valoarea aproximativă L_1 egală cu :

$$L_1 = x_{01}.[1 + (1/10).(tg(\varphi_{01}))^2 - (1/72).(tg(\varphi_{01}))^4 + (1/208).(tg(\varphi_{01}))^6] ;$$

<u>Observaţie</u> : din egalitatea **(14)** s-au luat în considerare numai primii patru termeni din membrul al doilea .

- se calculează diferenţa $(L - L_1)$;

- întrucât valoarea găsită pentru L_1 este diferită de valoarea lui L, se determină o nouă valoare îmbunătăţită a unghiului - notată cu φ_{02} - cu relaţia:

$\varphi_{02} = \varphi_{01}.(L / L1)$;

- cu această nouă valoare a unghiului, se începe încercarea a doua, calculându-se (ca mai sus), succesiv, mărimile x_{02}, L_2 şi diferenţa $(L-L_2)$;
- sunt efectuate astfel de iteraţii până când diferenţa $(L - L_i)$ este acceptabilă (de exemplu: diferenţa $(L-L_i)$ să fie mai mică decât eroarea de măsurare a lungimii L pe teren).

III.1.2.Justificarea procedeului de determinare a unghiului φ_0.

Aşa după cum s-a mai arătat, datele iniţiale sunt raza arcului de cerc R şi lungimea curbei progresive L. De asemenea, unghiul φ_0 - pentru o pereche de valori R şi L date - reprezintă o constantă. Prin cuplarea relaţiilor (11) şi (14) se ajunge la egalitatea:

$$L/R = tg(\varphi_0).(\cos(\varphi_0))^3.[\,1 + (1/10).(tg(\varphi_0))^2 - (1/72).(tg(\varphi_0))^4 + (1/208).(tg(\varphi_0))^6\,]. \qquad (16)$$

Observaţie: din membrul al doilea al egalităţii (14) s-au luat în considerare numai primii patru termeni.

Dacă membrul al doilea al relaţiei (14) se consideră ca o funcţie (notată cu F) dependentă de φ_0 şi se face reprezentarea ei se obţine graficul din fig.5.

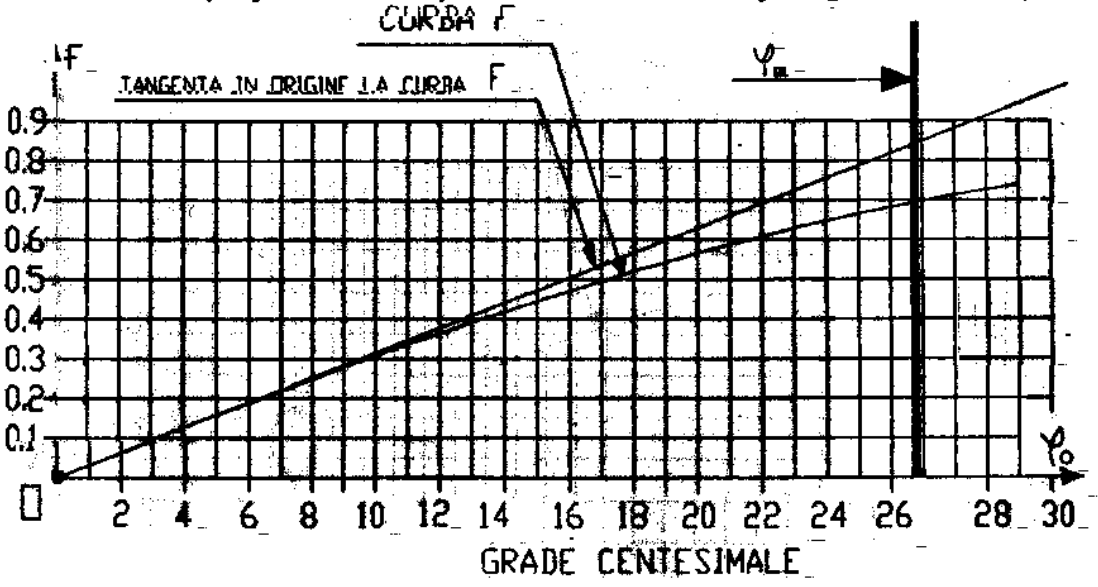

Fig. 5. Graficul funcţiei $F(\varphi_0)$.

Valoarea limită pentru unghiul φ_0 s-a stabilit din următoarea condiţie: între punctul principal AR şi punctul principal RC curbura $(1/R_x)$ să aibe o variaţie monotonă (R_x reprezintă valoarea razei de curbură în punctul din cuprinsul curbei progresive având abscisa egală cu x). Ca şi în cazul parabolei cubice (obişnuite), valoarea efectivă a unghiului limită rezultă din anularea derivatei:

$$d(1/R_x)/dx = 0,$$

Pentru parabola cubică îmbunătăţită, curbura $1/R_x$ este dată de relaţia:

$$1/R_x = x/[x_0.R.(\cos(\varphi_0))^3].\{1 + [x^2/(2.x_0.R.(\cos(\varphi_0))^3)]^2\}^{-3/2} \qquad (17)$$

La fel ca şi în cazul parabolei cubice, din anularea derivatei **$d(1/R_x)/dx$**, se obţine:

$tg(\varphi_{0L}) = 0,44722$, sau, **$\varphi_{0L} = 24^0 5' 41''$**, sau, **$\varphi_{0L} = 26^g 77^c 19,14^{cc}$**

Pentru lungimile **L** şi razele **R**, întâlnite în practică la curbele de cale ferată, este satisfăcută inegalitatea: **$\varphi_0 < \varphi_{0L}$**.

<u>**Observaţie**</u>: Dacă unghiul φ_0 - făcut de tangenta dusă prin punctul **RC** cu aliniamentul iniţial - depăşeşte valoarea φ_{0L}, atunci, în cuprinsul curbei progresive respective, vor exista curburi superioare curburii aferente arcului de cerc, sau - cu alte cuvinte: în cuprinsul curbei progresive vor exista raze inferioare razei arcului de cerc.

Din **fig. 5** rezultă că: pe intervalul $[0,\varphi_{0L}]$ derivata a doua a funcţiei F este negativă. Această caracteristică a funcţiei **F (fig. 5)** **garantează obţinerea soluţiei prin aproximaţii succesive** (garantează convergenţa, în cazul iteraţiilor).

Tot din **fig. 5** se poate deduce valoarea maximă pe care o poate avea raportul **L/R** în cazul analizat; acest raport limită este reprezentat de valoarea funcţiei **F** pentru $\varphi_0 = \varphi_{0L}$, respectiv: **$(L/R)_{max.} = 0,693638$**.

Ca şi valoarea φ_{0L}, această valoare maximă nu se întâlneşte în practică.

Obţinerea valorii unghiului φ_0, din rezolvarea ecuaţiei **(16)**, înseamnă de fapt (a se vedea **fig. 6**) găsirea abscisei punctului de intersecţie dintre dreapta orizontală care corespunde raportului L / R (conoscut) şi funcţia F.

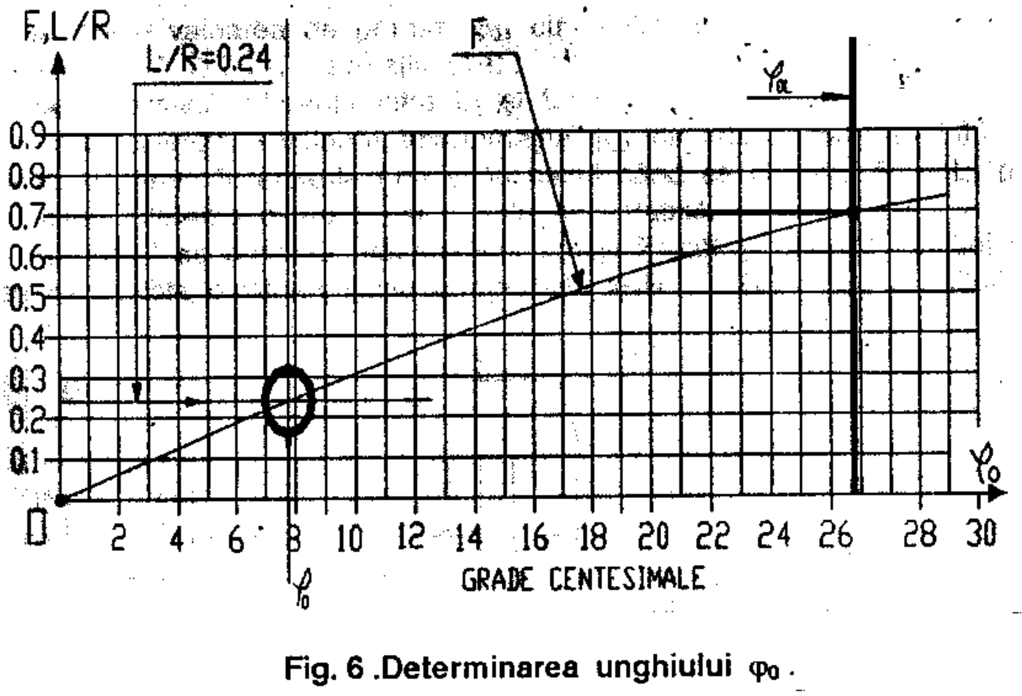

Fig. 6 .Determinarea unghiului φ_0.

În **fig. 6**, se arată modul de obţinere a valorii φ_0 pentru toate curbele progresive la care raportul **L/R** = 0,24 .Practic, graficul din **fig. 6** poate fi folosit la alegerea primei valori aproximative a unghiului φ_{01}, la începerea iteraţiilor. Pentru obţinerea soluţiei numai pe cale grafică, este necesară alegerea unei scări convenabile; este însă - mult mai comod - să fie parcurse etapele indicate la punctul **III.1.1**.

III.1.3.Exemplu de calcul pentru determinarea unghiului φ_0.

Date iniţialale : L = 120 m ; R = 500 m . Încercările succesive (a se vedea III.1.1) sunt :

- încercarea I-a : φ_{01} = 0.121183 radiani ; L_{01} = 119,2963 m
- încercarea II-a : φ_{02} = 0,121898 radiani ; L_{02} = 119,9777 m
- încercarea III-a: φ_{03} = 0,12192 radiani ; L_{03} = 119.9993 m
- încercarea IV-a: φ_{04} = 0,121921 radiani ; L_{04} = 120 m

x_{04} = 119,8205 m

Soluţia căutată : φ_0 = **0,121921 radiani** .

Este de remarcat numărul redus al încercărilor.

III.1.4.Unele precizări.

a) Dacă , pornind de la relaţia **(14)** se au în vedere numai primii doi termeni din membrul al doilea , atunci , se poate proceda astfel :

- egalitatea **(14)** conduce la :

  $x_0 = L/[1 + (1/10).(tg(\varphi_0))^2]$;

- iar, egalitatea **(11)** - în final - poate fi adusă la forma :

  $$(\sin(\varphi_0))^3 - (10/9).\sin(\varphi_0) + (5/9).(L/R) = 0 \qquad (18)$$

Ecuaţia **(18)** se poate rezolva utilizând formulele lui Cardan

b) Dacă , drept date iniţiale se aleg raza R şi proiecţia x_0 a curbei progresive pe aliniamentul iniţial , atunci , unghiul φ_0 reprezintă soluţia ecuaţiei **(11)** ; în acest caz , locul funcţiei F este luat de F' , care reprezintă membrul al doilea al relaţiei :

$$x_0/R = 2.tg(\varphi_0).(\cos(\varphi_0))^3 ,$$

În acest caz se parcurg etapele :

- se alege valoarea de pornire φ_{01} cu relaţia : $\varphi_{01} = (1/2).\arcsin(x_0/R)$
- se calculează L_{01} cu relaţia **(14)** ;
- se determină diferenţa între L_1 şi L ;
- se calculează o valoare îmbunătăţită φ_{02} , cu relaţia : $\varphi_{02} = \varphi_{01}.L/L_1$
- se continuă încercările (ca şi în cazul când se conosc R şi L) până când diferenţa dintre L_1 şi L este acceptabilă.

În **fig. 7** se prezintă atât graficul funcţii F ,cât şi graficul funcţiei F' .Se constată că : există o valoare limită a raportului x_0/R : $(x_0/R)_{max.} = 0.680412$

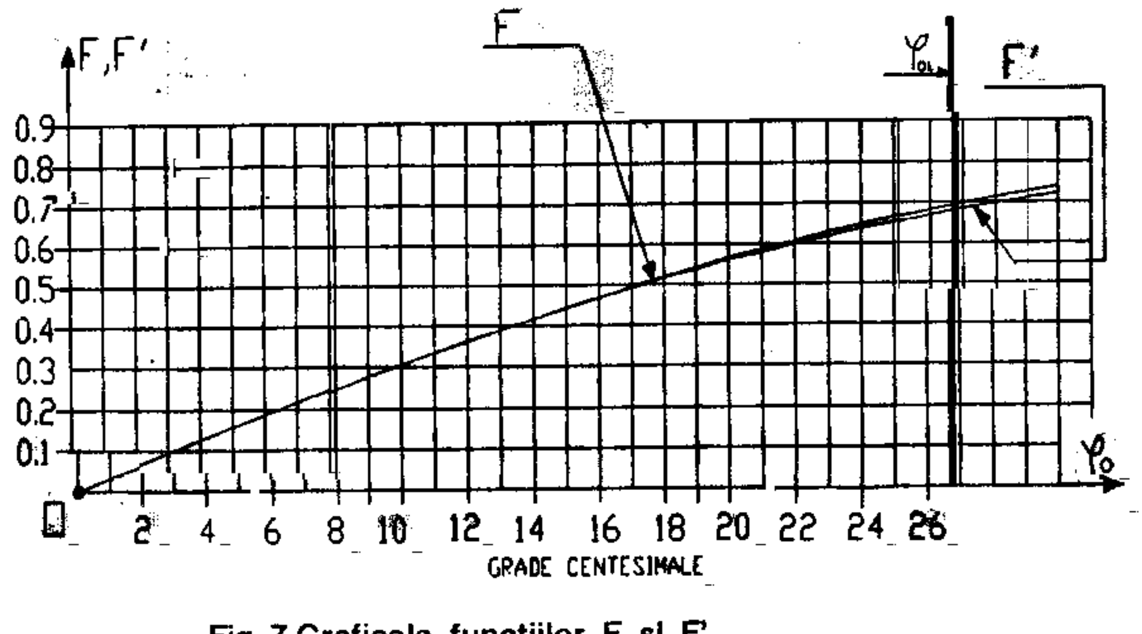

Fig. 7.Graficele funcţiilor F şi F' .

Pentru unghiuri φ_0 mici , practic, cele două curbe se suprapun.

Dacă lungimea curbei progresive L este **mică** (respectiv, dacă proiecţia curbei progresive x_0 este mică), atunci, poate fi acceptată aproximaţia $x \approx s$ (**sau** $x_0 \approx L$) ; considerând diferenţa $(L - x_0)$ ca fiind egală cu marginea erorii de măsurare a lungimii L , rezultă domeniul pentru lungimile L (cuprins între axa absciselor şi curba L_1 din **fig.8**). Pentru lungimi L aparţinând acestui domeniu ; parabola cubică îmbunătăţită coincide - practic -cu clotoida sau cu parabola cubică . Curba L_1 din **fig.8** corespunde unei margini - pentru eroarea de măsurare a lungiumii L_1 - care este egală cu $0{,}003\sqrt{L_1}$.

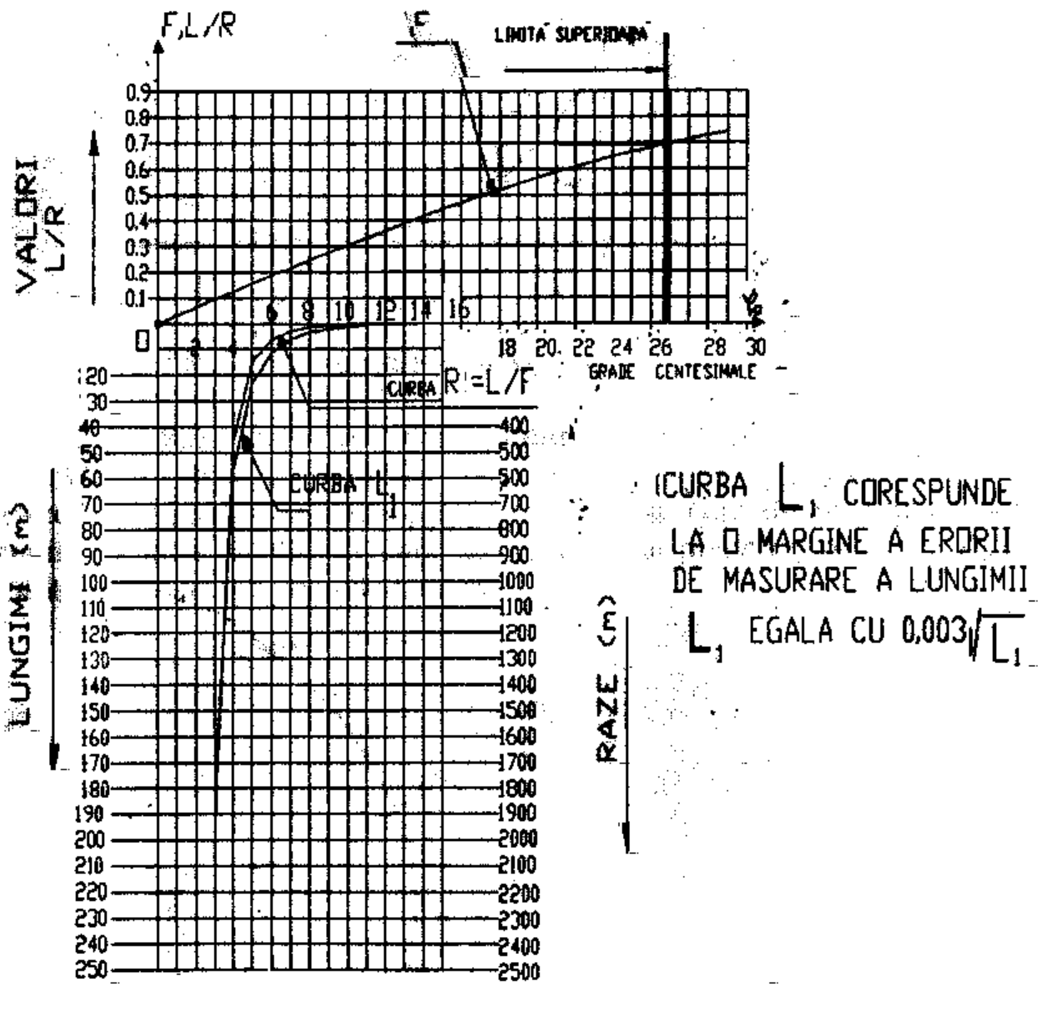

Fig. 8.Diferenţa între L şi x_0 .

Numai o parte dintre valorile reglementate ale lungimilor curbelor progresive (conform [10]) sunt cuprinse între curba L_1 şi axa absciselor **(fig. 8)** ; cu alte cuvinte ,există situaţii (lungimi reduse ale curbelor progresive) în cadrul cărora poate fi acceptată aproximaţia $x \approx s$.

III.1.5.Determinarea elementelor geometrice ale curbei de pe traseul primitiv.

Se consideră cunoscute : Raza R_p şi unghiul de abatere U ; cu relaţiile , care se pot stabili cu uşurinţă **(fig. 9)** , se determină : tangenta(T) , bisectoarea(B) şi lungimea arcului de cerc (C); astfel :

$$T = R_p.tg(U/2) \quad ; \quad B = R_p.(1/\cos(U/2) - 1) \quad ; \quad C = R_p.U \qquad (19)$$

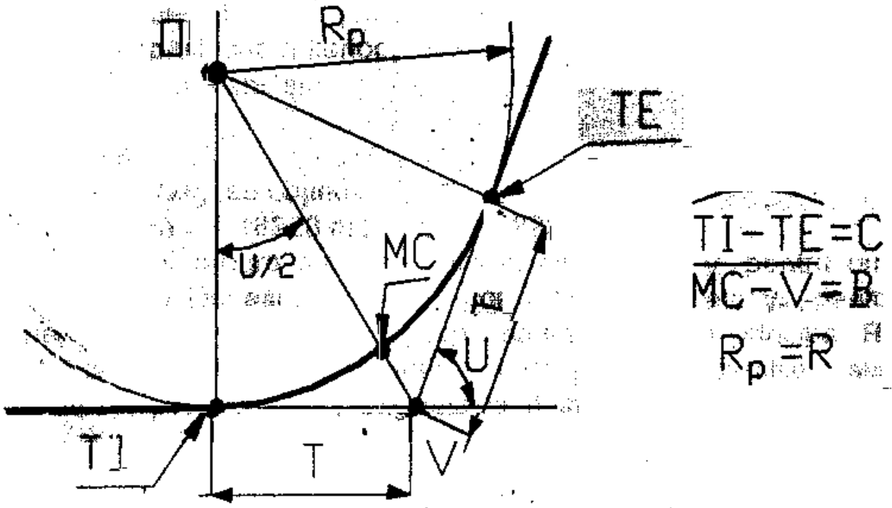

Fig. 9. Elementele curbei de pe traseul primitiv.

III.1.6.Determinarea elementelor geometrice pentru curba de pe traseul definitiv.

În cazul dat **(păstrarea razei)** ,raza arcului de cerc de pe traseul definitiv este aceiaşi cu raza arcului de cerc de pe traseul primitiv ,deci $R_d = R_p = R$. În **fig. 10** este reprezentat traseul definitiv .

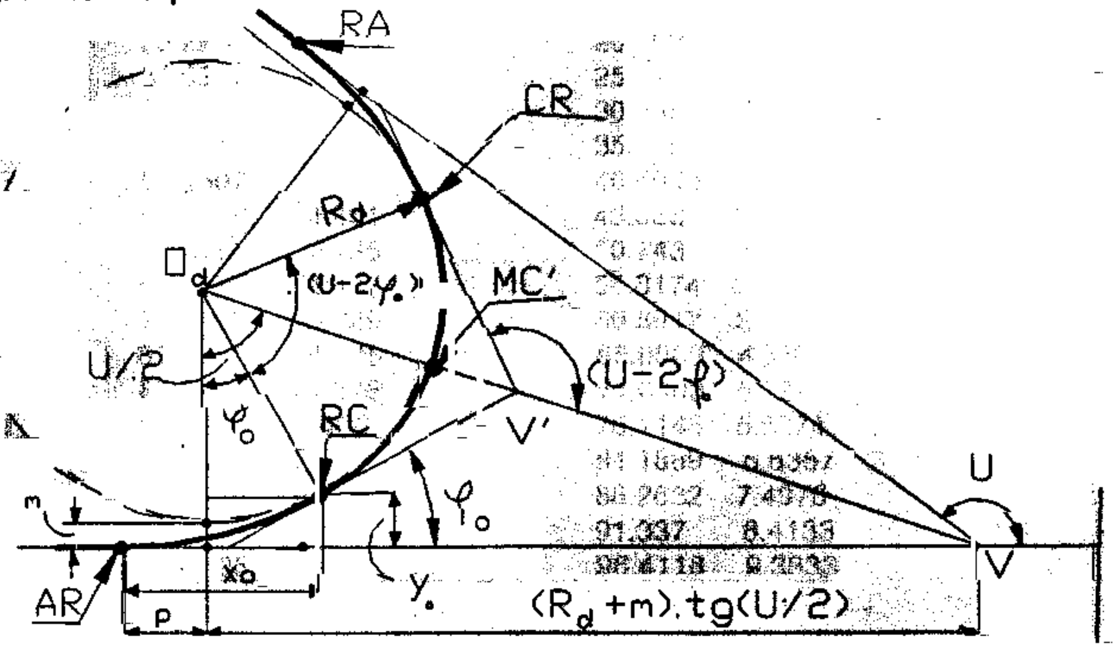

Fig. 10.Elementele curbei de pe traseul definitiv.

Din condiţia ca arcul de cerc - de rază R şi care începe în punctul RC - să aibe tangenta în acest punct aceiaşi cu tangenta de la sfârşitul curbei progresive, rezultă relaţiile de calcul pentru mărimile care prezintă interes; astfel :

$$p = x_0 - R.\sin(\varphi_0) \quad ; \quad m = y_0 - R.(1 - \cos\varphi_0) \quad ; \quad V\text{-}AR = p + (m + R).tg(U/2) \qquad (20)$$

III.1.6.1.Exemplu de calcul.

Date iniţiale (cele din exemplele anterioare): L = 120 m ; $R=R_p$=500 m ; U = $40^g22^c93^{cc}$ (= 0,63192 radiani).

Rezultate : Din exemplul dat anterior, pentru L = 120 m şi R = 500 m a rezultat că : $\varphi_0 = \varphi_{04}$ = 0,121921 radiani şi

x_0 = 119,8205 m .

Având în vedere aceste valori,

prin aplicarea relaţiilor (20) se obţine :

p = 59,0108 m ; m = 1,18223 m ; V-AR = 222,853 m .

Pentru trasarea curbei progresive ,s-au calculat ordonatele y, pentru un număr de 20 puncte (tabelul 1). De asemenea, s-au calculat ordonatele y_c, pentru 20 de puncte situate pe porţiunea arc de cerc , cuprinsă între punctul principal RC şi mijlocul arcului de cerc (MC') ; în cazul punctelor de pe cerc, abscisele sunt luate în lungul tangentei din punctul RC , originea fiind în punctul RC (tabbelul 1).

TABELUL 1

Coordonate pentru :

CURBA PROGRESIVĂ X (m)	CURBA PROGRESIVĂ Y (m)	ARCUL DE CERC XC (m)	ARCUL DE CERC YC (m)
.0000	.0000	.0000	.0000
6.3063	.0007	5.0743	.0258
12.6127	.0057	10.1486	.1030
18.9190	.0193	15.2229	.2318
25.2254	.0457	20.2972	.4122
31.5317	.0892	25.3715	.6441
37.8380	.1541	30.4458	.9278
44.1444	.2447	35.5201	1.2633
50.4507	.3653	40.5945	1.6506
56.7571	.5201	45.6688	2.0900
63.0634	.7135	50.7431	2.5815
69.3698	.9497	55.8174	3.1253
75.6761	1.2329	60.8917	3.7216
81.9824	1.5675	65.9660	4.3706
88.2888	1.9578	71.0403	5.0724
94.595	2.4080	76.1146	5.8274
100.9015	2.9225	81.1889	6.6357
107.2078	3.5054	86.2632	7.4976
113.5141	4.1611	91.337	8.4133
119.8205	4.8938	96.4118	9.3833

III.2.Păstrarea centrului arcului de cerc.

În acest caz, centrul arcului de cerc de pe traseul definitiv este acelaşi cu centrul arcului de cerc de pe traseul primitiv (fig. 11). Dacă raza arcului de cerc de pe traseul primitiv R_p este egală cu R, atunci, raza arcului de cerc de pe traseul definitiv R_d va fi egală cu (R - m), iar, ecuaţia parabolei cubice îmbunătăţite va fi de forma:

$$y = x^3 / [6.x_0.(R - m).(\cos(\varphi_0))^3] \quad (21)$$

În această ecuaţie, retragerea m satisface (fig. 11) egalitatea:

$$m = y_0 - (R - m).(1 - \cos(\varphi_0)), \quad (22)$$

sau, prin folosirea relaţiei (21) în cazul abscisei x_0 (care corerspunde punctului RC), retragerea m satisface egalitatea:

$$m = (x_0)^2 / [6.(R - m).(\cos(\varphi_0))^3] - (R - m).(1 - \cos(\varphi_0)) \quad (23)$$

Din această egalitate se poate obţine relaţia de legătură dintre (R - m) şi elementele R, x_0 şi φ_0 :

$$(R - m) = (R / (2.\cos(\varphi_0)).[1 + (1 - (4/6).(x_0 / R)^2 / (\cos(\varphi_0))^3)^{1/2}] \quad (24)$$

În fine, având în vedere că:

$$tg(\varphi_0) = x_0 / [2.(R - m).(\cos(\varphi_0))^3], \quad (25)$$

rezultă:

$$\underline{(x_0 / R) = 2.tg(\varphi_0).(\cos(\varphi_0))^2 / [1 + (4/6).(\sin(\varphi_0))^2]}$$

Semnificaţia mărimilor care intervin în relaţia (26) rezultă din fig. 11.

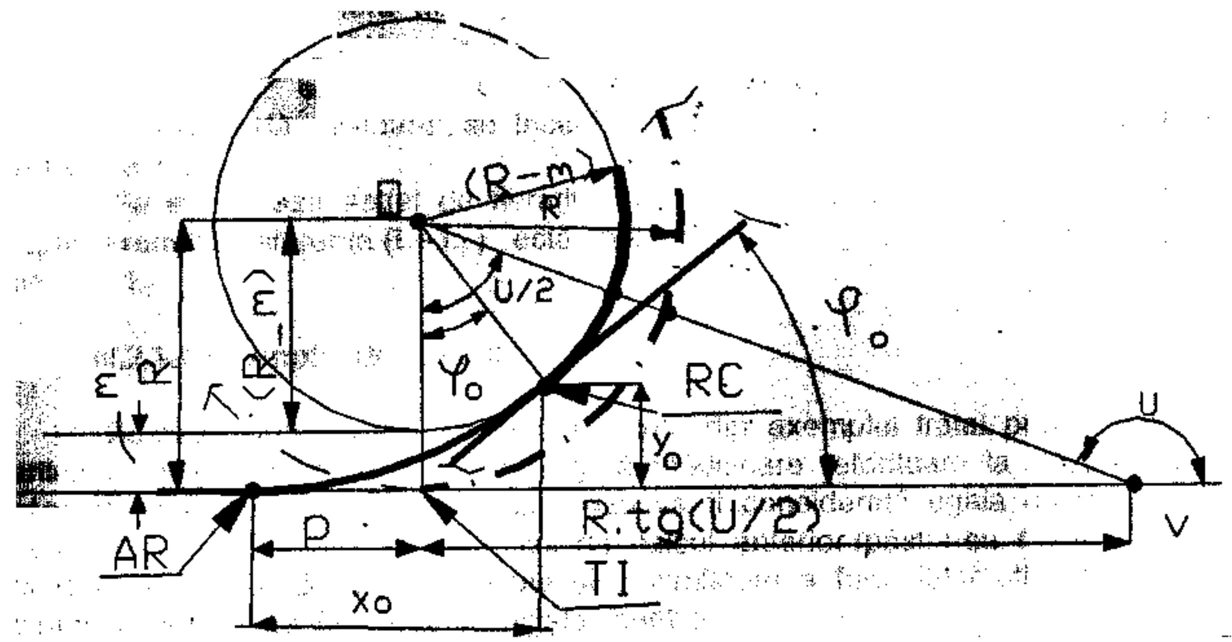

Fig. 11. Păstrarea centrului.

Având în vedere relaţiile (21) şi (25), rezultă (utilizând calea arătată în capitolul II) că: relaţia de legătură dintre mărimile L şi x_0 este reprezentată de formula (14) (formula (14) este aceeaşi atât în cazul păstrării razei, cât şi în cazul păstrării poziţiei centrului).

III.2.1. Determinarea unghiului φ_0.

Determinarea unghiului φ_0 presupune rezolvarea ecuaţiei (care se obţine din combinarea egalităţilor (24) şi (25)) următoare :

$$\sin(2.\varphi_0) = (x_0/R).[1 + (4/6).(\sin(\varphi_0))^2] \qquad (27)$$

Ca şi în cazul anterior (cazul păstrării razei), obţinerea soluţiei ecuaţiei (27) presupune efectuarea de iteraţii. Se procedează astfel :

(Se precizează din nou că datele iniţiale sunt : lungimea L a curbei progresive şi raza R a arcului de cerc de pe traseul primitiv).

- se alege o primă valoare pentru unghiul φ_0 - notată cu φ_{01} - care rezultă dacă, în ecuaţia (27), în loc de x_0 se introduce L, iar, paranteza

$$[1 + (4/6).(\sin(\varphi_0))^2] \quad ,$$

se consideră egală cu unitatea (acestea sunt posibile deoarece : diferenţa $(L - x_0)$ este redusă , şi - de asemenea - unghiul φ_0 este mic), obţinându-se

$$\varphi_{01} = \arcsin(L/R) ;$$

- se determină proiecţia x_{01} corespunzătoare unghiului φ_{01}, utilizând relaţia (27) :

$$x_{01} = R.\sin(2.\varphi_{01}) / [1 + (4/6).(\sin(\varphi_{01}))^2];$$

- se determină lungimea L_{01}, care corespunde unghiului φ_{01}, utilizând relaţia (14): $L_{01} = x_{01}.[1 + (1/10).(tg(\varphi_{01}))^2 - (1/72).(tg(\varphi_{01}))^4 + (1/208).(tg(\varphi_{01}))^6]$

Observaţie : din egalitatea (14) s-au luat în considerare numai primii patru termeni.

- se calculează diferenţa $(L - L_{01})$;

- întrucât L_{01} diferă de L , se determină o nouă valoare -îmbunătăţită pentru unghiul φ_0 - notată cu φ_{02} - cu relaţia :

$$\varphi_{02} = \varphi_{01}.(L/L_{01}) ;$$

- cu această valoare, se începe o nouă iteraţie, parcurgându-se etapele arătate anterior.

Se efectuează astfel de iteraţii până când diferenţa $(L - L_i)$ este acceptabilă (spre exemplu : diferenţa $(L - L_i)$ este mai mică decât marginea erorii de măsurare lingimii L).

III.2.1.1.Exemplu de calcul.

Ca date iniţiale vor fi considerate cele din exemplul tratat pentru cazul anterior (păstrarea razei), cu o singură modificare referitoare la raza arcului de cerc de pe traseul primitiv ; această rază va fi considerată egală cu valoarea pentru (R+m) rezultată din exemplul de calcul anterior (păstrarea razei). In felul acesta, exemplul de faţă constituie şi o verificare a formulelor utilizate. Deci, pentru exemplul de faţă datele iniţiale sunt :

L = 120 m (lungimea curbei progresive) ;

$R_p = R = 501{,}1822$ m (raza arcului de cerc de pe traseul primitiv) ;

Încercările succesive sunt :

- încercarea I-a : $\varphi_{01} = 0{,}120891$ radiani ; $x_{01} = 118{,}8477$ m ; $L_{01} = 119{,}0227$ m .
- încercarea II-a : $\varphi_{02} = 0{,}121884$ radiani ; $x_{02} = 119{,}7853$ m ; $L_{02} = 119{,}9647$ m .
- încercarea III-a : $\varphi_{03} = 0{,}12192$ radiani ; $x_{03} = 119{,}8193$ m ; $L_{03} = 119{,}9987$ m .
- încercarea IV-a : $\varphi_{04} = 0{,}121921$ radiani ; $x_{04} = 119{,}8204$ m ; $L_{04} = 120$ m.
- încercarea V-a : $\varphi_{05} = 0{,}121921$ radiani ; $x_{05} = 119{,}8205$ m ; $L_{05} = 120$ m

Cu ajutorul relaţiei (24) ,se calculează raza arcului de cerc de pe traseul definitiv : (R - m) = 500 m ; cunoscând pe R ,rezultă m = 1,182231 m . Se poate constata că au fost obţinute aceleaşi rezultate ca în exemplul tratat în cazul cu păstrarea razei . Drept urmare , elementele geometrice aparţinând curbei de pe traseul primitiv şi cele aparţinând curbei de pe traseul definitiv vor fi aceleaşi cu cele obţinute în capitolul **III.1**.

IV.Concluzii.

1.Ecuaţia de definiţie a parabolei cubice îmbunătăţite (forma trigonometrică) este :

$$y = x^3 / (6.\ X_0.R.(\cos(\varphi_0))^3)$$

2. În lucrare sunt date relaţiile de calcul (inclusiv aplicarea lor) , care intervin la stabilirea elementelor necesare trasării parabolei cubice îmbunătăţite , pentru situaţiile : raza arcului de cerc de pe traseul definitiv este aceiaşi cu raza arcului de cerc de pe traseul primitiv(**păstrarea razei**) ; centrul arcului de cerc de pe traseul definitiv este acelaşi cu centrul arcului de cerc de pe traseul primitiv (**păstrarea centrului**) .

3. În comparaţie cu parabola cubică trasată **aproximativ[5,6]** , parabola cubică îmbunătăţită elimină discontinuităţile din punctul principal **RC** (respectiv , la parabola cubică îmbunătăţită - în **RC** - nu există : diferenţă de ordonată ; cot unghiular şi variaţie de curbură) .

4. În comparaţie cu parabola cubică trasată **exact** [5,6] , la parabola cubică îmbunătăţită nu există variaţie de curbură în punctul principal **RC** ; parabola cubică îmbunătăţită - la fel ca şi clotoida - satisface integral primele **trei condiţii** [8,5,6] cerute curbelor progresive .

5.**Relaţiile de calcul** folosite în cazul parabolei cubice îmbunătăţite sunt arătate în anexă.

BIBLIOGRAFIE

1. Bercu, M şi Radu , C. : Racordarea curbelor pentru circulaţia cu viteze mari Centrul de documentare şi publicaţii tehnice din Ministerul Căilor Ferate ,1968.
2. Coquand Roger :DRUMURI circulaţie - traseu -construcţie.Vol.I ,Circulaţie - traseu , traducere din limba franceză .Editura Tehnică ,1968 .
3. Craus, I şi Guţu, V. : Studiul şi proiectarea drumurilor.Editura didactică şi pedagogică,1965.
4. Lefterescu, D : Trasee de linii ferate. Editura Transporturilor şi Telecomunicaţiilor 1960 .
5. Radu , C. şi Ungureanu C. :Domeniul de aplicabilitate al curbelor de racordare de cale ferată. Lucrările sesiunii ştiinţifice a Institutului de studii şi cercetări transporturi 23-24 aprilie 1971.Centrul de documentare şi publicaţii tehnice-1973.
6. Radu, C. : Suprastructura căii- partea I - a .Probleme .I.C.B.-1972.
7. Radu, C . : Suprastructuri CF pentru viteze mari -aplicaţii- ICB ,1987.
1. Şahunianţ, G. M.: Calea ferată . Editura "Transport"-Moscova 1969- în limba rusă.
9. Vasiliu , I : Curbe de cale ferată .Editura Transporturilor şi Telecomunicaţiilor , 1960.
10. x x x Instrucţia de norme şi toleranţe pentru construcţia şi întreţinerea căii (nr.314) - Ediţia 1969 .

ANEXA

FORMULE UTILE :

1. Ecuaţia parabolei cubice îmbunătăţite : $y = x^3 / [6.R.x_0.(\cos(\varphi_0))^3]$, (12)
(forma trigonometrică) :
(R este raza arcului de cerc de pe traseul definitiv ,iar, x_0 este proiecţia parabolei cubice îmbunătăţite pe aliniamentul iniţial).

PĂSTRAREA RAZEI

2. Relaţia de legătură între lungimea parabolei cubice îmbunătăţite (L) şi proiecţia ei pe aliniamentul iniţial (x_0) :
$$L = x_0.[1+(1/10).(tg(\varphi_0))^2 - (1/72).(tg(\varphi_0))^4 + (1/208).(tg(\varphi_0))^6 - ...] \quad , (14)$$
(această relaţie de legătură este aceiaşi şi în cazul păstrării centrului).
3. Ecuaţia din care (prin rezolvarea ei) rezultă unghiul φ_0 , în funcţie de lungimea parabolei cubice îmbunătăţite (L) şi de raza arcului de cerc de pe traseul definitiv (R):
$$L/R = tg(\varphi_0).(\cos(\varphi_0))^3.[1 +(1/10).(tg(\varphi_0))^2 - (1/72).(tg(\varphi_0))^4 + + (1/208).(tg(\varphi_0))^6] . \quad (16)$$
4. Ecuaţia din care (prin rezolvare) rezultă unghiul φ_0 , în funcţie de proiecţia parabolei cubice îmbunătăţite pe aliniamentul iniţial (x_0) şi raza arcului de cerc de pe traseul definitiv (R) :
$$\sin(2.\varphi_0).(\cos(\varphi_0))^2 = x_0/R \; ; \quad (11a)$$
5. Ecuaţia din care (prin rezolvarea ei) rezultă valoarea <u>aproximativă</u> a unghiului φ_0 , în funcţie de lungimea parabolei cubice îmbunătăţite (L) şi de raza arcului de cerc de pe traseul definitiv (R) :
$$(\sin(\varphi_0))^3 - (10/9).\sin(\varphi_0) + (5/9).(L/R) = 0 \quad (18)$$

PĂSTRAREA CENTRULUI

6. Relaţia de legătură dintre raza arcului de cerc de pe **traseul definitiv** (R - m) , raza arcului de cerc de pe traseul primitiv (R) şi proiecţia parabolei cubice îmbunătăţite pe aliniamentul iniţial (x_0) :
$$(R - m) = (R / (2.\cos(\varphi_0)).\{1 + [1 - (4/6).(x_0/R)^2 / (\cos(\varphi_0))^3]^{1/2} \} \quad (24)$$
7. Ecuaţia din care (prin rezolvarea ei) rezultă unghiul φ_0, în funcţie de raza arcului de cerc de pe traseul primitiv (R) şi proiecţia parabolei cubice îmbunătăţite pe aliniamentul iniţial (x_0) :
$$(x_0/R) = 2.tg(\varphi_0).(\cos(\varphi_0))^2 / [1+ (4/6).(\sin(\varphi_0))^2]$$
8. Relaţia de legătură între lungimea parabolei cubice îmbunătăţite L şi proiecţia ei pe aliniamentul iniţial x_0
$$L = x_0.[1+(1/10).(tg(\varphi_0))^2 - (1/72).(tg(\varphi_0))^4 + (1/208).(tg(\varphi_0))^6 - ...] \quad , (14)$$
(aceiaşi ca în cazul păstrării razei)
9. Ecuaţia din care (prin rezolvarea ei) rezultă unghiul φ_0 , în funcţie de raza arcului de cerc de pe traseul <u>primitiv</u> (R) şi lungimea parabolei cubice îmbunătăţite (L) :
$$L/R = 2.tg(\varphi_0).(\cos(\varphi_0))^2 / [1+ (4/6).(\sin(\varphi_0))^2].$$
$$.[1+(1/10).(tg(\varphi_0))^2 - (1/72).(tg(\varphi_0))^4 + (1/208).(tg(\varphi_0))^6]$$